Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ГАЗОВЫХ СТРУЙ

С. В. Фалькович

(Саратов)

В работе «О газовых струях» Чаплыгин [1] дал метод, позволяющий получить точное решение задачи о плоском, безвихревом, адиабатическом течении газа в области, ограниченной прямолинейными стенками и свободными поверхностями (струями), на которых скорость сохраняет постоянное значение, не превышающее скорости звука. Метод Чаплыгина, однако, не применим к решению всех струйных течений газа, а применим лишь к таким струйным задачам, в которых имеется только одна заданная характерная скорость. В настоящей работе показывается, каким образом это ограничение может быть снято, что дает возможность получить ряд новых частных точных решений струйного дозвукового потока газа.

§ 1. Уравнения плоского, безвихревого, адиабатического движения газа, как показал Чаплыгин, могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=-\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{1.1}$$

Здесь φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, θ — угол, образуемый вектором скорости с осью x, выбранной произвольно в потоке,

$$\tau=\frac{v^2}{v_{\max}^2}, \qquad \beta=(\varkappa-1)^{-1}$$

После определения $\varphi=\varphi(\theta,\tau)$ и $\psi=\psi(\theta,\tau)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1), переход на плоскость потока производится по формуле

$$d(x+iy)=\frac{e^{i\theta}}{v}\left[d\varphi+i(1-\tau)^{-\beta}d\psi\right] \tag{1.2}$$

Полагая в (1.2) согласно (1.1)

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}d\tau=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}d\theta-\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\tau$$

получим

$$d(x+iy)=\frac{e^{i\theta}(1-\tau)^{-\beta}}{v}\left[\left(2\tau\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+i\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)d\theta+\left(-\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)\right.$$

Разделяя действительную и мнимую части и интегрируя, имеем

$$x=\frac{(1-\tau)^{-\beta}}{v}\int\left(2\tau\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\sin\theta\right)d\theta+x_0(\tau) \tag{1.3}$$

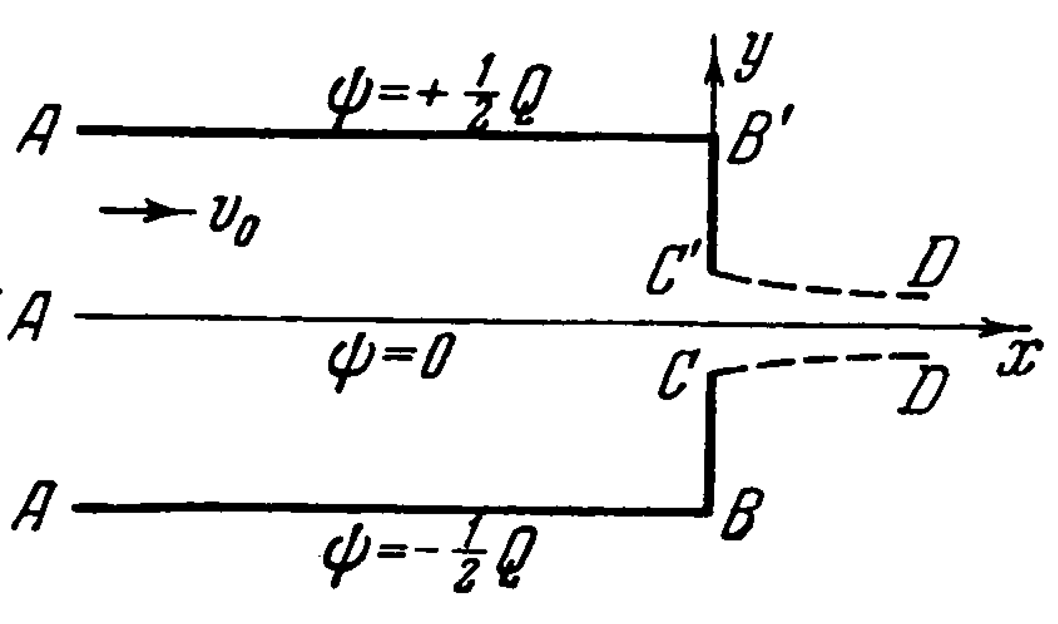
$$y=\frac{(1-\tau)^{-\beta}}{v}\int\left(2\tau\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cos\theta\right)d\theta+y_0(\tau) \tag{1.4}$$

Исключая из уравнений (1.1) потенциал скорости φ, получим для функции тока ψ уравнение

$$4\tau^2(1-\tau)\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+4\tau\left[1+(\beta-1)\tau\right]\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\left[1-(2\beta+1)\tau\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0 \tag{1.5}$$

являющееся основным в методе Чаплыгина.

