

$$\frac{p'}{\rho} = \frac{a\beta\omega^2 R^2}{2} z \left(\frac{1}{3} - x \right) + \frac{a^2\beta^2\omega^4 R^8}{64\chi\nu} (1-x)^4 -$$

$$- Q \left[\frac{8\nu}{R^2} z + \frac{a\beta\omega^2 R^4}{48\chi} x(x-3) \right] + \text{const} \quad (8)$$

где для удобства обозначено $(r/R)^2 = x$.

Видно, что полученные выражения (6), (7) для скорости и температуры представляют собой суперпозицию свободной конвекции и Пуазейлевского потока.

При достаточно больших Q ($Q \gg a\beta\omega^2 R^4 / 8\nu$) решение представляет чисто Пуазейлевское течение; $Q = 0$ соответствует чистой свободной конвекции. Следует отметить, что при значениях $Q = 1/24 (a\beta\omega^2 R^4 / 8\nu)$ скорость v обращается на оси трубы в нуль, при значении же $Q = 1/18 (a\beta\omega^2 R^4 / 8\nu)$ температура на оси трубы становится равной заданной температуре на стенке ($T' = az$).

Поступила 25 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, 1953.
2. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи, ГТТИ, 1952.
3. Сборник «Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости». ИЛ. т. II, стр. 267, 1948.

ВРЕМЯ ДО РАЗРУШЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. И. Розенблюм

(Ленинград)

Процесс ползучести металлических деталей при высоких температурах обычно по истечении более или менее продолжительного времени завершается разрушением.

В связи с этим возникает важный вопрос определения времени до разрушения (срока службы) детали. В обычной постановке задач ползучести, ограниченной рассмотрением малых деформаций, этот вопрос не обсуждается. Различают два вида разрушения — хрупкое (бездеформационное) и вязкое, происходящее вследствие значительных деформаций ползучести.

Приводимое ниже простое приближенное решение для случая больших деформаций вращающегося диска обнаруживает, что деформации начинают быстро возрастать лишь при приближении к некоторому конечному моменту времени t_* , обращаясь при $t = t_*$ в бесконечность.

Такой характер решения позволяет принять t_* в качестве характеристики срока службы ползущего диска (конечно, при условии, что разрушение его происходит по второму типу).

Подобный подход был применен недавно Хоффом в задаче растяжения цилиндрического стержня^[1]; решение полученное Хоффом, подтверждается приведенными в цитированной работе экспериментальными данными.

1. Обозначим через a_0 , b_0 внутренний и наружный радиусы диска в исходном (недеформированном) состоянии. Толщину диска в исходном состоянии h_0 будем считать постоянной.

Пусть диск вращается с постоянной угловой скоростью ω . Вследствие ползучести частицы диска будут при этом непрерывно перемещаться в радиальном направле-

нии, удаляясь с течением времени от оси вращения. Текущую координату частицы обозначим через r . Очевидно, что

$$r = r_0 + u \quad (1.1)$$

где $u(r, t)$ — мгновенное значение радиального перемещения, r_0 — начальная координата частицы.

Относительная скорость движения частицы в радиальном направлении будет

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1.2)$$

Скорости деформации по отношению к текущему (деформированному) состоянию вычисляются по формулам

$$\xi_r = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \xi_\varphi = \frac{v}{r}, \quad \xi_z = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad (1.3)$$

Здесь $h = h(r, t)$ — текущее значение толщины диска. Скорости деформации (1.3) должны удовлетворять условию неразрывности

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0 \quad (1.4)$$

При составлении уравнения равновесия также следует учитывать деформации диска. Принимая во внимание, что толщина h , вообще говоря, не остается постоянной, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} (hr\sigma_r) = h\sigma_\varphi - \rho\omega^2 r^2 h \quad (1.5)$$

Через σ_r , σ_φ здесь обозначены «истинные» напряжения, отнесенные к текущим размерам элементарной площадки.

В качестве краевых условий примем

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при } r = a, \quad r = b$$

Для описания процесса ползучести воспользуемся теорией течения, предложенной Л. М. Качановым [2].

Имея в виду рассмотрение больших деформаций диска, будем пренебрегать упругой компонентой деформации. Тогда для рассматриваемого нами случая плоского напряженного состояния

$$\sigma_r = 4g(H^2, t)(2\xi_r + \xi_\varphi), \quad \sigma_\varphi = 4g(H^2, t)(2\xi_\varphi + \xi_r) \quad (1.6)$$

Здесь $g(H^2, t)$ — экспериментально определяемая функция времени и интенсивности скоростей деформаций:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{(\xi_r - \xi_\varphi)^2 + (\xi_\varphi - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_r)^2}} \quad (1.7)$$

В дальнейшем будем пользоваться степенным представлением функции g :

$$g(H^2, t) = B_*(t) H^{\mu-1} \quad (1.8)$$

где μ — некоторое постоянное число, меньшее единицы. Заметим здесь, что экспериментальные данные, обосновывающие соотношения (1.6), (1.8), относятся к случаю сравнительно малых деформаций ползучести.

Опираясь на современные представления теории больших пластических деформаций и принимая во внимание экспериментальные результаты цитированной выше работы Хоффа, мы будем применять уравнения (1.6), (1.8) и в случае больших деформаций ползучести. При этом будем понимать под σ_r , σ_φ в этих уравнениях «истинные» значения напряжений, а скорости деформаций будем определять соотношениями (1.3)¹.

