

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

Н. Н. Кочина

(Москва)

1. Рассмотрим одномерные неустановившиеся движения сжимаемого газа

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{(\nu - 1) \rho v}{r} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^\gamma} + v \frac{\partial}{\partial r} \frac{p}{\rho^\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где γ — показатель адиабаты, $\nu = 1, 2, 3$ для плоской, цилиндрической, сферической симметрии соответственно [1].

Л. И. Седовым показано, что система (1.1) в случае плоской симметрии имеет решение¹

$$v = \frac{r_0}{t} V(\lambda), \quad \rho = \frac{a}{r_0^{k+3ts}} R(\lambda), \quad p = \frac{a}{r_0^{k+1ts+2}} P(\lambda) \quad (1.2)$$

Здесь r_0 и τ — некоторые постоянные соответственно с размерностями длины и времени, $[a] = ML^k T^s$. Величины z , λ и R , где

$$\lambda = \frac{\tau}{t} \exp \frac{x}{r_0}, \quad z = \frac{\gamma P}{R} \quad (1.3)$$

удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dV} = \frac{z [2(V-1)^2 - (\gamma-1)V(V-1) + (s-(s+2)/\gamma)z]}{(V-1)[V(V-1) - z(s+2)/\gamma]} \quad (1.4)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{z - (V-1)^2}{z(s+2)/\gamma - V(V-1)} \quad (1.5)$$

$$\frac{d \ln R}{dV} = \frac{s(V-1)^2 - V(V-1) + ((s+2)/\gamma - s)z}{(V-1)[V(V-1) - z(s+2)/\gamma]} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.4) и (1.6) имеют интеграл¹

$$z = CR^{2/s} (1-V)^{1-\gamma+2/s} \quad (1.7)$$

Если $s = -2$, из этих же уравнений получаем второй интеграл — интеграл энергии¹:

$$R \left[z(\gamma V - 1) + \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) V^2 (V - 1) \right] = -KC \quad (1.8)$$

Здесь C и K — произвольные постоянные.

¹ Л. И. Седов любезно познакомил меня с этими результатами, которые он предполагает поместить в 4-м издании своей книги «Методы подобия и размерности в механике»; на эти результаты мы будем ссылаться и в дальнейшем.

Остановимся на рассмотрении этого случая ($s = -2$). Полагая $s = -2$, $k = 0$ в решении (1.2) (k входит в это решение несущественным образом), получим

$$v = \frac{r_0}{t} V(\lambda), \quad \rho = \frac{a}{r_0^3} t^2 R(\lambda), \quad p = \frac{a}{r_0} P(\lambda) \quad (1.9)$$

где a — постоянная с размерностью энергии на единицу площади ($[a] = MT^{-2}$).

Из интегралов (1.7) и (1.8) находим в явном виде z , P и R в функции V

$$z = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \frac{V^2(1-V)}{\gamma V - 1 + K(1-V)^\gamma} \quad (1.10)$$

$$P = \frac{C}{\gamma} (1-V)^{-\gamma}$$

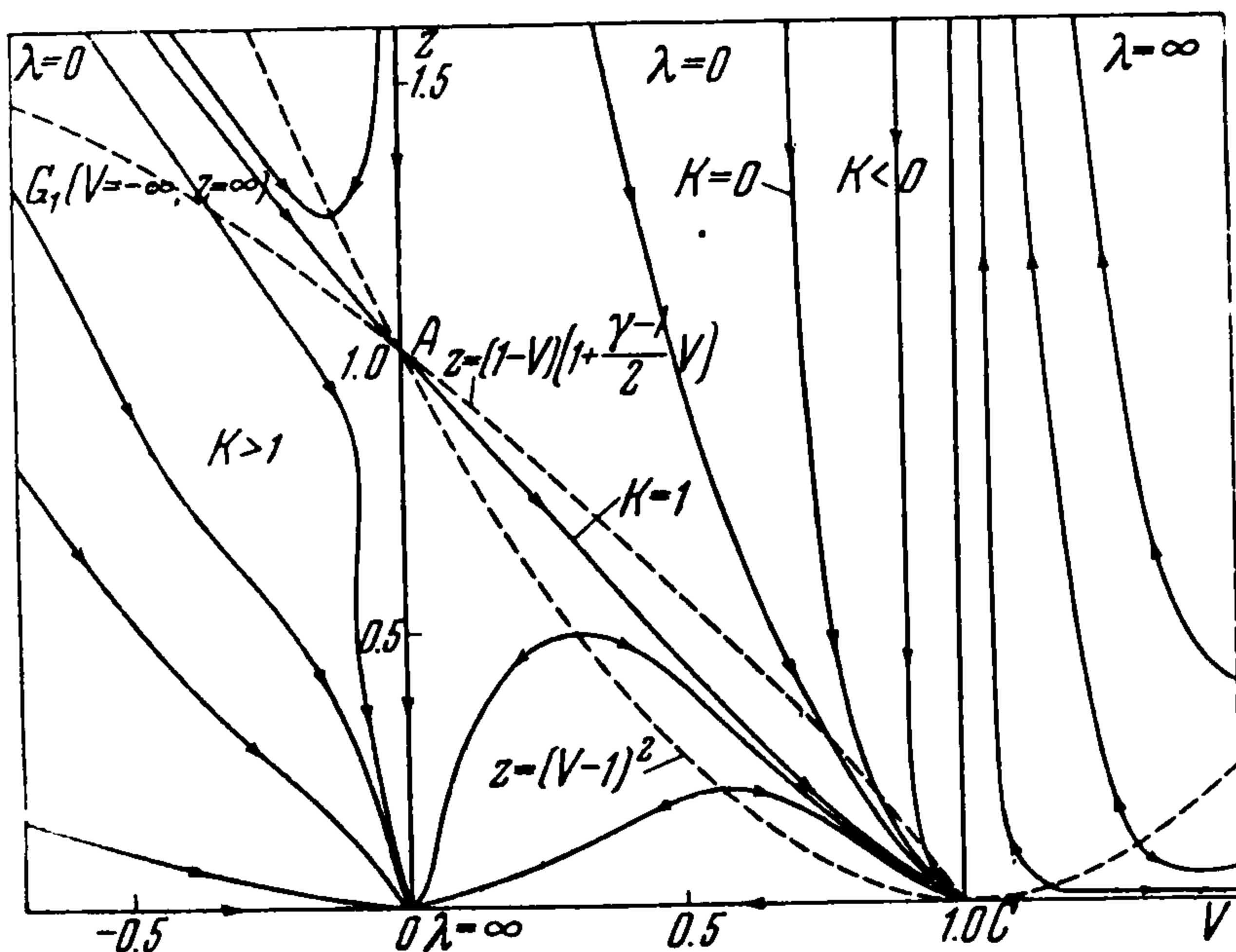
$$R = \frac{2C}{\gamma(\gamma-1)} \frac{[\gamma V - 1 + K(1-V)^\gamma]}{V^2(1-V)^{\gamma+1}} \quad (1.11)$$

Пользуясь формулами (1.5) и (1.10), определяем λ квадратурой

$$\ln \lambda = \int \left[\frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \frac{V}{(\gamma V - 1 + K(1-V)^\gamma)} - \frac{1}{V} + 1 \right] dV + A \quad (1.12)$$

Если γ — рациональное число, эта квадратура берется. A — произвольная постоянная. Таким образом, найдено общее решение системы дифференциальных уравнений (1.4)–(1.6), зависящее от трех произвольных постоянных.