§ 2. В качестве примера рассмотрим истечение газа с дозвуковой скоростью v_1 на струе из прямоугольного сосуда конечной ширины H через отверстие размером h (фиг. 1). Пусть функция тока ψ вдоль верхней границы потока $AB'C'D'$ принимает значение $\psi = +{}^1/_2 Q$ и вдоль нижней границы $ABCD$ значение $\psi = -{}^1/_2 Q$. Обозначим через v_0 скорость газа далеко от отверстия внутри сосуда.



Фиг. 1

В плоскости годографа скорости с полярными координатами θ, τ всей области, занятой потоком, будет соответствовать полукруг радиуса $\tau_1 = v_1^2/v_{\max}^2$ с разрезом длины $\tau_0 = v_0{}^2/v_{\max}^2$ вдоль луча $\theta = 0$ (фиг. 2), на которой соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами. Значения, которые функция тока ψ должна принимать вдоль границ области годографа, будут следующие:

$$\psi = -\tfrac{1}{2}Q \quad \text{при } \tau = \tau_1, \quad 0 < \theta \leqslant +\tfrac{1}{2}\pi \tag{2.1}$$

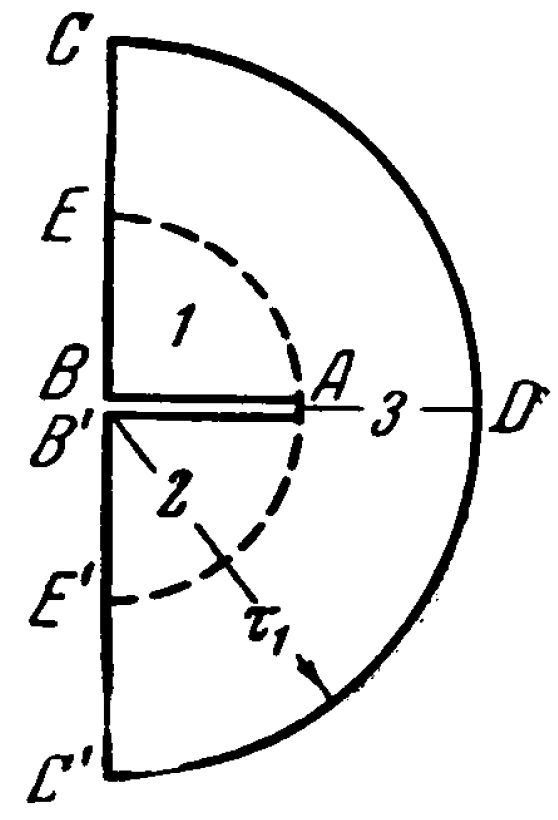
$$\psi = -\tfrac{1}{2}Q \quad \text{при } \tau_1 \geqslant \tau \geqslant 0, \quad \theta = +\tfrac{1}{2}\pi \tag{2.2}$$

$$\psi = -\tfrac{1}{2}Q \quad \text{при } 0 \leqslant \tau < \tau_0, \quad \theta = +0 \tag{2.3}$$

$$\psi = +\tfrac{1}{2}Q \quad \text{при } \tau = \tau_1, \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0 \tag{2.4}$$

$$\psi = +\tfrac{1}{2}Q \quad \text{при } \tau_1 \geqslant \tau \geqslant 0, \quad \theta = -\tfrac{1}{2}\pi \tag{2.5}$$

$$\psi = +\tfrac{1}{2}Q \quad \text{при } 0 \leqslant \tau < \tau_0, \quad \theta = -0 \tag{2.6}$$



Фиг. 2

Таким образом, определение потока сводится к нахождению интеграла уравнения (1.5), определенного в области, представляющей полукруг радиуса τ_1 с разрезом длиной τ_0, идущим из начала координат вдоль луча $\theta = 0$, и принимающего заданные значения (2.1)—(2.6) на границах области, т. е. к задаче Дирихле для уравнения С. А. Чаплыгина (1.5).

