Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ВЛИЯНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ХАРАКТЕР ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ТРУБЕ ЗА ДВИЖУЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Ю. А. Демьянов

(Москва)

Рассматривается задача о влиянии пограничного слоя на течение газа в трубе за движущейся ударной волной.

В частности, анализ полученного решения позволил объяснить экспериментально наблюдавшийся в работе[1] и парадоксальный с точки зрения ее авторов факт увеличения скорости контактной поверхности в ударной трубке.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ в трубе возникла движущаяся в покоящийся газ со скоростью U_0 ударная волна, за которой имеет место равномерный поток газа.

Допустим, что изменение со временем как скорости ударной волны $U(t)$, так и потока за ней может быть вызвано лишь формированием пограничного слоя на стенках трубы.

Предполагается, что учет влияния пограничного слоя приводит к сравнительно слабому изменению течения газа вне его, которое попрежнему можно считать одномерным.

Составим уравнения этого течения, для чего, интегрируя по площади поперечного сечения трубы радиуса R уравнения неразрывности, количества движения и энергии для осесимметрического случая

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_y r)}{\partial r} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) \tag{2}$$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}(H + {}^1/_2 v_x^2) + v_x\frac{\partial}{\partial x}(H + {}^1/_2 v_x^2) + v_y\frac{\partial}{\partial r}(H + {}^1/_2 v_x^2)\right] = \\ = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu r}{N_{\mathrm{Pr}}}\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu r v_x\frac{\partial v_x}{\partial r}\right] \tag{3}$$

справедливые как вне пограничного слоя, так и в нем, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R \rho r dr + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^R \rho v_x r dr = 0 \tag{4}$$

$$\int_0^R \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) r dr = -\frac{R^2}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + R\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)_{r=R} \tag{5}$$

$$\int_0^R \rho\left[\frac{\partial}{\partial t}(H+{}^1/_2 v_x^2)+v_x\frac{\partial}{\partial x}(H+{}^1/_2 v_x^2)+v_y\frac{\partial}{\partial r}(H+{}^1/_2 v_x^2)\right]rdr=$$

$$=\frac{R^2}{2}\frac{\partial p}{\partial t}+R\left(\frac{\mu}{N_{\mathrm{Pr}}}\frac{\partial H}{\partial r}\right)_{r=R} \qquad (6)$$

Здесь $v_x(t, x, r)$ и $v_y(t, x, r)$ обозначают составляющие скорости в направлениях соответственно параллельном и перпендикулярном стенке, $\rho(t, x, r)$ — плотность, $p(t, x)$ — давление, $H(t, x, r)$ — энтальпию, μ — коэффициент вязкости, N_{Pr} — число Прандтля.

В дальнейшем в случае необходимости индексами ∞, w, 0, u у букв будем обозначать параметры соответственно вне пограничного слоя, на стенке, в начальный момент и непосредственно за ударной волной.

Принимая во внимание специфику течений в пограничном слое и во внешней с ним области, уравнения (4)—(6) можно упростить:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho_\infty(R-\delta_\nu)^2}{2}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho_\infty v_{x\infty}(R-\delta_\nu)^2}{2}\right]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left[(R-\alpha\delta_\nu)\int_0^{\delta_\nu}\rho dy\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[(R-\alpha\delta_\nu)\int_0^{\delta_\nu}\rho v_x dy\right] \qquad (7)$$

$$\rho_\infty\left(\frac{\partial v_{x\infty}}{\partial t}+v_{x\infty}\frac{\partial v_{x\infty}}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p_\infty}{\partial x} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial S_\infty}{\partial t}+v_{x\infty}\frac{\partial S_\infty}{\partial x}=0 \qquad (9)$$

Здесь δ_ν — толщина пограничного слоя, S — энтропия, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $y=R-r$.

Пренебрегая в уравнении (7) квадратом величины (δ_ν/R) в сравнении с единицей, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\infty-2\rho_\infty\frac{\delta_\nu}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_\infty v_{x\infty}-2\rho_\infty v_{x\infty}\frac{\delta_\nu}{R}\right)=$$

$$=-\frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\delta_\nu}\rho dy-\frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_\nu}\rho v_x dy \qquad (10)$$

При определении характеристик формирующегося пограничного слоя на стенке последнюю считаем плоской пластиной, обтекаемой потоком с неизменными параметрами v_{x0}, p_0, ρ_0, H_0, S_0.