На фиг. 1 представлено поле интегральных кривых уравнения (1.4) для случая $\gamma = 1.4$, $s = -2$. Направление возрастания параметра λ



Фиг. 1

вдоль интегральной кривой указано стрелками. Из этой фигуры ясен характер особых точек уравнения (1.4). При $V = V_0$, удовлетворяющих условию

$$\gamma V_0 - 1 + K(1 - V_0)^\gamma = 0$$

z обращается в бесконечность.

Будем предполагать, что $r_0 > 0$. Тогда $\lambda = 0$ при $x = -\infty$ и $\lambda = \infty$ при $x = \infty$.

Остановимся на задачах, которые можно решать, пользуясь полученным точным решением.

1. Начальные и краевые условия

$$p = p_0 = \alpha, \quad v = v_0 = \beta \exp\left(-\frac{x}{r_0}\right), \quad \rho = \rho_0 = \delta \exp\frac{2x}{r_0} \quad \text{при } t = 0$$

Кроме того,

$$p \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty$$

Для безразмерных величин p/p_0 , v/v_0 и ρ/ρ_0 , функций параметра λ , получим следующие условия:

$$\begin{aligned} p/p_0 = 1, \quad v/v_0 = 1 \quad \rho/\rho_0 = 1 \quad \text{при } \lambda = \infty \\ p/p_0 = 0 \quad \text{при } \lambda = 0 \end{aligned}$$

Этим начальным и граничным данным отвечает движение по интегральной кривой, соответствующей $K > 1$, причем λ изменяется при движении из точки O ($V = 0, z = 0$) в точку G_1 ($V = -\infty, z = \infty$) от ∞ до 0. Следовательно, получаем непрерывное решение.

2. Начальные и краевые условия

$$\begin{aligned} p = p_0 = \alpha, \quad v = v_0 = \beta \exp\left(-\frac{x}{r_0}\right), \quad \rho = \rho_0 = \delta \exp\frac{2x}{r_0} \quad \text{при } t = 0 \\ p = \alpha_2, \quad v = 0, \quad \rho = 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} p/p_0 = 1, \quad v/v_0 = 1, \quad \rho/\rho_0 = 1 \quad \text{при } \lambda = \infty \\ p/p_0 = \alpha_2/\alpha, \quad v/v_0 = 0, \quad \rho/\rho_0 = \delta_2/\delta \quad \text{при } \lambda = 0 \end{aligned}$$

Этой задаче отвечает движение по интегральной кривой, соответствующей $K > 1$, из точки O ($V = 0, z = 0$) (причем значения $\alpha_2 > \alpha$, $\delta_2 > \delta$ не произвольны, а определяются в зависимости от K и C) до пересечения с параболой $z = (1 - V)[1 + 1/2(\gamma - 1)V]$ в точке (V_1, z_1) , откуда скачком переходим в точку $(V_2 = 0, z_2 = 1 - 1/2(\gamma + 1)V_1)$ прямой $V = 0$ и движемся по ней до точки O , отвечающей $\lambda = \infty$.

В физическом пространстве это соответствует движению газа с отрицательной скоростью, затем газ скачком переходит в состояние покоя. С течением времени область покоя, движущаяся со скоростью ударной волны, надвигается на область движения и вытесняет его. (Отметим, что произвольному α_2 отвечает скачок с интегральной кривой $K > 1$ на интегральную кривую $K < 1$, соответствующую движущемуся газу.)

3. Пусть в момент $t = 0$ в точке $x = -\infty$ происходит взрыв. В газе имеет место начальное распределение характеристик движения

$$p = p_0 = \alpha, \quad v = v_0 = \beta \exp\left(-\frac{x}{r_0}\right), \quad \rho = \rho_0 = \delta \exp\frac{2x}{r_0}$$

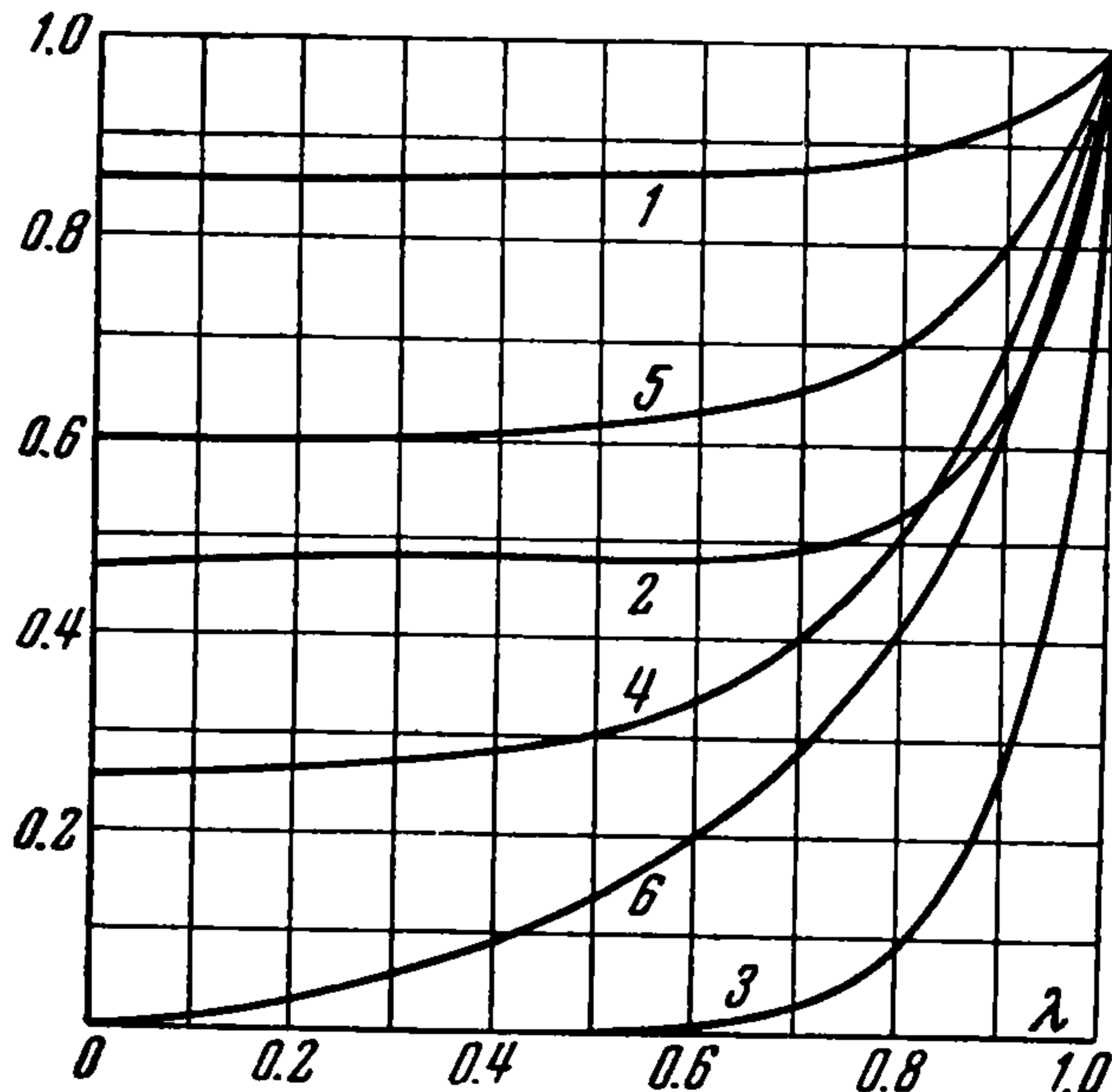
В этом случае, как показывает поле интегральных кривых, непрерывное решение задачи получить невозможно. Разрывное же решение получается таким образом: движению газа за фронтом ударной волны из точки $x = -\infty$ соответствует движение по интегральной кривой ($K < 1$) из точки (V_0, ∞) до точки (V_2, z_2) , отвечающей ударной волне, затем скачком переходим в точку (V_1, z_1) , координаты которой связаны с координатами точки (V_2, z_2) условиями

