Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

С. В. Иорданский

(Москва)

Исследуется влияние произвольного малого возмущения гидродинамических величин за фронтом ударной волны, вызываемой плоским поршнем, движущимся с постоянной скоростью в однородной среде. В пункте 1 выводятся дифференциальное уравнение для возмущения давления и граничные условия. В пункте 2 выводится уравнение для возмущения поверхности фронта ударной волны. В пункте 3 получены условия устойчивости и асимптотический закон затухания возмущений для случая, когда газ простирается неограниченно за ударной волной. Полученные результаты не совпадают с результатами работы [1], где были выведены также условия устойчивости для возмущений более частного вида. В пункте 4 исследуется вопрос о влиянии отражений от поршня и получен асимптотический закон затухания. Устойчивость плоской ударной волны по отношению к малым искажениям формы поршня исследовалась в работе [2]; в настоящей работе этот вопрос не разбирается.

1. Предполагается, что на кривой Гюгонио выполняются неравенства

$$s > s_0, \quad v_0 > c_0, \quad v < c$$

где s, v, c — соответственно энтропия, скорость газа в системе координат, движущейся с ударной волной, и скорость звука. Индекс 0 относится к величинам перед фронтом. Влияние возмущений рассматривается в линейной постановке. Тогда в системе координат, движущейся с поршнем, будут справедливы уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -V \operatorname{grad} \pi, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{c^2}{V} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь V — невозмущенный удельный объем, π, $\mathbf{u}$, σ — малые возмущения давления, скорости и энтропии за фронтом ударной волны.

Направим ось x по нормали к поршню (ударная волна движется в сторону отрицательных x), тогда уравнение поверхности фронта будет

$$x = -vt + \zeta(y, \ z, \ t)$$

где ζ — возмущение поверхности фронта. При $t = 0$ заданы начальные данные π_0, u_0, σ_0, положение поршня $x = l$ и ударной волны $x = 0$.

Возмущения можно разложить на компоненты Фурье по координатам y, z. В дальнейшем будем считать, что возмущения просто пропорциональны e^{iky} (зависимость от z может быть учтена тривиально).

Из уравнений (1.1) можно получить уравнение для одного π:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + k^2 c^2 \pi = 0 \tag{1.2}$$

Граничные условия на ударной волне в линейном приближении (см., например, [1]) будут

$$u_y = (v_0 - v)\, ik\zeta, \qquad -\frac{2}{v_0}\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\pi}{p - p_0} + \frac{\tau}{V_0 - V}$$
$$u_x = \frac{v - v_0}{2}\left(\frac{\pi}{p - p_0} - \frac{\tau}{V_0 - V}\right), \qquad \pi = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_H \tau \tag{1.3}$$

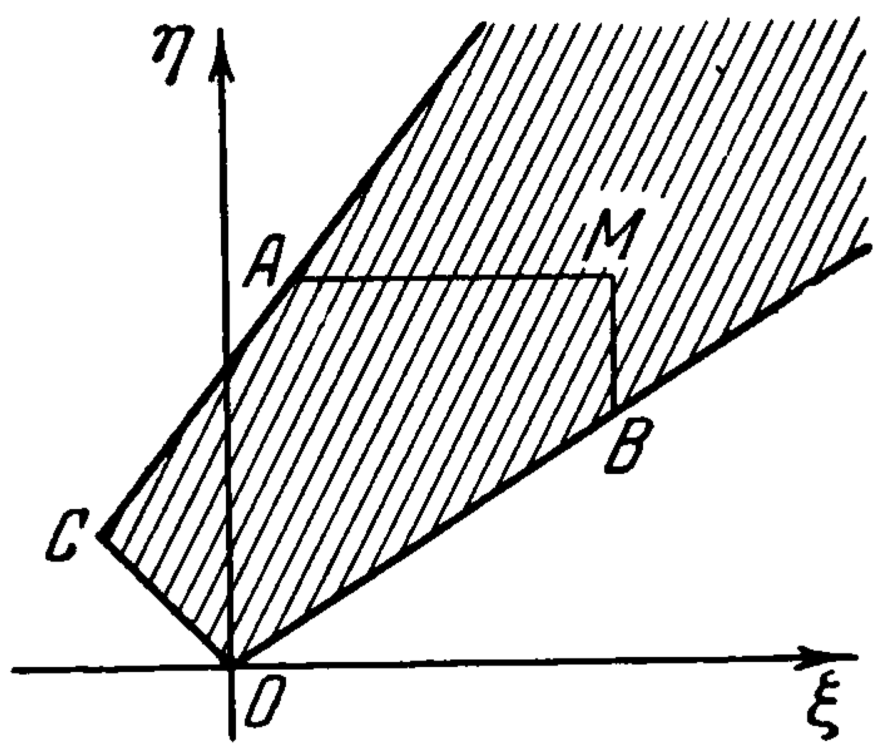
Здесь p — невозмущенное давление, τ — возмущение удельного объема, индекс H у производной означает дифференцирование вдоль кривой Гюгонио. Продифференцируем выражение (1.3) для u_x вдоль пути ударной волны; тогда из (1.1) и остальных уравнений (1.3) получим