Тогда эти характеристики можно принять установившимися в системе координат, связанной с ударной волной, и воспользоваться следующими из работы [2] выражениями для них

$$d\eta=\frac{\rho}{\rho_0}dy, \qquad \delta_\eta=\int_0^{\delta_\nu}\frac{\rho}{\rho_0}dy, \qquad \frac{v_x}{v_{x0}}=\frac{3}{2}\frac{\eta}{\delta\eta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\delta\eta}\right)^3$$

$$\delta_\nu=A\left(\frac{H_w}{H_0},\ \frac{v_{x0}^2}{H_0},\ N_{\mathrm{Pr}}\right)\delta_\eta \qquad (11)$$

Зависимости (11) имеют место для случая $\mu\rho = \mathrm{const}$ и $H_w = \mathrm{const}$, который мы предположим выполняющимся. С использованием (11) уравнение (10) запишем так:

$$\left(\frac{\partial\rho_\infty}{\partial t} + \frac{\partial\rho_\infty v_{x\infty}}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{2\delta_\nu}{R}\right) = \frac{B\left[A\rho_\infty\left(U - v_{x\infty}\right) - \rho_0\left(U - {}^5/_8 v_{x0}\right)\right]}{R\sqrt{J}} \tag{12}$$

$$\delta_\eta = B\sqrt{J}, \qquad B = \left[\frac{8\mu_0}{\rho_0\left(U_0 - {}^{13}/_{35} v_{x0}\right)}\right]^{1/2}, \qquad J = \int_0^t U\,dt - x$$

Уравнения (12), (8), (9) для функций

$$\bar{\rho}_\infty = \frac{\rho_\infty}{\rho_0}, \qquad \bar{v}_\infty = \frac{v_{x\infty}}{U_0}, \qquad \bar{U} = \frac{U}{U_0}, \qquad \bar{p}_\infty = \frac{p_\infty}{\rho_0 U_0^2}, \qquad \bar{S}_\infty = \frac{S_\infty}{S_0}$$

в новых переменных

$$\bar{t} = \frac{U_0 t}{R}, \qquad \bar{s} = \frac{1}{R}\left(\int_0^t U\,dt - x\right)$$

преобразуем соответственно к следующему безразмерному виду:

$$\left[\frac{\partial\rho_\infty}{\partial t} + (U - v_\infty)\frac{\partial\rho_\infty}{\partial s} - \rho_\infty\frac{\partial v_\infty}{\partial s}\right]\left[1 - \frac{2AB_0\sqrt{s}}{\sqrt{N_{\mathrm{Re}}}}\right] =$$

$$= \frac{B_0}{\sqrt{N_{\mathrm{Re}}\,s}}\left[A\rho_\infty(U - v_\infty) - U + \frac{5}{8}\frac{v_{x0}}{U_0}\right] \tag{13}$$

$$\rho_\infty\left[\frac{\partial v_\infty}{\partial t} + (U - v_\infty)\frac{\partial v_\infty}{\partial s}\right] = \frac{\partial p_\infty}{\partial s}, \qquad \frac{\partial S_\infty}{\partial t} + (U - v_\infty)\frac{\partial S_\infty}{\partial s} = 0 \tag{14}$$

Здесь

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{\rho_0 U_0 R}{\mu_0}, \qquad B_0 = \sqrt{\frac{8}{1 - {}^{13}/_{35}\, v_{x0}/U_0}}$$

В уравнениях (13), (14) и далее черточки над буквами опущены.