$$\begin{aligned} 1 - V_2 = \frac{2z_1 + (\gamma - 1)(V_1 - 1)^2}{(\gamma + 1)(1 - V_1)} \\ z_2 = \frac{[2z_1 + (\gamma - 1)(V_1 - 1)^2][2\gamma(V_1 - 1)^2 - (\gamma - 1)z_1]}{(\gamma + 1)^2(1 - V_1)^2} \end{aligned}$$

и движемся по интегральной кривой $K > 1$ в точку O , соответствующую $\lambda = \infty$. При этом, если $\beta \neq 0$, перед ударной волной будет также происходить неустановившееся движение.

Если $\beta = 0$, ударная волна движется по покоящемуся газу, и скачок совершается в точку $(0, z_1)$ к прямой $V = 0$.

Если давление перед фронтом ударной волны равно нулю, то скачок происходит из точки $(V_2 = 2/(\gamma + 1), z_2 = 2\gamma(\gamma - 1)/(\gamma + 1)^2)$ в точку $(V_1 = z_1 = 0)$ и решение (1.10)–(1.12) принимает вид (константа K обращается в нуль):



Фиг. 2

Здесь и в дальнейшем предполагаем, что на ударной волне $\lambda = 1$. На фиг. 2 даны для значений $\nu = 1$, $k = 0$, $s = -2$, $\gamma = 1.4$ распределения безразмерных характеристик движения за ударной волной: кривые 1, 2, 3 (скорости, давления и плотности) в случае $K = 0$, кривые 4, 5, 6 в случае $K = 0.996715$ ($V_1 = 0.1$, $z_1 = 0.511312$).

При этом λ вычислялось по формуле

$$\begin{aligned} \ln \lambda = & y_2^5 - y^5 - \ln \frac{1 - y^5}{1 - y_2^5} + \frac{14}{5K} \left\{ y \left(\frac{y^2}{3} + \frac{7}{5K} \right) - \right. \\ & \left. - y_2 \left(\frac{y_2^2}{3} + \frac{7}{5K} \right) + A \ln \frac{y - y'}{y_2 - y'} + B \ln \frac{y - y''}{y_2 - y''} + \right. \\ & \left. + C \ln \frac{y - y'''}{y_2 - y'''} + \frac{D}{2} \ln \frac{y^2 + py + q}{y_2^2 + py_2 + q} + \frac{F}{2} \ln \frac{y^2 + ly + m}{y_2^2 + ly_2 + m} + \right. \\ & \left. + \frac{(E - 1/2Dp)}{\sqrt{q - 1/4p^2}} \left[\arctg \frac{y + 1/2p}{\sqrt{q - 1/4p^2}} - \arctg \frac{y_2 + 1/2p}{\sqrt{q - 1/4p^2}} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{(G - 1/2Fl)}{\sqrt{m - 1/4l^2}} \left[\arctg \frac{y + 1/2l}{\sqrt{m - 1/4l^2}} - \arctg \frac{y_2 + 1/2l}{\sqrt{m - 1/4l^2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$y = (1 - V)^{1/5}, \quad y_2 = (1 - V_2)^{1/5}$$

y' , y'' , y''' , p , q , m , l — коэффициенты в разложении многочлена $Ky^7 - 1.4y^5 + 0.4$ на множители:

$$Ky^7 - 1.4y^5 + 0.4 = K(y - y')(y - y'')(y - y''')(y^2 + py + q)(y^2 + ly + m)$$

Легко убедиться, что в случае $0 < K < 1$ уравнение

$$Ky^7 - 1.4y^5 + 0.4 = 0$$

имеет три действительных корня: y' , y'' , y''' .

$$A = \frac{(7/5K)^2 y'^5 - y'^4 - (2/5K) y'^2 - 14/25K^2}{7y'^4 (y'^2 - 1/K)}$$

Величины B и C получаются из A заменой y' соответственно на y'' и y''' . Величины D и E определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \{(\alpha T - \beta^2 W) Q + \beta^2 S (T + \alpha W)\} D + (TQ + \beta^2 WS) E &= N \\ \{(T + \alpha W) Q - (\alpha T - \beta^2 W) S\} D + (WQ - TS) E &= M \end{aligned}$$

где положено

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} p, & \beta^2 &= q - \frac{1}{4} p^2, & W &= 2\alpha + l \\ T &= \alpha^2 - \beta^2 + l\alpha + m \\ Q &= (\alpha - y')(\alpha - y'')(\alpha - y''') - \beta^2(3\alpha - y' - y'' - y''') \\ S &= \beta^2 - [(\alpha - y')(\alpha - y'') + (\alpha - y')(\alpha - y''') + (\alpha - y'')(\alpha - y''')] \\ N &= (7/5K)^2 \alpha (\alpha^4 - 10\alpha^2\beta^2 + 5\beta^4) - (\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4) - \\ &\quad - (2/5K)(\alpha^2 - \beta^2) - 14/25K^2 \\ M &= (7/5K)^2 (5\alpha^4 - 10\alpha^2\beta^2 + \beta^4) - 4\alpha(\alpha^2 - \beta^2) - 4\alpha/5K \end{aligned}$$

Аналогичным образом (заменой p на l и q на m и обратно) определяются коэффициенты F и G .