Заметим, что так как $\tau_1 < 1/(2\beta + 1)$, то в рассматриваемой области это уравнение будет эллиптического типа.

Проведем дугу окружности EAE' радиуса $\tau = \tau_0$, обозначенную на фиг. 2 пунктиром, тогда область, в которой ищется решение, разобьется на три подобласти (1), (2), (3), указанные на фиг. 2.

Будем искать решение уравнения (1.5) в областях (1) и (2) соответственно в виде

$$\psi^{(1)}(\theta, \tau) = -\frac{Q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n(\tau) \sin 2n\theta \tag{2.7}$$

$$\psi^{(2)}(\theta, \tau) = +\frac{Q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n(\tau) \sin 2n\theta \tag{2.8}$$

Здесь $z_n(\tau)$ есть интеграл уравнения

$$\tau^2(1-\tau) z_n'' + \tau[1 + (\beta - 1)\tau] z_n' - n^2[1 - (2\beta + 1)\tau] z_n = 0 \tag{2.9}$$

ограниченный при $\tau=0$; как известно[1],

$$z_n(\tau)=\tau^n F(a_n,\ b_n,\ 2n+1,\ \tau)$$

где $F(a_n,\ b_n,\ 2n+1,\ \tau)$ — гипергеометрический ряд, а количества a_n и b_n определяются из уравнений

$$a_n+b_n=2n-\beta, \qquad a_nb_n=-\beta n(2n+1)$$

В качестве второго линейно независимого интеграла уравнения (2.9) в дальнейшем будем рассматривать, следуя Черри[2], функцию $\zeta_n(\tau)$:

$$\zeta_n(\tau)=\lim_{\nu\to -n}\left[Z_\nu(\tau)-\frac{(\nu-1)\,h_\nu\tau^{-\nu}F(a_\nu+2\nu,\ b_\nu+2\nu,\ 1-2\nu,\ \tau)}{(\nu+1)(\nu+n)}\right]$$

Здесь

$$h_\nu=\frac{(a_\nu-1)(a_\nu-2)\ldots(a_\nu-n)(1-b_\nu)\ldots(\nu-b_\nu)}{\nu!\,(\nu+1)!}$$

Для дальнейшего существенно, что вронскиан этих интегралов

$$W(Z_n,\ \zeta_n)=n\frac{(1-\tau)^\beta}{\tau}$$

Выражение (2.7) для $\psi^{(1)}(\theta,\ \tau)$ удовлетворяет граничным условиям (2.3) и (2.2) на отрезке $B'E'$, а выражение (2.8) для $\psi^{(2)}(\theta,\ \tau)$ — условиям (2.6) и (2.5) на отрезке BE (фиг. 2). Коэффициенты a_n подлежат определению.

В области (3), представляющей полукольцо $CDC'E'AEC$, функцию ψ, удовлетворяющую уравнению (1.5), будем искать в виде

$$\psi(3)(\theta,\ \tau)=-\frac{Q}{\pi}\theta+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nZ_n(\tau)+B_n\zeta_n(\tau)]\sin 2n\theta \tag{2.10}$$

Это выражение удовлетворяет граничным условиям (2.2) и (2.5) на отрезках CE и $C'E'$ соответственно (фиг. 2). Удовлетворяя граничным условиям (2.1) и (2.2) на дуге CDC' $(\tau=\tau_1)$, получим

$$\frac{Q}{\pi}\theta\mp\frac{Q}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}[A_nZ_n(\tau)+B_n\zeta_n(\tau)]\sin 2n\theta \tag{2.11}$$