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial \pi}{\partial t} = \frac{v - v_0}{vV}\,\frac{1 - j}{1 + j}\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{k^2}{V}(v_0 - v)\, v\zeta, \qquad \pi = -\frac{2(p - p_0)}{v_0(1 + j)}\frac{d\zeta}{dt} \tag{1.4}$$

Здесь

$$j = \frac{p - p_0}{V_0 - V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H, \qquad x = -vt$$

Так как на поршне $u_x = 0$, то $\partial\pi / \partial x = 0$ при $x = l$. При $t = 0$ задано не только π_0, но и в силу уравнений (1.1) и начальных условий задана также $[\partial\pi / \partial t]_0$.



Фиг. 1

Для рассмотрения удобно ввести симметричную относительно прямой $x = l$ ударную волну и продолжить начальные данные четным образом:

$$\pi_0(x) = \pi_0(2l - x)$$

$$\left[\frac{\partial \pi(x)}{\partial t}\right]_0 = \left[\frac{\partial \pi(2l - x)}{\partial t}\right]_0$$

Тогда в силу симметрии уравнения (1.2) и граничных условий на ударных волнах $\pi(x, t) = \pi(2l - x, t)$ и условие на поршне выполняется автоматически.

2. Введем характеристические переменные

$$\xi = ct - x, \qquad \eta = ct + x$$

Тогда уравнение (2.1) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{k^2}{4}\pi = 0 \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) выполняется в области, заштрихованной на фиг. 1. Уравнения пути левой ударной волны OB и правой AC будут соответственно

$$\eta = \frac{c - v}{c + v}\,\xi, \qquad \eta = \frac{c + v}{c - v}(\xi + 2l) + 2l$$

Воспользуемся формулой Римана, выражающей $\pi(M)$ по значениям π и $\partial\pi / \partial n$ на контуре $ACOB$:

$$2\pi(M) = \pi(A)R(A) + \pi(B)R(B) + \int\limits_{ACOB}\left\{\left(\frac{\partial \pi}{\partial \xi}R - \pi\frac{\partial R}{\partial \xi}\right)d\xi - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial \pi}{\partial \eta}R - \pi\frac{\partial R}{\partial \eta}\right)d\eta\right\} \tag{2.2}$$

Здесь R — функция Римана, которая для (2.1) имеет вид:

$$R = J_0(k\sqrt{(\eta_0-\eta)(\xi_0-\xi)})$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, ξ_0, η_0 — координаты точки M_0.

Совмещая точки M с B, получим

$$\pi(B) = \pi(A) + \int\limits_{ACOB} \left\{\left(\frac{\partial \pi}{\partial \xi} - \frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial \pi}{\partial \eta}\right)R - \pi\left(\frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial R}{\partial \eta}\right)\right\} d\xi \tag{2.3}$$

Отсюда, используя условия (1.4) на OB и симметрию π, после замены переменной интегрирования в интеграле по AC получим для ζ следующее уравнение:

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{d\zeta}{ds}\bigg|_\Gamma - \mu\int\limits_0^\infty U(s-w)J_0(s-w)\left(\frac{d^2\zeta}{dw^2}+\nu\zeta\right)dw +$$
$$+\int\limits_0^\infty U(s-a-b)\left\{\alpha f_1 J_0'(f)\frac{d\zeta}{dw} - \mu J_0(f)\left(\frac{d^2\zeta}{dw^2}+\nu\zeta\right)\right\}dw + F \tag{2.4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{c-v}{c+v}, \quad s = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}k\xi_0, \quad \mu = \frac{c}{2v}(1-j), \quad \nu = \frac{vv_0}{c^2-v^2}\frac{1+j}{1-j} \tag{2.5}$$

$$L = \frac{2lk}{\sqrt{\alpha}}, \qquad \Gamma = \alpha s - L$$

$$f = \sqrt{(s-a)^2-b^2}, \qquad f_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s-a-b}{s-a+b}} + \frac{1}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{s-a+b}{s-a-b}}$$

$$a = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}w + L\frac{1-\alpha}{2}, \qquad b = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}w + L\frac{1+\alpha}{2} \tag{2.6}$$