Ударная волна движется по логарифмическому закону

$$x_2 = r_0 \ln \frac{t}{\tau}$$

причем ее скорость убывает с течением времени:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{r_0}{t} = \frac{r_0}{\tau} \exp\left(-\frac{x}{r_0}\right)$$

Из вида решения (1.9) ясно, что на фронте ударной волны давление p_2 в любой момент времени остается постоянным, скорость v_2 убывает, а плотность ρ_2 возрастает со временем.

Отметим, что если ударная волна распространяется по покоящемуся газу ($V_1 = 0$), то постоянная K выражается через z_1 и γ следующим образом:

$$K = \frac{(\gamma + 1)^{\gamma+1} z_1}{(2z_1 + \gamma - 1)^\gamma [2\gamma - (\gamma - 1) z_1]}$$

Так как в данном случае

$$\gamma p_1 / \rho_1 \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^{-2} = z_1$$

где ρ_1 и p_1 — плотность и давление перед ударной волной, то легко видеть, что

$$K = \exp \frac{S_1 - S_2}{C_v}$$

где S_1 — энтропия газа перед скачком, S_2 — за скачком.

Из формул (1.10) и (1.11) найдем выражение для безразмерной энергии единицы объема газа:

$$E = \frac{RV^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1} = \frac{C}{\gamma(\gamma - 1)} \left[\frac{K}{1 - V} + \frac{(\gamma - 1)V}{(1 - V)^{\gamma+1}} \right]$$

Снабжая константы C и K , характеризующие состояние газа перед скачком, индексом 1, а за скачком индексом 2, получим

$$\begin{aligned} \gamma(\gamma - 1)E &= C_2(1 - V_{02})^{-\gamma} && \text{при } \lambda = 0 \\ \gamma(\gamma - 1)E &= C_1 K_1 && \text{при } \lambda = \infty \end{aligned}$$

В начальный момент времени в каждой точке пространства энергия E одинакова и равна $C_1 K_1 / \gamma (\gamma - 1)$. Отсюда вытекает, что энергия взрыва должна быть бесконечно большой, так как бесконечно велика энергия за фронтом ударной волны. Энергия взрыва могла бы быть конечной только в том случае, если бы выполнялось равенство

$$C_2 (1 - V_{02})^{-\gamma} = C_1 K_1$$

Но, как легко убедиться, это равенство удовлетворяется лишь при условии $V_{02} = 0$, $K_2 = 1$, которое дает тривиальное решение системы (1.1):

$$p = a = \text{const}, \quad v = 0, \quad \rho = \delta \exp(2x/r_0)$$

2. Положим в уравнениях (1.4)–(1.7) $s = 1$, $\gamma = 3$. Из уравнения (1.7) следует, что в этом случае течение будет изэнтропическим, причем (1.4) есть уравнение Риккати, оно интегрируется в элементарных функциях, и система (1.4)–(1.6) имеет простое точное решение:

$$V = \sqrt{z} \frac{1 + Ke^{-2\sqrt{z}}}{1 - Ke^{-2\sqrt{z}}} \quad (2.1)$$

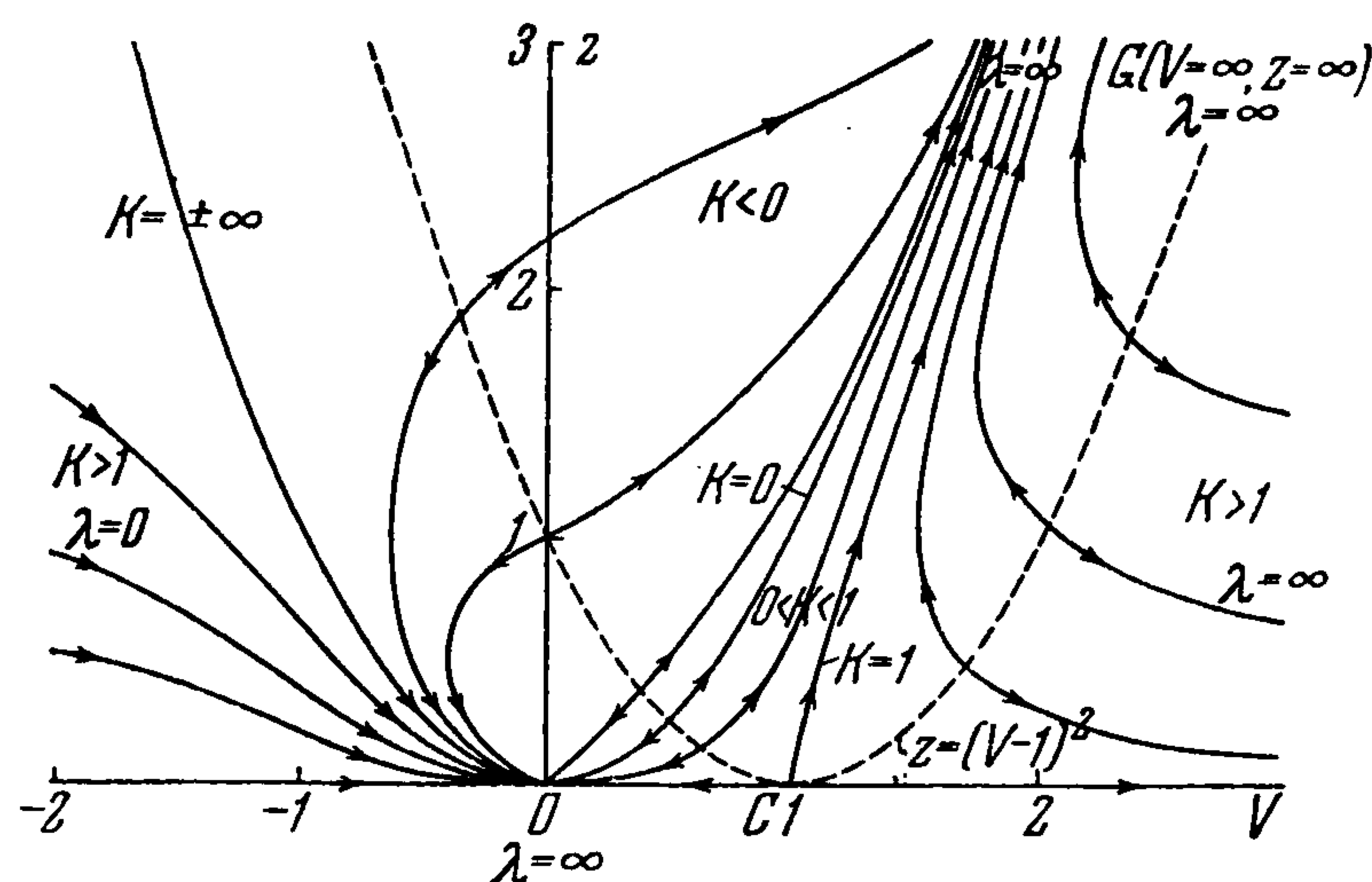
$$R = \sqrt{\frac{z}{C}}, \quad P = \frac{z\sqrt{z}}{3\sqrt{C}} \quad (2.2)$$