Граничные условия для этих уравнений зададим на ударной волне при $s = 0$:

$$v_\infty = v_{\infty u}(t), \qquad p_\infty = p_{\infty u}(t), \qquad \rho_\infty = \rho_{\infty u}(t), \qquad S_\infty = S_{\infty u}(t) \tag{15}$$

Система уравнений (13), (14) при граничных условиях (15) может быть легко решена, если заметить, что входящая в них величина $\varepsilon = N_{\mathrm{Re}}^{-1/2}$ мала. Разлагая решения и граничные условия в ряды по малому параметру ε, будем иметь

$$U = 1 + \varepsilon U_{1u} + \ldots, \qquad \rho_\infty = 1 + \varepsilon\rho_1 + \ldots, \qquad S_\infty = 1 + \varepsilon S_1 + \ldots$$

$$v_\infty = \frac{v_{x0}}{U_0} + \varepsilon v_1 + \ldots, \qquad p_\infty = \frac{p_0}{\rho_0 U_0^2} + \varepsilon p_1 + \ldots \tag{16}$$

Система уравнений для первого приближения

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \left(1 - \frac{v_{x_0}}{U_0}\right)\frac{\partial\rho_1}{\partial s} - \frac{\partial v_1}{\partial s} = \frac{K}{\sqrt{s}} \tag{17}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \left(1 - \frac{v_{x0}}{U_0}\right)\frac{\partial v_1}{\partial s} = \frac{\partial p_1}{\partial s}, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left(1 - \frac{v_{x_0}}{U_0}\right)\frac{\partial S_1}{\partial s} = 0 \tag{18}$$

с граничными условиями

$$\rho_1 = \rho_{1u}(t), \qquad v_1 = v_{1u}(t), \qquad p_1 = p_{1u}(t), \qquad S_1 = S_{1u}(t) \qquad \text{при } s = 0 \tag{19}$$

имеет следующее решение:

$$S_1(t, s) = S_{1u}\left(t - \frac{s}{1 - v_{x0}/U_0}\right)$$

$$v_1(t, s) = \frac{2Ka_0^2\sqrt{s}}{(U_0 - v_{x0})^2 - a_0^2} + \frac{v_{1u}(\xi) + v_{1u}(\eta)}{2} + \frac{U_0}{2a_0}\left[p_{1u}(\xi) - p_{1u}(\eta)\right]$$

$$p_1(t, s) = \frac{2Ka_0^2(1 - v_{x0}/U_0)\sqrt{s}}{(U_0 - v_{x0})^2 - a_0^2} + \frac{p_{1u}(\xi) + p_{1u}(\eta)}{2} + \tag{20}$$

$$+ \frac{a_0}{2U_0}\left[v_{1u}(\xi) - v_{1u}(\eta)\right]$$

которое можно получить в характеристических переменных

$$\xi = t - \frac{s}{1 - v_{x0}/U_0 - a_0/U_0}, \qquad \eta = t - \frac{s}{1 - v_{x0}/U_0 + a_0/U_0}.$$

Здесь

$$K = B_0\left[A - 1 - v_{x0}(A - {}^5/_8)/U_0\right]$$

Заметим, что при $N_{\mathrm{Pr}} = 1$

$$K = B_0\left[-\frac{3}{8} + \left(1 - \frac{v_{x0}}{U_0}\right)\left(\frac{3}{8}\frac{H_w}{H_0} + \frac{39}{560}\frac{v_{x0}^2}{H_0}\right)\right]$$

Нахождение последующих приближений системы (13)—(15) нецелесообразно, так как исходные уравнения при данной постановке задачи могут содержать ошибку порядка N_{Re}^{-1}.

Полученные зависимости (20) позволяют провести анализ характера течения газа за ударной волной.

Предположим, что $u_{1u}(t) \equiv 0$, т. е. ударная волна движется все время с постоянной скоростью U_0. В этом случае скорость газовой частицы за достаточно интенсивной ударной волной может возрастать, так как

$$K < 0, \qquad (U_0 - v_{x0})^2 - a_0^2 < 0$$

Аналогичный вывод справедлив и для определенных законов затухания ударной волны ($u_{1u}(t) < 0$). В частности, такое заключение можно сделать о движении контактной поверхности за достаточно интенсивной ударной волной в ударной трубке.