Здесь знак минус берется при $\theta>0$ и знак плюс при $\theta<0$. Левую часть уравнения (2.10) можно представить в интервале $-{}^1/_2\pi\leqslant\theta\leqslant+{}^1/_2\pi$ в виде ряда Фурье

$$\frac{Q}{\pi}\theta\mp\frac{Q}{2}=-\frac{Q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\theta}{n} \tag{2.12}$$

Сопоставляя (2.11) и (2.10), получим уравнение для определения коэффициентов A_n и B_n:

$$A_nZ_n(\tau_1)+B_n\zeta_n(\tau_1)=-\frac{Q}{\pi n} \tag{2.13}$$

Потребуем теперь, чтобы $\psi^{(3)}(\theta,\ \tau)$, определяемая уравнением (2.10), являлась аналитическим продолжением функций (2.7) и (2.8) в областях (1) и (2) в область (3) $\tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_1$, $-{}^1/_2\pi\leqslant\theta\leqslant+{}^1/_2\pi$.

Для этого на дуге EAE' должны выполняться следующие условия:

$$\psi^{(3)}(\theta,\tau_0)=\psi_I^{(1)}(\theta,\ \tau_0),\qquad \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial\tau}=\frac{\partial\psi_I}{\partial\tau}\qquad (0\leqslant\theta\leqslant+{}^1/_2\pi)$$

$$\psi^{(3)}(\theta,\tau_0)=\psi^{(2)}(\theta,\ \tau_0),\qquad \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial\tau}=\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\tau}\qquad (0\geqslant\theta\geqslant-{}^1/_2\pi)$$

Подставляя в эти условий выражения (2.7), (2.8) и (2.9), имеем

$$\mp\frac{Q}{2}+\frac{Q}{\pi}\theta=\sum_{n=1}^{\infty}[(A_n-a_n)Z_n(\tau_0)+B_n\zeta_n(\tau_0)]\sin 2n\theta\qquad \begin{pmatrix}-\text{при }\theta>0\\+\text{при }\theta<0\end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nZ_n'(\tau_0)\sin 2n\theta=\sum_{n=1}^{\infty}[A_nZ_n'(\tau_0)+B_n\zeta_n(\tau_0)]\sin 2n\theta$$

В силу (2.11) первое из условий примет вид:

$$(A_n-a_n)Z_n(\tau_0)+B_n\zeta_n(\tau_0)=-\frac{Q}{\pi n}\tag{2.14}$$

а из второго следует, что

$$(A_n-a_n)Z_n'(\tau_0)+B_n\zeta_n'(\tau_0)=0\tag{2.15}$$

Система уравнений (2.13), (2.14) и (2.15) определяет неизвестные коэффициенты A_n, B_n и a_n. Решая совместно эти уравнения, найдем

$$A_n=-\frac{Q}{\pi n}\left(1-\frac{\zeta_n(\tau_1)Z_n'(\tau_0)}{W(\tau_0)}\right)\frac{1}{Z_n(\tau_1)},\qquad B_n=-\frac{Q}{\pi n}\frac{Z_n'(\tau_0)}{W(\tau_1)}$$

$$a_n=-\frac{Q}{\pi n}\left(1-\frac{\zeta_n(\tau_1)Z_n'(\tau_0)-Z_n(\tau_1)\zeta_n'(\tau_0)}{W(\tau_0)Z_n'(\tau_0)}\right)\frac{1}{Z_n(\tau_1)}$$

Здесь $W(\tau_0)=n(1-\tau_0)^\beta/\tau_0$ — вронскиан линейно независимых решений $Z_n(\tau)$ и $\zeta_n(\tau)$ уравнения (2.8), определенных выше. Подставляя найденные значения A_n и B_n в формулу (2.9), найдем искомое решение в области (3):

$$\frac{\pi}{Q}\psi^{(3)}(\theta,\ \tau)=-\theta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_n(\tau)}{Z_n(\tau_1)}\frac{\sin 2n\theta}{n}+\tag{2.16}$$

$$+\frac{\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n(\tau_1)Z_n(\tau)-\zeta_n(\tau)Z_n(\tau_1)}{Z_n(\tau_1)}Z_n'(\tau_0)\frac{\sin 2n\theta}{n^2}$$

В случае бесконечного широкого сосуда $\tau_0=0$ вторая сумма в выражении (2.16) исчезает, области (1) и (2) стягиваются в начало координат, а $\psi^{(3)}$ в этом случае будет представлять функцию ψ во всей рассматриваемой области. Решение при этом примет вид

$$\frac{\pi}{Q}\psi=-\theta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_n(\tau)}{Z_n(\tau_1)}\frac{\sin 2n\theta}{n}$$

указанный Чаплыгиным [1].