Кроме того, U означает единичную функцию

$$U(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho > 0 \\ 0 & \text{при } \rho < 0 \end{cases}$$

Функция F является известной функцией s, зависящей от начальных данных:

$$F = \frac{1+j}{2(p-p_0)}\frac{v_0}{k^2(c-v)}\left\{-k\sqrt{\alpha}\,\pi_0 + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^\infty U(s-d-g)\left[\frac{1}{c}\frac{\partial \pi}{\partial t}\bigg|_0 J_0(f_2) + \pi_0 f_3 J_0'(f_2)\right]dw\right\} \tag{2.7}$$

Здесь

$$f_2 = \sqrt{(s-d)^2-g^2}, \qquad f_3 = -\frac{k}{2\sqrt{\alpha}}\left[\sqrt{\frac{s-d-g}{s-d+g}} + \alpha\sqrt{\frac{s-d+g}{s-d-g}}\right]$$

$$d = \frac{1-\alpha}{2\alpha}w, \qquad g = \frac{1+\alpha}{2\alpha}w \tag{2.8}$$

Кроме того, начальные данные и ζ продолжены так, что

$$\pi_0 = [\partial\pi/\partial t]_0 \equiv 0 \quad \text{при } s > L; \qquad \zeta \equiv 0 \quad \text{при } s < 0$$

Решение уравнения (2.4) определяет поведение возмущения поверхности ударной волны со временем. Зная решение (2.4), можно определить π и $\partial\pi/\partial n$ на ударной волне и по ним при помощи формулы Римана можно найти π в области между поршнем и ударной волной. В дальнейшем будет исследоваться поведение решения уравнения (2.4):

3. Рассмотрим случай, когда $l=\infty$, а начальные возмущения обращаются в нуль при $x>h$.

Тогда (2.4) сводится к более простому уравнению:

$$\frac{d\zeta}{ds}=-\mu\int_0^\infty U(s-w)J_0(s-w)\left(\frac{d^2\zeta}{dw^2}+\nu\zeta\right)dw+F \tag{3.1}$$

В силу предположения о начальных данных верхний предел интеграла, входящего в F, ограничен числом $m(h)$.

Применяя к уравнению (3.1) преобразование Лапласа, получим

$$X(p)=\frac{\sqrt{p^2+1}}{p\sqrt{p^2+1}+\mu(p^2+\nu)}\Phi(p) \tag{3.2}$$

Здесь X и Φ — изображения функции ζ и F соответственно. Для изображения функции F найдем

$$\Phi=\int_0^\infty e^{-ps}Fds=\frac{1+j}{2(p-p_0)}\frac{v_0}{k^2(c-v)}(\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3)$$

Здесь

$$\Phi_1=-k\sqrt{\alpha}\int_0^\infty e^{-ps}\pi_0 ds=-k\sqrt{\alpha}\int_0^m e^{-ps}\pi_0 ds \qquad (q=\sqrt{p^2+1})$$

$$\Phi_2=\int_0^\infty e^{-ps}\int_0^\infty U(s-d-g)\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\pi}{\partial t}\right]_0 J_0(f_2)\,dwds=\int_0^m\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\pi}{\partial t}\right]_0\frac{\exp(-dp-gq)}{q}dw$$

$$\Phi_3=\frac{k}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^m \pi_0 e^{-pd}\left\{\left[(1-\alpha)+(1+\alpha)\frac{p}{q}\right]e^{-gq}-2\alpha e^{-gp}\right\}dw$$

При этом использованы известные операционные соотношения (см., например, [3]).

При помощи формулы обращения для ζ получим

$$\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{qe^{ps}}{pq+\mu(p^2+\nu)}\Phi(p)\,dp$$

Поведение ζ при больших s в силу свойств начальных данных будет определяться асимптотикой трех следующих интегралов:

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{qe^{ps}}{pq+\mu(p^2+\nu)}dp,\qquad I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{p(s-d)-gq}}{pq+\mu(p^2+\nu)}dp$$

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{k}{2\sqrt{\alpha}}\,\frac{[(1-\alpha)q+(1+\alpha)p]e^{-gq}-2\alpha qe^{-gp}}{pq+\mu(p^2+\nu)}e^{p(s-d)}\,dp$$

При этом величины d и g остаются ограниченными при возрастании s.