Выразим p_{1u} и v_{1u} через u_{1u}:

$$p_{1u} = 2\beta u_{1u}, \qquad v_{1u} = \alpha u_{1u} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

Тогда формулы (20) можно упростить:

$$v_1(t, s) = \frac{2Ka_0^2\sqrt{s}}{(U_0 - v_{x0})^2 - a_0^2} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta U_0}{a_0}\right)u_{1u}(\xi) + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta U_0}{a_0}\right)u_{1u}(\eta)$$

$$p_1(t, s) = \frac{2Ka_0^2(1 - v_{x0}/U_0)\sqrt{s}}{(U_0 - v_{x0})^2 - a_0^2} + \left(\beta + \frac{\alpha a_0}{2U_0}\right)u_{1u}(\xi) + \left(\beta - \frac{\alpha a_0}{2U_0}\right)u_{1u}(\eta)$$

Для определения изменения скорости ударной волны необходимо знать связь давления со скоростью на контактной поверхности, что можно сделать после решения задачи о течении толкающего газа (с некоторым приближением можно считать эту связь такой же, как и без учета влияния пограничного слоя).

На контактной поверхности имеем

$$p_{1k} = -Nv_{1k} \qquad (N > 0)$$

Таким образом, для определения $u_{1n}(t)$ имеем уравнение

$$\frac{2Ka_0^2(1 - v_{x0}/U_0 + N)}{a_0^2 - (U_0 - v_{x0})^2}\sqrt{s_0 + \left(1 - \frac{v_{x0}}{U_0}\right)t} =$$

$$= \left[\beta + \frac{\alpha a_0}{2U_0} + N\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta U_0}{a_0}\right)\right] u_{1n}\left[\frac{a_0 t + s_0 U_0}{a_0 - U_0 + v_{x0}}\right] +$$

$$+ \left[\beta - \frac{\alpha a_0}{2U_0} + N\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta U_0}{a_0}\right)\right] u_{1n}\left[\frac{a_0 t - s_0 U_0}{a_0 + U_0 - v_{x0}}\right] \tag{21}$$

(s_0 — координата контактной поверхности при $t = 0$). При $s_0 = 0$ из (21) находим

$$u_{1n}(t) = C\sqrt{t}, \qquad v_{1k}(t) = D\sqrt{t} \tag{22}$$

$$C = 2GHKa_0^2(1 - v_{x0}/U_0 + N)\sqrt{1 - v_{x0}/U_0}$$

$$D = -2GHKa_0^2\left[\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta U_0}{a_0}\right)\sqrt{a_0(a_0 - U_0 + v_{x0})} -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta U_0}{a_0}\right)\sqrt{a_0(a_0 + U_0 - v_{x0})}\right]\sqrt{1 - v_{x0}/U_0}$$

$$G^{-1} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta U_0}{a_0}\right)\left(N + \frac{a_0}{U_0}\right)\sqrt{\frac{a_0}{a_0 - U_0 + v_{x0}}} +$$

$$+ \left(N - \frac{a_0}{U_0}\right)\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta U_0}{a_0}\right)\sqrt{\frac{a_0}{a_0 + U_0 - v_{x0}}}$$

$$H^{-1} = a_0^2 - (U_0 - v_{x0})^2$$

При этом $D > 0$, если $C < 0$.

Следовательно, полученное решение объясняет экспериментально наблюдавшееся в работе [1] явление увеличения скорости контактной поверхности при одновременном затухании скорости ударной волны. Кроме того, очевидно, что увеличение скорости ударной волны в первые моменты времени после раскрытия диафрагмы не может быть объяснено формированием пограничного слоя на стенках трубки.

Таким образом, для полного решения задачи о движении ударной волны в ударной трубке необходимо знать закон изменения скорости ударной волны в интервале времени от момента разрыва диафрагмы до $t = 0$, соответствовавшего окончанию процесса формирования течения за ударной волной. Решение для $t > 0$ выражается формулой (21).

Поступила 14 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Glass I. I., Patterson G. M. A theoretical and experimental study of shock-tube flows. J. A. S. No 2, 1953.
2. Демьянов Ю. А. Формирование пограничного слоя на пластине за движущимся скачком уплотнения. ПММ, т. XXI, вып. 3, 1957.