$$\lambda = C_1 \frac{(1 - Ke^{-2\sqrt{z}})}{2\sqrt{z}} \exp \frac{2\sqrt{z}}{1 - Ke^{-2\sqrt{z}}} \quad (2.3)$$

где

$$v = \frac{r_0}{t} V, \quad \rho = \frac{a}{r_0^3 t} R, \quad p = \frac{a}{r_0 t^3} P \quad (2.4)$$

На фиг. 3 даны интегральные кривые уравнения (1.4) при $s = 1$. Из этой картины видно, что непрерывные решения даются интегральными кривыми, соответствующими $K > 1$.



Фиг. 3

В начальный момент времени $t = 0$ характеристики движения распределены по показательному закону

$$p = p_0 = a \exp\left(-\frac{3x}{r_0}\right)$$

$$v = v_0 = \beta \exp\left(-\frac{x}{r_0}\right)$$

$$\rho = \rho_0 = \delta \exp\left(-\frac{x}{r_0}\right) \quad (2.5)$$

В любой момент времени $v/v_0 = p/p_0 = \rho/\rho_0 = 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

Интегральная кривая с $K = 1$ дает непрерывное решение задачи о поршне, движущемся по логарифмическому закону. В бесконечно удаленной точке пространства перед поршнем характеристики движения обращаются в бесконечность.

Устремляя в формулах (2.1) и (2.3) K к бесконечности, получим простое решение системы (1.1):

$$x = 2vt + r_0 \ln B/v, \quad p = \frac{1}{3} Av^3, \quad \rho = Av$$

где r_0 , A и B — некоторые постоянные.

Как известно^[2], общее решение системы (1.1) для изэнтропического течения с показателем адиабаты $\gamma = 3$ имеет вид ($\nu = 1$):

$$x = (v + c)t + F_1(v + c), \quad x = (v - c)t + F_2(v - c)$$

где c — скорость звука, а функции $F_1(y)$ и $F_2(y)$ определяются из начальных и граничных условий. Для начального распределения (2.5) это решение имеет вид (2.1)—(2.4).

З. Л. И. Седовым¹ найдено также следующее решение системы (1.1):

$$v = \frac{r}{\tau} V(\lambda), \quad \rho = \frac{a}{r^{k+3\tau^s}} R(\lambda), \quad p = \frac{aP(\lambda)}{r^{k+1}\tau^{s+2}}, \quad \lambda = \frac{r}{r_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.1)$$

где функции z , R и λ удовлетворяют трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dz}{dV} = \frac{z \{ [2 + \nu(\gamma - 1)] V(V - 1)^2 - (\gamma - 1) V^2(V - 1) - [2V + x(\gamma - 1)z] \}}{(V - 1) [V^2(V - 1) + (x - \nu V)z]} \quad (3.2)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{z - (V - 1)^2}{V^2(V - 1) + [x - \nu V]z} \quad \left(x = \frac{k + 1}{\gamma}\right) \quad (3.3)$$

$$\frac{d \ln R}{dV} = \frac{-(k + 3 - \nu) V(V - 1)^2 - V^2(V - 1) - [x - (k + 3)V]z}{(V - 1) [V^2(V - 1) + (x - \nu V)z]} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.2) и (3.4) дают интеграл¹

$$z = (AR)^{-\frac{2+\nu(\gamma-1)}{k+3-\nu}} (1 - V)^{-\frac{(k+3)(\gamma-1)+2}{k+3-\nu}} \quad (3.5)$$

Если $k = \nu - 1$, $s = -2$, эти же уравнения дают интеграл энергии¹

$$R [z(\gamma V - 1) + \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 1)V^2(V - 1)] = -C/A \quad (3.6)$$

Рассмотрим этот последний случай $k = \nu - 1$, $s = -2$. Из соотношений (3.5) и (3.6) получаем точное решение (3.2) и (3.4):

$$z(\gamma V - 1) + \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 1)V^2(V - 1) = -Cz^{\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}} (1 - V)^{\frac{2\gamma+\nu(\gamma-1)}{2+\nu(\gamma-1)}} \quad (3.7)$$

$$R = Az^{-\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}} (1 - V)^{-\frac{2\gamma+\nu(\gamma-1)}{2+\nu(\gamma-1)}} \quad (3.8)$$

Здесь C и A — произвольные постоянные. Величина λ находится квадратурой из уравнения (3.3).

Алгебраическое уравнение (3.7) определяет z как неявную функцию V .

Если $\nu(\gamma - 1) = 2$ ($\gamma = 5/3, 2, 3$ при $\nu = 3, 2, 1$ соответственно), оно дает две ветви для z :

$$z = \frac{(1 - V)}{2(\gamma V - 1)^2} \{ [\gamma(\gamma - 1)V^2(\gamma V - 1) + C^2(1 - V)^{\gamma}] \pm \pm |C| |1 - V|^{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{2\gamma(\gamma - 1)V^2(\gamma V - 1) + C^2(1 - V)^{\gamma}} \} \quad (3.9)$$

Если $C = 0$, решение (3.7), (3.8) и (3.3) находится в явном виде:

