Возьмем оператор Лапласа от функции $w$, определяемой неявно из уравнения (1.1). Получим

$$\triangle w = 2\left[\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y}{(\lambda+\alpha)^2} + \frac{z^2}{(z+\beta)^2}\right]^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda+\alpha} + \frac{1}{\lambda+\beta} - 2\frac{\lambda''}{\lambda'^2}\right) \qquad (1.2)$$

Функция $w$ будет гармоничной, если

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda+\alpha} + \frac{1}{\lambda+\beta} - 2\frac{\lambda''}{\lambda'^2} = 0 \qquad (1.3)$$

Решая уравнение (1.3), найдем

$$w = \Phi(x, y, z) = C_0 \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda(x, y, z)} \frac{dt}{\sqrt{t(t+\alpha)(t+\beta)}} \qquad (1.4)$$

где $\lambda_0$ и $C_0$ — произвольные постоянные, а $\lambda(x, y, z)$ — функция, определяемая из уравнения (1.1) как неявная.

**§ 2.** Выбирая надлежащим образом постоянные $\alpha$ и $\beta$, можно получать семейства поверхностей, вырождающихся при некотором значении параметра $\lambda$ в плоские фигуры, очерченные эллипсами или гиперболами. Так, например, полагая $\beta = -a^2$, $\alpha = b^2 - a^2$, получим семейство эллипсоидов, вырождающихся при $\lambda \to a^2$ в эллиптическую область с полуосями $a$ и $b$.

В этом случае имеем

$$\frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial z} = \frac{2C_0}{ab}\left(1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.1)$$

что соответствует известной формуле, по которой определяется давление под эллиптическим штампом с плоским основанием.

Полагая $\beta = -a^2$, $\alpha = -b^2 - a^2$, получим случай, когда область контакта расположена между ветвями гиперболы с действительной полуосью $a$ и мнимой полуосью $b$. Полагая $b = a \operatorname{ctg} \alpha$ и устремляя $a$ к нулю, получим случай, когда область контакта ограничена прямыми $y = \pm x \operatorname{ctg} \alpha$, где $2\alpha$ — угол при вершине области контакта. В этом случае имеем

$$\frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial z} = A\left(y^2 - x^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \left(A = \lim_{a\to 0}\frac{C_0}{a}\right) \qquad (2.2)$$

Постоянная $A$ может быть определена, если известно суммарное давление, приходящееся на какую-либо ограниченную часть области контакта.

Поступила 28 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., 1953.

---

## ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМНОЙ МАТРИЦЫ

В. Я. Натанзон

(Москва)

Среди многочисленных способов вычисления корней полинома есть способ, основанный на определении полюсов обратной функции. Пусть

$$w = f(x) \qquad (1)$$

полином с действительными коэффициентами, для которого $f(0) \neq 0$, $u$

$$u = \frac{1}{w} = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots \qquad (2)$$

разложение в степенной ряд обратной функции. Пусть корни полинома $a_i$ все простые и удовлетворяют условию

$$|a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots \tag{3}$$

Радиус сходимости ряда (2), очевидно, равен $|a_1|$. Если $a_1$ — действительное число, то, как известно,

$$a_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} \tag{4}$$

если этот предел существует.

Для $a_1$ имеется еще формула Коши-Адамара

$$\frac{1}{a_1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n} \tag{5}$$

Хаусхолдер [1] приписывает этот метод вычисления корней полинома Кенигу [2] в работе которого имеется вывод формулы (4), для несколько более общего случая. Адамар [3] между прочим занимается тем же вопросом, причем он дает выражение для $q_n$ через коэффициенты $f(x)$. Другие формулы для $q_n$ дает Уиттекер [4]. Наконец, Голомб [5] распространяет результат Адамара на более общие случаи, когда $f(x)$ — вообще аналитическая функция с какими угодно особенностями.

Если речь идет о численном вычислении корней, то едва ли какие-либо формулы для $q_n$ вообще нужны, так как эти величины можно просто получать путем деления. Но одна формула, дающая выражение для $q_n$ не через коэффициенты полинома $f(x)$, а через его корни, безусловно полезна. Эта формула, по-видимому, принадлежит Стильтьесу [6] и получена в другой связи. Эта следующая формула, выведенная для случая простых корней:

$$q_n = \sum_{k=1}^{l} \frac{b_k}{a_k^{n+1}} \tag{6}$$

где $b_k$ — вычеты для полюсов $a_k$ функции (2)

Сделаем несколько замечаний.

Формула (4) получается непосредственно из (6). Она дает также

$$b_1 = \lim_{n\to\infty} q_n a_1^{n+1} \tag{7}$$

В случае, когда корень с наименьшим модулем кратный, формула (4) непригодна. Чтобы этот случай привести к случаю простых корней, можно вместо (2) взять разложение логарифмической производной

$$v = \frac{w'}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

и тогда вновь наименьший корень получим по формуле (4), а кратность этого корня даст формула (7).

Если $a_1$ и $a_2$ — два сопряженных комплексных корня, то нетрудно получить при помощи (6) такие две формулы:

$$|a_1| = \lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-1}q_{n+1} - q_n^2}{q_n q_{n+2} - q^2{}_{n+1}} \tag{8}$$

$$2\cos\nu_1 = \frac{q_{n-1}}{q_n |a_1|} + \frac{|a_1| q_{n+1}}{q_n}$$

$$\nu_1 = \arg a_1$$

Формула (6) показывает, что быстрота сходимости отношения $q_n / q_{n+1}$ к $a_1$ зависит от величины отношения $|a_1| / |a_2|$. Если это отношение близко к единице, то сходимость будет медленной. В этом случае нужно в (1) сделать преобразование независимой переменной $x = z + \alpha$ (Хаусголдер), где $\alpha$ — приближенное значение $a_1$. У преобразованного полинома отношение модулей двух первых корней будет меньше, чем до преобразования, и отношение $q_n / q_{n+1}$ быстрее даст значение $a_1$.