Главный член в асимптотическом разложении совпадает с точностью до постоянного множителя для всех трех интегралов, и для простоты в дальнейшем будем рассматривать только I_2.

После замены переменной интегрирования и перехода к контуру C, состоящему из единичной окружности, получим

$$I_2 = \sum \operatorname{res} \varphi + \int\limits_C \frac{2(z^2+1)}{R(z)} e^{\gamma(z)} dz$$

Здесь

$$z = p + \sqrt{p^2+1}, \qquad \gamma = (s-d)\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) - g\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{3.3}$$

$$R(z) = (1+\mu) z^4 + 2\mu(2\nu - 1) z^2 - (1-\mu)$$

$\sum \operatorname{res} \varphi$ обозначает сумму вычетов подынтегрального выражения в полюсах, лежащих вне единичного круга. Асимптотика интеграла по единичной окружности легко находится методом перевала. Окончательно имеем формулу

$$I_2 = \sum \operatorname{res} \varphi + \begin{cases} \dfrac{M}{s\sqrt{s}} \sin(s+\delta) & \text{при } R(\pm i) \neq 0 \\ \dfrac{M}{\sqrt{s}} \sin(s+\delta) & \text{при } R(\pm i) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

величины M и δ не зависят от s.

Поведение ζ согласно формуле (3.4) будет определяться положением нулей биквадратного уравнения

$$R(z) = (1+\mu) z^4 + 2\mu(2\nu - 1) z^2 - (1-\mu) = 0 \tag{3.5}$$

Имеются согласно формуле (3.4) следующие случаи поведения ζ.

А. *Все нули* (3.5) *внутри единичного круга.* Для этого необходимо и достаточно, чтобы:

либо $\mu = -1$ и $|2\nu - 1| > 1$ или согласно (2.5)

$$\frac{p-p_0}{V_0 - V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H = 1 + \frac{2v}{c}$$

либо $\mu > 0$ и $|2\nu - 1| < 1$, т. е.

$$-1 < \frac{p-p_0}{V_0 - V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < \frac{c^2 - v^2 - vv_0}{c^2 - v^2 + vv_0} \tag{3.6}$$

В случае А функция ζ убывает как $s^{-3/2}$.

В. *Два чисто мнимых нуля вне единичного круга.* Для этого необходимы и достаточны неравенства

$$-\frac{\mu(2\nu-1)}{1+\mu} < 0, \qquad |2\nu - 1| > 1$$

или согласно (2.5)

$$\frac{c^2 - v^2 - vv_0}{c^2 - v^2 + vv_0} < \frac{p-p_0}{V_0 - V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < 1 + \frac{2v}{c}$$

В этом случае ζ колеблется, не убывая с ростом s.

Случай, когда все четыре нуля (3.5) лежат вне единичного круга, невозможен, так как необходимые неравенства $\mu>0$ и $|2\nu-1|<1$ не выполняются ввиду выражений (2.5).

С. *Два корня* $\pm i$. Это будет при

$$\frac{p-p_0}{V_0-V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H=\frac{c^2-v^2-vv_0}{c^2-v^2+vv_0}$$

В этом случае ζ убывает как $s^{-1/2}$.

D. *Корень с положительной действительной частью.* Для этого должно быть:

$$\frac{p-p_0}{V_0-V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H>1+\frac{2v}{c} \quad \text{либо} \quad \frac{p-p_0}{V_0-V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H<-1$$

В случае D функция ζ экспоненциально растет со временем.

Полученные результаты не совпадают с результатами [1] для случаев А и В.

4. В случае, когда поршень находится на конечном расстоянии от ударной волны, будем рассматривать только кривые Гюгонио, удовлетворяющие неравенствам (3.6).