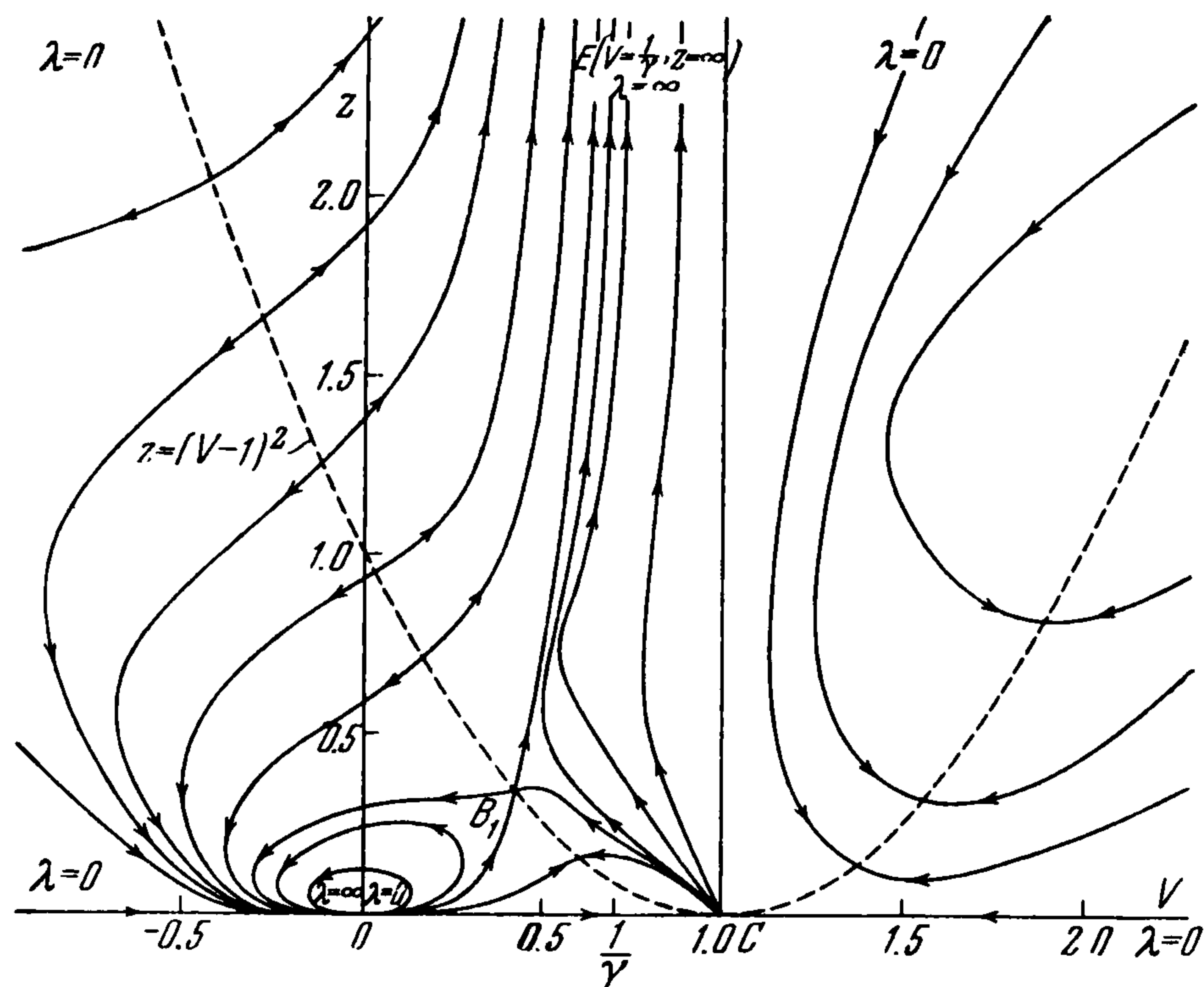
$$z = \frac{\gamma(\gamma - 1)V^2(1 - V)}{2\gamma V - 1}$$

$$R = AV^{-\frac{4}{2+\nu(\gamma-1)}} (\gamma V - 1)^{\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}} (1 - V)^{-\frac{2(\gamma+1)+\nu(\gamma-1)}{2+\nu(\gamma-1)}} \quad (3.10)$$

$$\lambda = C_1 V^{-\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}} (\gamma V - 1)^{-\frac{(\gamma-1)}{2+\nu(\gamma-1)}} e^{-\frac{2}{[2+\nu(\gamma-1)]V}}$$

¹ См. сноску на стр. 449.

На фиг. 4 и 5 даны поля интегральных кривых уравнения (3.2) для $\nu = 1$ ($k = 0$) и $\nu = 3$ ($k = 2$), где положено $s = -2$, $\gamma = 1.4$.



Фиг. 4

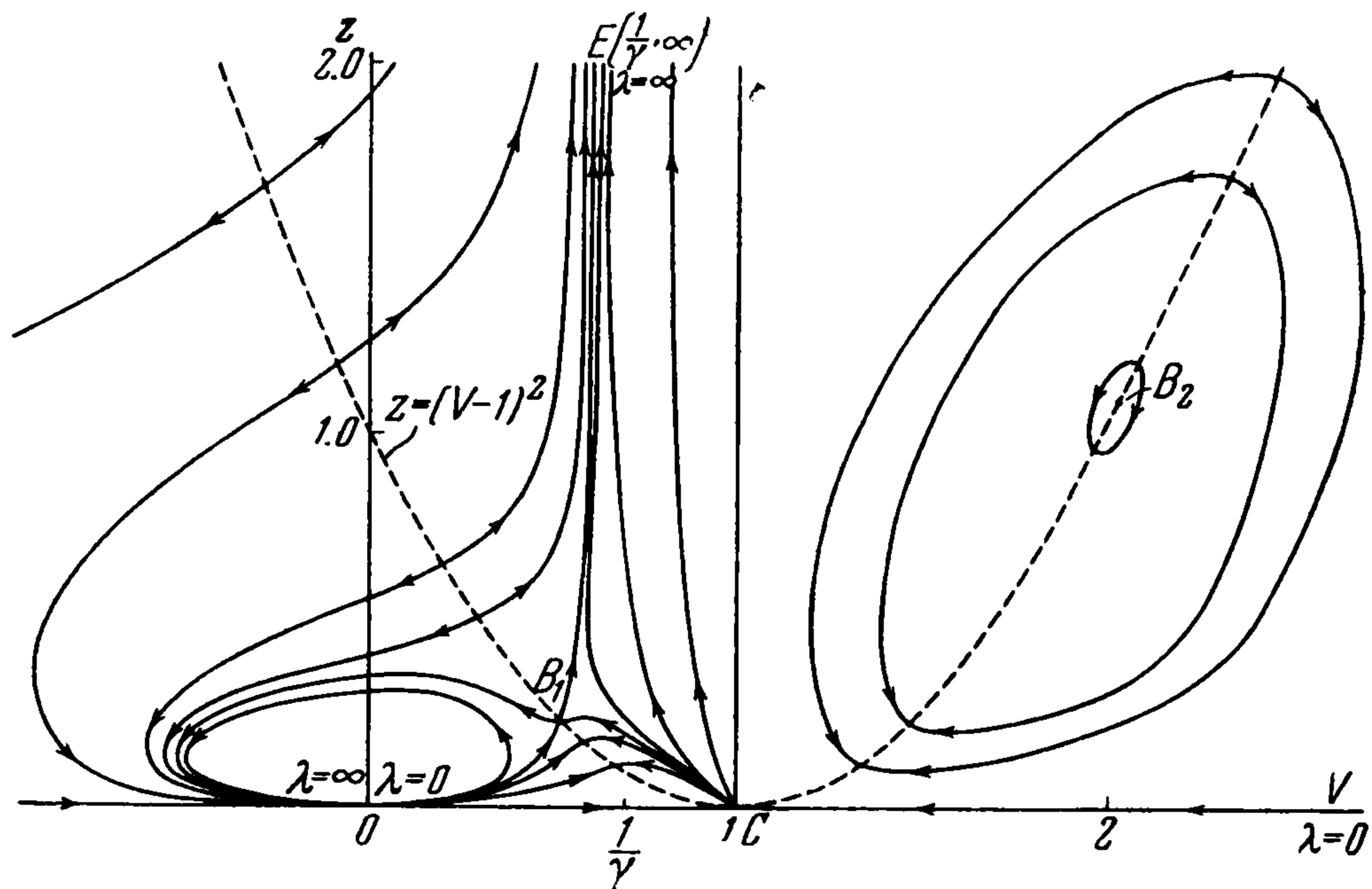
Отметим, что особые точки B_1 и B_2 лежат на параболе $z = (1 - V)^2$; координаты этих точек удовлетворяют квадратному уравнению