Для дальнейших вычислений обозначим для простоты письма

$$\chi_n(\tau)=\frac{Z_n(\tau)}{Z_n(\tau_1)}-\frac{\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta}\frac{\zeta_n(\tau_1)Z_n(\tau)-\zeta_n(\tau)Z_n(\tau_1)}{nZ_n(\tau_1)}Z_n'(\tau_0)\tag{2.17}$$

тогда формула (2.16) примет вид:

$$\frac{\pi}{Q}\psi^{(3)}(\theta,\ \tau)=-\theta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_n(\tau)}{n}\sin 2n\theta\tag{2.18}$$

§ 3. Пользуясь формулой (2.18), можно определить коэффициент сжатия струи. Для этого найдем координату y по формуле (1.4). Подставляя в нее выражение (2.18), будем иметь

$$y = \frac{(1-\tau)^{-\beta} Q}{\pi v}\Big[-2\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n'(\tau)}{n}\int_0^\theta \frac{\sin 2n\theta \sin\theta}{n}\,d\theta -$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n(\tau)\int_0^\theta \cos 2n\theta\cos\theta d\theta - \sin\theta\Big] + y_0(\tau)$$

Так как при $\theta=0$ должно быть $y=0$, то $y_0(\tau)=0$. Выполняя интегрирование, найдем

$$y = \frac{(1-\tau)^{-\beta}Q}{\pi v}\Big[-\tau\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_n'(\tau)}{n}\left(\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}\right) -$$

$$-\sin\theta - \sum_{n=1}^{\infty}\chi_n(\tau)\left(\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}\right)\Big]$$

Полагая здесь $\tau=\tau_1$, получим ординату y вдоль струи:

$$y = \frac{(1-\tau_1)^{-\beta}Q}{\pi v_1}\Big[-\tau_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_n'(\tau_1)}{n}\left(\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}\right) - \sin\theta \qquad (3.1)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\chi_n(\tau_1)\left(\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}\right)\Big]$$

Из формулы (2.16) для $\chi_n(\tau)$ следует, что $\chi_n(\tau_1)=1$, а вторая сумма, входящая в (3.1), примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}\right) = -\sin\theta \pm \frac{\pi}{2} \qquad (\theta \gtrless 0)$$

Если в (3.1) положить $\theta = -{}^1/_2\pi$, то должно быть $y={}^1/_2 h$; следовательно, будем иметь

$$h = \frac{2(1-\tau_1)^{-\beta}Q}{\pi v_1}\left[\frac{\pi}{2} - 4\tau_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_n'(\tau_1)(-1)^n}{4n^2-1}\right]$$

но $Q = v_1(1-\tau_1)^\beta h'$ (h' — ширина струи в бесконечности); следовательно, для коэффициента сжатия струи $k=h'/h$ будем иметь

$$\frac{1}{k} = 1 - \frac{8}{\pi}\tau_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\chi_n'(\tau_1)}{4n^2-1} \qquad (3.2)$$

Из формулы (2.17) найдем

$$\chi_n'(\tau_1) = \frac{Z_n'(\tau_1)}{Z_n(\tau_1)} - \frac{\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta}\,\frac{Z_n'(\tau_1)\zeta_n(\tau_1) - \zeta_n(\tau_1)Z_n(\tau_1)}{n_n Z(\tau_1)}\,Z_n'(\tau_0)$$