Применим преобразование Лапласа к уравнению (2.4). Кроме преобразований Лапласа, уже вычисленных в пункте 3, нужно вычислить

$$A=\int_0^\infty e^{-ps}\left[\frac{d\zeta}{ds}\right]_\Gamma ds=\frac{p}{\alpha^2}e^{-pL}X\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

$$B=\alpha\int_0^\infty e^{-ps}\int_0^\infty U(s-a-b)f_1J_0'(f)\frac{d\zeta}{dw}dwds$$

$$C=-\mu\int_0^\infty e^{-ps}\int_0^\infty U(s-a-b)J_0(f)\left[\frac{d^2\zeta}{dw^2}+\nu\zeta\right]dwds$$

Изменяя порядок интегрирования и пользуясь известными операционными соотношениями, получим

$$B=-\frac{p}{\alpha^2}e^{-pL}X\left(\frac{p}{\alpha}\right)+\frac{\varphi\psi}{q}e^{-\theta}X(\varphi), \qquad C=-\frac{\mu(\varphi^2+\nu)}{q}e^{-\theta}X(\varphi)$$

где

$$\varphi=\frac{1}{2\alpha}[(1+\alpha^2)p+(1-\alpha^2)q]$$

$$\psi=\frac{1}{2\alpha}[(1-\alpha^2)p+(1+\alpha^2)q]$$

$$\theta=\frac{1}{2}L[(1-\alpha)p+(1+\alpha)q]$$

Таким образом, после преобразования Лапласа получим из (2.4):

$$X(p)=\frac{\varphi\psi-\mu(\varphi^2+\nu)}{pq+\mu(p^2+\nu)}e^{-\theta}X(\varphi)+\frac{q}{pq+\mu(p^2+\nu)}\Phi(p) \tag{4.1}$$

Удобно перейти к переменной z, согласно (3.3), тогда

$$X(z)=\lambda(z)\{\exp[-\theta(z)]\}X\left(\frac{z}{\alpha}\right)+\omega(z) \tag{4.2}$$

Здесь введены обозначения

$$\lambda=\frac{\varphi\psi-\mu(\varphi^2+\nu)}{R(z)}4z^2, \qquad \omega=\frac{2z(z^2+1)}{R(z)}\Phi(z)$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha}-\frac{\alpha}{z}\right),\quad \psi=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha}+\frac{\alpha}{z}\right),\quad \theta=\frac{1}{2}L\left(z+\frac{\alpha}{z}\right) \tag{4.3}$$

Уравнение (4.2) можно решить методом итераций:

$$X_0=\omega(z),\qquad X_1=\lambda(z)\{\exp[-\theta(z)]\}\,\omega\left(\frac{z}{\alpha}\right)+\omega(z)\qquad \text{и т. д.}$$

Окончательно получим решение (4.2) в виде ряда

$$X=\omega(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\prod_{r=0}^{n-1}\lambda(\alpha^{-r}z)\exp[-\theta(\alpha^{-r}z)]\right\}\omega(\alpha^{-n}z)$$

Пользуясь интегралом обращения, найдем

$$\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta_n$$

где

$$\zeta_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\exp\frac{s}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\left\{\prod_{r=0}^{n-1}\lambda(\alpha^{-r}z)\exp[-\theta(\alpha^{-r}z)]\right\}\times$$

$$\times\,\omega(\alpha^{-n}z)\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)dz \tag{4.4}$$

Так как

$$\prod_{r=0}^{n-1}\exp[-\theta(\alpha^{-r}z)]=\exp\left[-\frac{L}{2}\left(\frac{1-\alpha^{-n}}{1-\alpha^{-1}}z+\frac{\alpha}{z}\frac{1-\alpha^{n}}{1-\alpha}\right)\right] \tag{4.5}$$

и $L(1-\alpha^{-n})/(1-\alpha^{-1})>s$ при достаточно большом n (согласно (2.5) $\alpha<1$), то соответствующие члены ряда равны нулю, в чем легко можно убедиться, неограниченно смещая в (4.4) контур интегрирования в правую полуплоскость. Функция Φ та же, что и найденная в разделе 3, если положить $h=2l$.

Интеграл, определяющий ζ_n, распадается на сумму интегралов, содержащих соответственно Φ_1, Φ_2 и Φ_3. Асимптотика каждого из этих интегралов находится совершенно одинаково. Покажем, как вычисляется асимптотика интеграла с Φ_1:

$$Q_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\exp\frac{s}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\left\{\prod_{r=0}^{n-1}\lambda(\alpha^{-r}z)\exp[-\theta(\alpha^{-r}z)]\right\}\frac{\Phi_1(\alpha^{-n}z)(z^2+1)}{2z^2M(\alpha^{-n}z)}dz$$