$$\gamma(1 - \nu)V^2 + \nu(\gamma + 1)V - \nu = 0 \quad (3.11)$$

При $\nu = 1$ это уравнение превращается в линейное, и имеется лишь одна точка B_1 — седло:

$$V = \frac{1}{\gamma + 1}, \quad z = \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\right)^2$$

При $\nu = 2$ и $\nu = 3$ точка B_1 , для которой $V < 1$, является седлом, а B_2 , для которой $V > 1$, — центром.



Фиг. 5

Бесконечно удаленной точке соответствует $\lambda = \infty$, центру симметрии значение $\lambda = 0$.

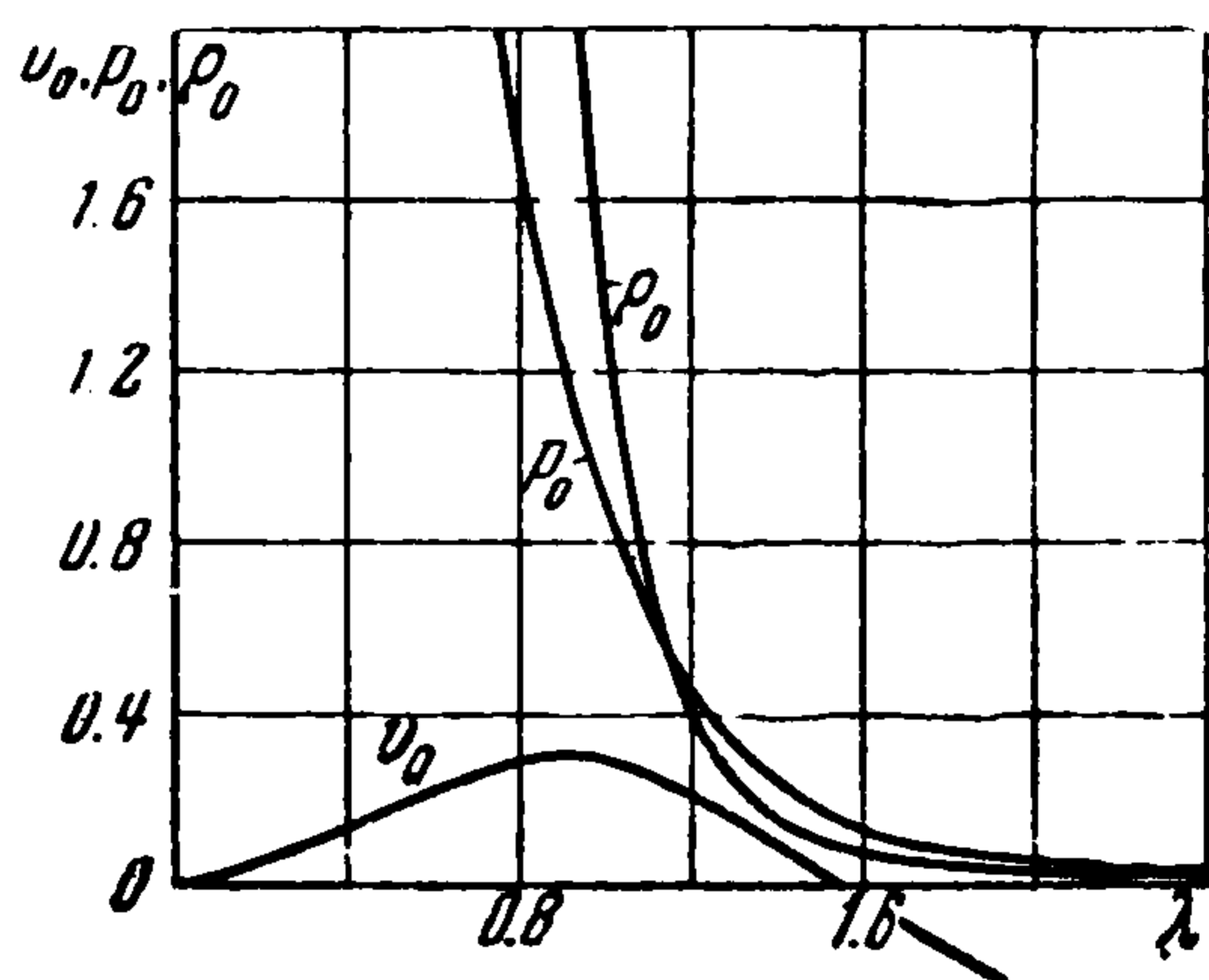
1. Непрерывным решениям отвечают замкнутые кривые с значениями C , меньшими

$$C_0 = \frac{1}{2} [\gamma(\gamma + 1) V_0^2 - 2(\gamma + 1) V_0 + 2] (1 - V_0)^{-\frac{2(\gamma+1)}{2+\nu(\gamma-1)}}$$