Рассмотрим один случай, когда предел (4) не существует. Пусть $a_2 = -a_1$ и оба эти корня действительные. В этом случае формула дает

$$q_{2n} = \frac{b_1 - b_2}{a_1^{2n+1}} + \ldots, \quad q_{2n+1} = \frac{b_1 + b_2}{a_1^{2n+2}} + \ldots$$

и, следовательно, последовательность отношения (4) будет колеблющейся. Для этого случая вместо (4) нужно взять формулу

$$a_1^2 = \lim_{n=\infty} \frac{q_{2n}}{q_{2n+1}}$$

Формула (6) объясняет также, почему в разложении (2) иногда все четные (или нечетные) коэффициенты могут оказаться равными нулю.

Наконец, отметим, что для получения второго корня следует получить разложение

$$\frac{x - a_1}{w(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n' x^n$$

и тогда отношение $q_n' / q_{n+1}'$ будет стремиться к корню $a_2$. При этом нужно иметь в виду, что $a_1$ не известно точно и поэтому левая часть написанного равенства при разложении на элементарные дроби будет содержать член

$$\frac{b_1}{x - a_1}$$

но с очень малым вычетом. При этом, как показывает формула (6), при не очень больших $n$ отношение коэффициентов будет приближаться вначале к $a_2$, но далее при возрастании $n$ начнет удаляться от $a_2$.

Таким образом, точность, с какой может быть получено $a_2$, зависит от точности уже найденного корня $a_1$.

Описанный способ определения корней полинома может быть перенесен и на корни векового уравнения

$$D(\lambda) \equiv |A(\lambda)| = 0 \tag{9}$$

причем и тогда, когда матрица $A$ порядка $m$ имеет общий полиномный вид:

$$A = E - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2 - \ldots - \lambda^\nu A_\nu \tag{10}$$

Первый член в выражении (10) удобнее заранее привести к $E$ путем умножения уравнения на $A_0^{-1}$.

Рассмотрим уравнение

$$AX = Y \tag{11}$$

где $X$ и $Y$ — два вектора, первый неизвестный, определяемый уравнением (11), а второй совершенно произвольный постоянный вектор. Компоненты их пусть будут $(x_i)$ и $(y_i)$ $i = 1,2 \ldots m$. Из уравнения (11) имеем

$$x_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik}\lambda^k \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

где $D$ означает определитель (9). Очевидно, что хотя $q_{in}$ для всех $i$ различны, но предел[1]

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{q_{in}}{q_{i,\,n+1}} \tag{13}$$

будет один и тот же и равен наименьшему корню полинома

$$D(\lambda) = 0$$

[1] При выводе формулы (13) не указывается, что она справедлива лишь в том частном случае, когда $\lambda_1$ — вещественно. В общем же случае, когда наименьшее по модулю собственное значение комплексно, автор не указал (хотя об этом говорит значительно раньше), что пределы в формуле (13) не существуют и формулу (13) следует заменить формулами, аналогичными формулам (8). (От редакции.)

Равенство (12) запишем в векторной форме

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \lambda^k \tag{14}$$

где $Q_k$ — вектор, образованный компонентами $q_{ik}$. Эти векторы $Q_k$ нужно определить, и тогда при достаточно большом $k$ получим приближенное значение $\lambda_1$ как общее значение отношений

$$\frac{q_{1k}}{q_{1k+1}} = \frac{q_{2k}}{q_{2k+1}} = \ldots = \frac{q_{mk}}{q_{mk+1}}$$

Как и в методе итерации, то $k$ достаточно, при котором написанные отношения уравниваются с заданной точностью.

Чтобы найти векторы $Q_k$, подставим выражение (14) для $x$ в уравнение (11) и путем сравнения коэффициентов при различных степенях $\lambda$ найдем такие равенства:

$$\begin{aligned} &Q_0 = Y \\ &Q_1 = A_1 Q_0 \\ &Q_2 = A_1 Q_2 + A_2 Q_0 \\ &Q_3 = A_1 Q_2 + A_2 Q_1 + A_3 Q_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Q_k = A_1 Q_{k-1} + A_2 Q_{k-2} + \ldots + A_k Q_0 \end{aligned} \tag{15}$$

из которых все $Q_k$ могут быть последовательно определены, причем в качестве исходного $Q_0$ может быть взят произвольный вектор.

Если уравнение (9) имеет вид:

$$| E - \lambda A_1 | = 0 \qquad (A_2 = A_3 = \ldots = 0)$$

то формулы (15) обращаются в обычные формулы метода итерации.

Поступила 31 X 1956

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хаусходдер А. С. Основы численного анализа ИЛ., М, 1956.
2. Konig J. Ueber eine Eigenschaft der Potenzreihen. Math. Ann., Bd. XXIII, 1884.
3. Hadamard J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor. J. math. pur. et app. (4), 8, 1892
4. Whetteker E. T. Proc. Edin. Math. Soc., 36, 1918, Gutteker.
5. Golomb M., Zeros and Roles of Fonctions Defined by Taylor Series, Bull. Am. Math. Soc., 49, 1943, 581—592.
6. Стильтьес Г. И. Исследование о непрерывных дробях, Г. Н.—Т. Изд. Украины, Харьков—Киев, 1936.