Здесь $M(z)=R(z)/2z(z^2+1)$ и опущен несущественный постоянный множитель. Будем считать, что π_0 имеет ограниченную первую производную по s внутри промежутка $0\leqslant s\leqslant L$; тогда

$$\Phi_1=\int_0^{\infty}e^{-ps}\pi_0 ds=\frac{1}{p}\pi_0(0)(1-e^{-pL})+\frac{1}{p}\int_0^{L}e^{-ps}\frac{d\pi_0}{ds}ds \tag{4.6}$$

Пользуясь тем, что выполнены неравенства (3.6), после замены контура интегрирования на единичную окружность C и интегрирования по частям получим, что вычисление сводится к вычислению трех интегралов вида

$$T_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\exp s\left(a_nz-\frac{b_n}{z}\right)\right]f_n(z)dz\qquad \left(f_n=\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{1}{\alpha}\right)^n\frac{N_n(z)}{sz^2}\right)$$

где согласно формулам (4.3) и (4.5) N_n, $a_n(s)$, $b_n(s)$ — равномерно ограниченные по модулю функции при всех n для s и z, по модулю больших единицы. Кроме того, $a_n<b_n$.

Для примера выпишем a_n, b_n и f_n для одного из интегралов T_n:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{L}{s}\frac{1-\alpha^{-n}}{1-\alpha^{-1}}\right), \qquad b_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{L}{s}\frac{1-\alpha^{n}}{1-\alpha}\right)$$

$$f_n = \frac{1}{s}\left\{\prod_{r=0}^{n-1}\lambda(\alpha^{-r}z)\right\}\frac{1}{M(\alpha^{-n}z)\,p(\alpha^{-n}z)}\left\{-\frac{L}{2}\left(\frac{1-\alpha^{-n}}{1-\alpha^{-1}} - \frac{\alpha}{z^2}\frac{1-\alpha^{n}}{1-\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dz}\ln\left[\prod_{r=0}^{n-1}\lambda(\alpha^{-r}z)\frac{1}{M(\alpha^{-n}z)\,p(\alpha^{-n}z)}\right]\right\}$$

В случае, когда $s\sqrt{a}$ велико, асимптотика T легко находится методом перевала, оказывается

$$T \sim \sqrt{\frac{\pi\sqrt{b}}{sa\sqrt{a}}}\left\{f\left(i\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\exp 2i\left(s\sqrt{ab} - \frac{\pi}{8}\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(-i\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\exp 2i\left(\frac{\pi}{8} - s\sqrt{ab}\right)\right\} \tag{4.7}$$

Если $s\sqrt{a}$ ограничено, то, взяв за контур интегрирования в T окружность C' радиуса $\sqrt{ba^{-1}} > 1$, получим оценку

$$|T_n| \leqslant \int_{C'} |f_n|\, dl < \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{1}{\alpha}\right)^n \frac{1}{s^2}\,\mathrm{const} \tag{4.8}$$

Асимптотика других интегралов, входящих в ζ_n, аналогична асимптотике T и не меняет закона убывания ζ.

Таким образом, ζ согласно (4.7), (4.8) может быть записана в виде

$$\zeta = \sum_{n=1}^{k(s)} \beta^n \frac{1}{s\sqrt{s}} N_n(s) \qquad \left(\beta = \frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{1}{\alpha}\right)$$

Здесь $N_n(s)$ — равномерно ограниченные функции s.

Согласно (3.6) величина μ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{c}{v} > \mu > \frac{cv_0}{c^2 - v^2 + vv_0} \qquad \text{или} \qquad \frac{c}{v} > \mu > \frac{v}{c}$$

так как

$$\frac{cv_0}{c^2 - v^2 + vv_0} - \frac{v}{c} = \frac{(c^2 - v^2)(v_0 - v)}{c^2 - v^2 + vv_0} > 0$$

Поэтому $|\beta| < 1$ и

$$\zeta = s^{-3/2} N(s)$$

Здесь $N(s)$ — ограниченная при больших s функция.

Таким образом, при выполнении неравенства (3.6) устойчивость имеет место и при наличии отражений от поршня и закон затухания остается тем же, что и в разделе А пункта 3. Автор считает своим долгом поблагодарить М. А. Лаврентьева и Л. В. Овсянникова за советы при выполнении этой работы.

Поступила 12 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн. ЖЭТФ, т. 27, вып. 3, 1954.
2. Freeman. A theory of stability of plane shockwave. Proc. Roy. Soc., vol. 233 A, 1174, 1955.
3. Лаврентьев М. А., Шабат В. В. Методы теории функций комплексного переменного. ГИТТЛ, 1951.