Но

$$Z_n'(\tau_1)\zeta_n(\tau_1) - \zeta_n(\tau_1)Z_n(\tau_1) = W(\tau_1) = n\frac{(1-\tau_1)^\beta}{\tau_1}$$

Следовательно,

$$\chi_n'(\tau_1) = \frac{Z_n'(\tau_1)}{Z_n(\tau_1)} - \frac{\tau_0(1-\tau_1)^\beta}{\tau_1(1-\tau_0)^\beta}\,\frac{Z_n'(\tau_0)}{Z_n(\tau_1)}$$

Подставляя полученное выражение в (3.2), получим окончательно

$$\frac{1}{k}=1-\frac{8}{\pi}\tau_1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\frac{Z_n'(\tau_1)}{Z_n(\tau_1)}-\frac{\tau_0(1-\tau_1)^\beta}{\tau_1(1-\tau_0)^\beta}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\frac{Z_n'(\tau_0)}{Z_n(\tau_1)} \qquad (4.3)$$

Для бесконечно широкого сосуда $\tau_0=0$ и формула (3.3) переходит в формулу Чаплыгина

$$\frac{1}{k_\infty}=1-\frac{8}{\pi}\tau_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\frac{Z_n'(\tau_1)}{Z_n(\tau_1)} \qquad (3.4)$$

Подробные вычисления по этой формуле произведены Лайтхиллом [3]. Используя (3.4), формулу (3.3) можно представить в следующем, удобном для вычислений, виде:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_\infty}+\frac{8}{\pi}\tau_0\frac{(1-\tau_1)^\beta}{(1-\tau_0)^\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\frac{Z_n'(\tau_0)}{Z_n(\tau_1)} \qquad (3.5)$$

К этому уравнению необходимо присоединить очевидное равенство

$$v_0(1-\tau_0)^\beta H=v_1(1-\tau_1)^\beta h'$$

которое, разделив на ширину отверстия h, можно записать в виде

$$\sqrt{\tau_0}\,(1-\tau_0)^\beta=\sqrt{\tau_1}\,(1-\tau_1)^\beta\frac{h}{H}k \qquad (3.6)$$

Тогда систему (3.5), (3.6) удобно записать в виде

$$\frac{h}{H}=\frac{1}{k_\infty}\frac{\sqrt{\tau_0}\,(1-\tau_0)^\beta}{\sqrt{\tau_1}\,(1-\tau_1)^\beta}+\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{\tau_0^3}{\tau_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\frac{Z_n'(\tau_0)}{Z_n(\tau_1)} \qquad (3.7)$$

$$k=\frac{H}{h}\frac{\sqrt{\tau_0}\,(1-\tau_0)^\beta}{\sqrt{\tau_1}\,(1-\tau_1)^\beta}$$

Вычисления по этим формулам легко могут быть выполнены, если воспользоваться таблицей функции Чаплыгина и ее производной, составленной Лайтхиллом и Фергюссоном [4].

§ **4.** Полученное решение легко обобщается на случай, когда стенки сосуда составляют с осью симметрии угол $^1/_2 q\pi\,(q<1)$. Формула (3.5) принимает при этом вид:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_\infty}+\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}q\,\frac{\tau_0(1-\tau_1)^\beta}{(1-\tau_0)^\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-q^2}\frac{Z_{n/q}'(\tau_0)}{Z_{n/q}(\tau_1)}$$

Предложенный метод может быть использован в случае смешанных течений газа, приводящих к задаче Трикоми для уравнений Чаплыгина, однако в этом случае задача приводится к бесконечной системе уравнений для определения коэффициентов ряда, составленного из частных решений.

Поступила 10 IV 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. ГТТИ, М.—Л., 1949.
2. Cherry T. M. Asymptotic Expansions for the Hypergeometric Functions Occuring in Gas-Flow Theory. Proceedings of the Royal Society of London, ser. A, vol. 202, 1950.
3. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, под ред. Хоуарта, т. 1, гл. IV, перевод с английского. ИЛ, 1955.
4. Fergusson and Lighthill. The hodograph transformations in tran-sonic flow. IV Tables. Proceedings of the Royal Society, ser. A, vol. 192, 1947.