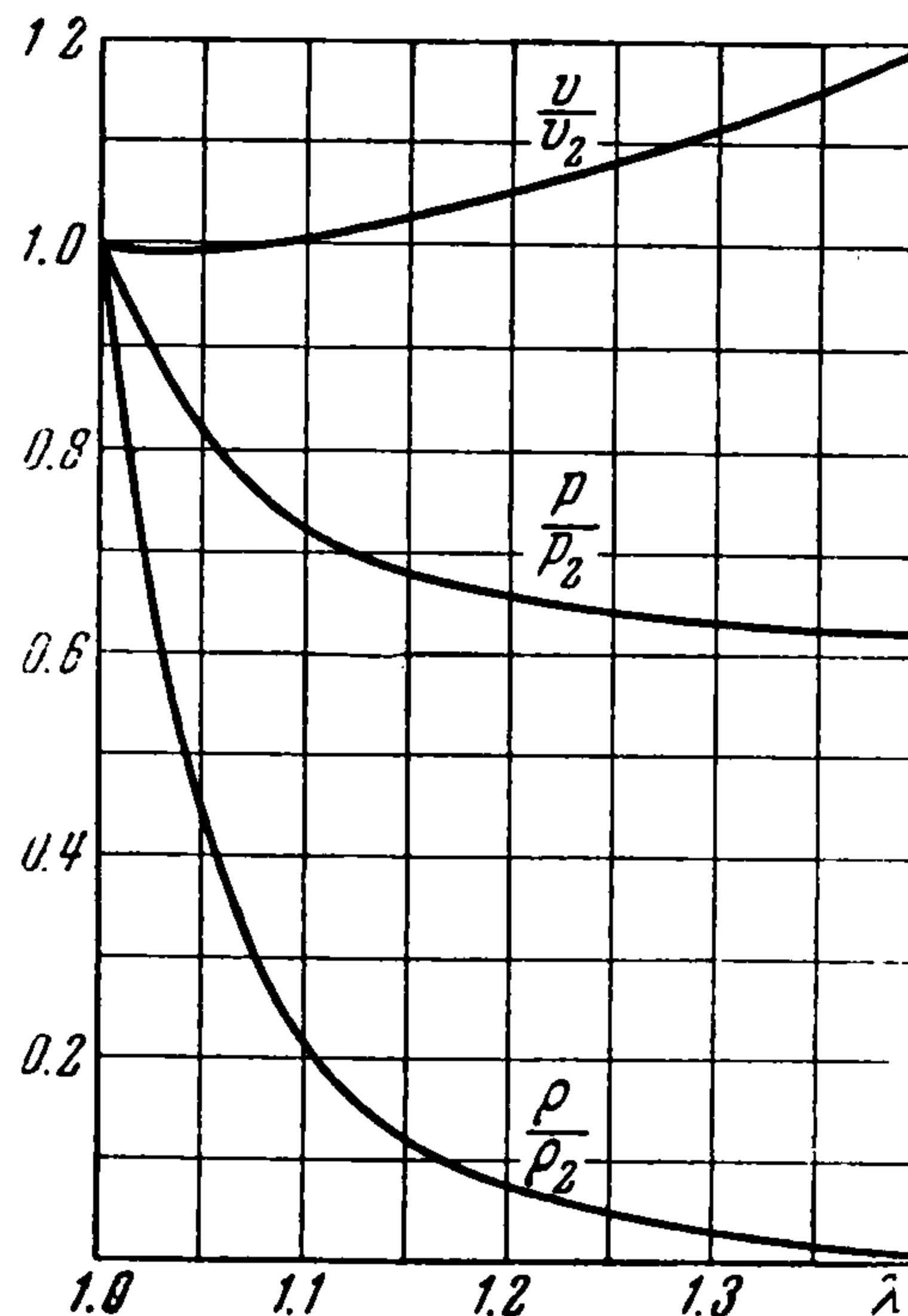
где V_0 — корень уравнения (3.11), меньший единицы. Для $\nu = 1$ значение $C_0 = (\gamma + 1)/2\gamma$; значение $C = C_0$ соответствует разделяющей кривой, проходящей через точку B_1 . Заменяя в формулах (3.1) r через λ , учитывая, что $k = \nu - 1$, $s = -2$, получим

$$\begin{aligned} v &= \frac{r_0}{\tau} \lambda V(\lambda) \exp \frac{t}{\tau} \\ p &= \frac{a}{r_0^\nu} \frac{P(\lambda)}{\lambda^\nu} \exp \left(-\frac{\nu}{\tau} t \right) \\ \rho &= \frac{a}{r_0^{\nu+2}} \frac{R(\lambda)}{\lambda^{\nu+2}} \exp \left(-\frac{(\nu+2)}{\tau} t \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

В начальный момент времени $t = 0$ $\lambda = r/r_0$, следовательно, движение, описываемое формулами (3.12), отвечает вполне определенному начальному распределению скорости, плотности и давления, которое дается точным решением (3.7), (3.8) и (3.3) при фиксированных значениях $C < C_0$, A и C_1 . На фиг. 6 дано это начальное распределение для случая $\gamma = 5/3$, $\nu = 3$, $C = 1/2$, $A = 1$.



Фиг. 6



Фиг. 7

Остальные интегральные кривые могут давать только разрывные решения.

2. Пусть при $t = -\infty$ бесконечно далеко от центра симметрии происходит взрыв и по газу к центру начинает двигаться ударная волна, причем $\tau < 0$. Перед ударной волной имеется некоторое неустойчившееся движение газа.

Это соответствует движению по интегральной кривой из точки E ($V = \gamma^{-1}$, $z = \infty$), соответствующей бесконечно удаленной точке, где $\lambda = \infty$, в которую пучком входят интегральные кривые, до некоторой

точки (V_2, z_2) , откуда скачком попадаем в точку (V_1, z_1) и движемся по новой интегральной кривой в точку O , отвечающую центру симметрии ($\lambda = 0$).

Ударная волна движется по показательному закону

$$r_2 = r_0 \exp \frac{t}{\tau}$$

скорость ее

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{r_2}{\tau} = \frac{r_0}{\tau} \exp \left(\frac{t}{\tau} \right)$$

С течением времени скорость на фронте ударной волны падает, а плотность и давление растут.

На фиг. 7 дано распределение безразмерных характеристик движения за фронтом ударной волны, распространяющейся по невозмущенному газу, давление в котором также равно нулю. Движение описывается формулами (3.10).

Энергия взрыва для рассматриваемых разрывных течений также бесконечно велика, так как в бесконечно удаленной точке за фронтом ударной волны давление конечно.

В заключение отметим, что решения типа (1.2), (1.3) и (3.1) впервые были даны К. П. Станюковичем^[3] при помощи формальных подстановок. Л. И. Седовым эти решения получены предельным переходом из автомодельных решений, и из физических соображений найдены интегралы соответствующих дифференциальных уравнений. Впервые подобные предельные переходы рассматривались Г. И. Баренблаттом в применении к другим задачам — фильтрации и пограничного слоя^[4].

Расчеты к данной работе произведены Л. Д. Булановой и С. В. Семенец.

Поступила 5 IV 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, М., 1954.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. ГИТТЛ, М., 1955.
3. Станюкович К. П. Об автомодельных решениях уравнений гидродинамики, обладающих центральной симметрией. ДАН СССР, т. XLVIII, № 5, 1945.
4. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.