где через σ_φ° обозначено среднее по ширине диска значение σ_φ (для недеформированного состояния диска):

$$\sigma_\varphi^\circ = \frac{1}{b_0 - a_0} \int_{a_0}^{b_0} \sigma_\varphi dr_0 = \frac{1}{3} \rho\omega^2 (b_0^2 + a_0 b_0 + a_0^2) \tag{4.3}$$

Заметим, что σ_φ° определяется непосредственно из уравнения статики и не связано поэтому со свойствами материала.

При этом коэффициент k в формуле (4.2) имеет значение

$$k = \frac{3}{1 + \lambda + \lambda^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2m} \right)^{1+\mu} \frac{1-\mu}{F_*(\infty)} \tag{4.4}$$

При вычислениях обнаружилось, что коэффициент k практически не зависит от λ. Значения k в зависимости от m приведены на фиг. 3.

Формулы (4.1), (4.2) показывают, что время до разрушения вращающегося диска совпадает с временем до разрушения растянутого цилиндрического образца, номинальное напряжение в котором связано со средним напряжением в диске соотношением

$$\sigma_0 = k\sigma_\varphi^\circ \tag{4,5}$$

Поступила 25 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoff. Necking and Rupture of Rods Under Tensile Loads. J. Appl. Mech. No. 1, 1953.
2. Качанов Л. М., Некоторые вопросы теории ползучести, ГТТИ, 1949.
3. Wahl A. M., Creep Tests of Rotating Discs. J. Appl. Mech., № 3, 1954.

К ЗАДАЧЕ О ДАВЛЕНИИ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ШТАМПА С ПЛОСКИМ ОСНОВАНИЕМ

В. Л. Рвачев

(Осипенко)

Предлагается метод решения задачи о давлении под штампом с плоским основанием. Метод проведен для случая штампа, имеющего контакт по области, ограниченной произвольной центральной кривой второго порядка. В случае, когда область контакта ограничена двумя пересекающимися прямыми, получается решение, напоминающее решение, приведенное Л. А. Галиным[1] для штампа клинообразной формы в плане.

§ 1. Задача о давлении на упругое полупространство штампа с плоским основанием приводится к отысканию в пространстве гармонической функции $w = \Phi(x, y, z)$, принимающей постоянное значение в точках плоской области S (при $z = 0$), имеющей форму области контакта. Эту область S можно рассматривать как одну из поверхностей уровня функции $\Phi(x, y, z)$.

Пусть $F(x, y, z, \lambda) = 0$ — уравнение семейства поверхностей уровня для функции $w = \Phi(x, y, z)$, вырождающихся при $\lambda = \bar{\lambda}$ в плоскую область (S). Так как в этом случае каждому значению w соответствует определенная поверхность уровня, то $\lambda = \lambda(w)$. Эту функцию $\lambda(w)$ будем находить из условия, что функция w, определяемая как неявная функция от x, y и z из уравнения $F[x, y, z, \lambda(w)] = 0$, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Оказывается, что для областей контакта, ограниченных центральными кривыми второго порядка, указанное семейство поверхностей уровня имеет вид:

$$\frac{x^2}{\lambda(w)} + \frac{y^2}{\lambda(w) + \alpha} + \frac{z^2}{\lambda(w) + \beta} = 1 \tag{1.1}$$

Постоянные α и β выбираются в зависимости от формы области (S).

Возьмем оператор Лапласа от функции w, определяемой неявно из уравнения (1.1). Получим

$$\triangle w = 2\left[\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y}{(\lambda+\alpha)^2} + \frac{z^2}{(z+\beta)^2}\right]^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda+\alpha} + \frac{1}{\lambda+\beta} - 2\frac{\lambda''}{\lambda'^2}\right) \tag{1.2}$$

Функция w будет гармоничной, если

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda+\alpha} + \frac{1}{\lambda+\beta} - 2\frac{\lambda''}{\lambda'^2} = 0 \tag{1.3}$$

Решая уравнение (1.3), найдем

$$w = \Phi(x, y, z) = C_0 \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda(x, y, z)} \frac{dt}{\sqrt{t(t+\alpha)(t+\beta)}} \tag{1.4}$$

где λ_0 и C_0 — произвольные постоянные, а $\lambda(x, y, z)$ — функция, определяемая из уравнения (1.1) как неявная.

§ 2. Выбирая надлежащим образом постоянные α и β, можно получать семейства поверхностей, вырождающихся при некотором значении параметра λ в плоские фигуры, очерченные эллипсами или гиперболами. Так, например, полагая $\beta = -a^2$, $\alpha = b^2 - a^2$, получим семейство эллипсоидов, вырождающихся при $\lambda \to a^2$ в эллиптическую область с полуосями a и b.

В этом случае имеем

$$\frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial z} = \frac{2C_0}{ab}\left(1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

что соответствует известной формуле, по которой определяется давление под эллиптическим штампом с плоским основанием.

Полагая $\beta = -a^2$, $\alpha = -b^2 - a^2$, получим случай, когда область контакта расположена между ветвями гиперболы с действительной полуосью a и мнимой полуосью b. Полагая $b = a \operatorname{ctg} \alpha$ и устремляя a к нулю, получим случай, когда область контакта ограничена прямыми $y = \pm x \operatorname{ctg} \alpha$, где 2α — угол при вершине области контакта. В этом случае имеем

$$\frac{\partial\Phi(x, y, 0)}{\partial z} = A\left(y^2 - x^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \left(A = \lim_{a\to 0}\frac{C_0}{a}\right) \tag{2.2}$$

Постоянная A может быть определена, если известно суммарное давление, приходящееся на какую-либо ограниченную часть области контакта.

Поступила 28 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., 1953.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМНОЙ МАТРИЦЫ

В. Я. Натанзон

(Москва)

Среди многочисленных способов вычисления корней полинома есть способ, основанный на определении полюсов обратной функции. Пусть

$$w = f(x) \tag{1}$$

полином с действительными коэффициентами, для которого $f(0) \neq 0$, u

$$u = \frac{1}{w} = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots \tag{2}$$