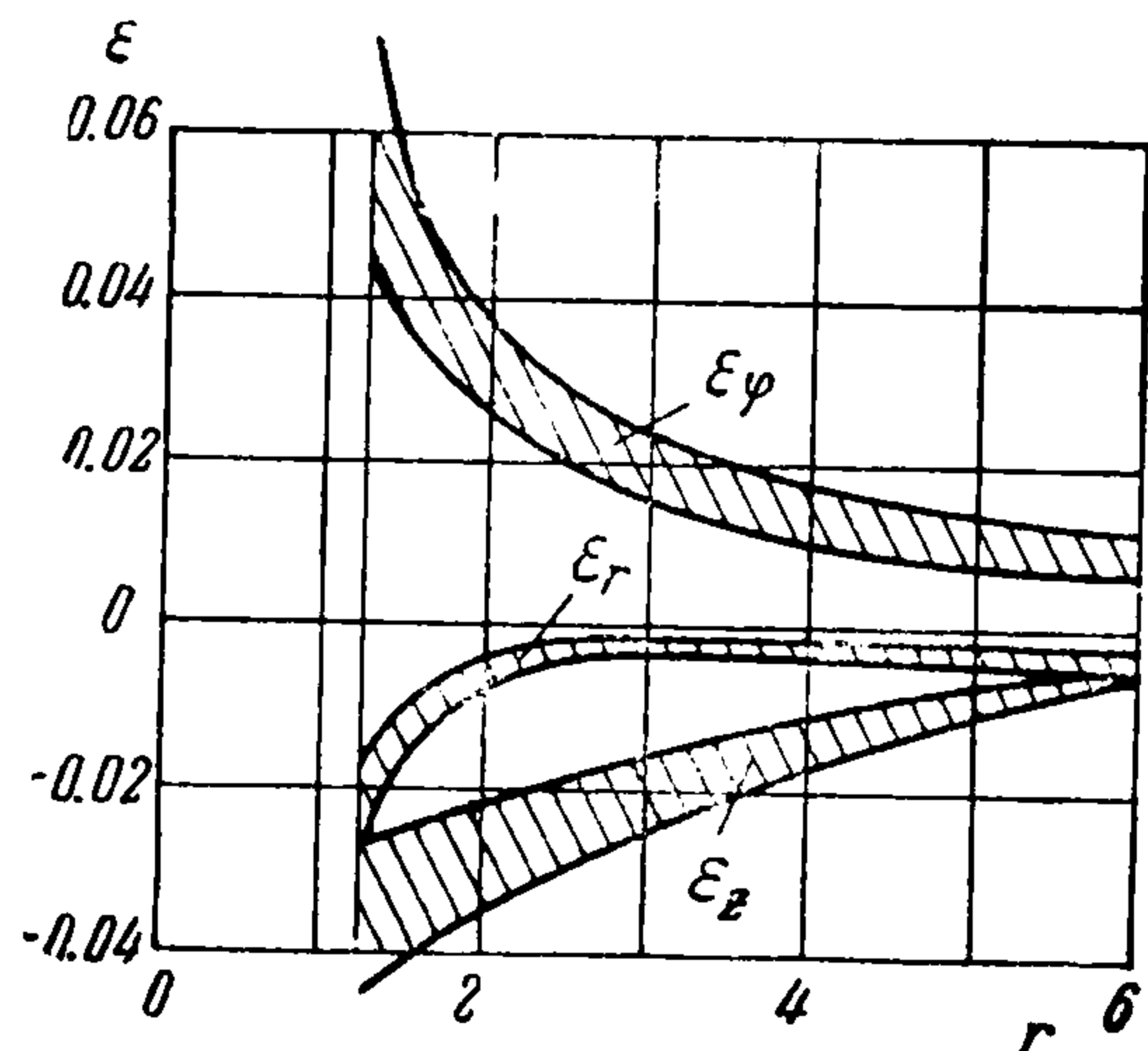
Уравнения (1.1)—(1.8) образуют полную систему уравнений задачи. Поскольку решение ее в такой форме наталкивается на большие математические трудности, мы введем в следующем разделе некоторые дополнительные предположения, существенно упрощающие решение.

¹ Отметим, что принятое в работе Хоффа логарифмическое определение деформаций по существу аналогично (1.3), так как главные оси не вращаются.

2. Обычные расчеты ползучести диска показывают, что при не слишком больших деформациях

$$\xi_r \ll \xi_z \quad (2.1)$$

На фиг. 1 приведены экспериментальные данные (зависимость деформаций ε от радиуса r в δm), полученные при испытаниях вращающихся дисков^[3]. Как видно из этого графика, соотношение (2.1) выполняется вполне удовлетворительно; локальное нарушение этого условия вблизи отверстия, по-видимому, несущественно, так как мы интересуемся в дальнейшем суммарным эффектом ползучести.



Фиг. 1.

Основываясь на этих соображениях, положим

$$\xi_r = \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (2.2)$$

Здесь мы по существу оперируем утвердившимся в прикладных вопросах механики деформируемых сред приемом разделения деформаций на основные и второстепенные с последующим пренебрежением последними («кинематические гипотезы»).

Следуя этой точке зрения, первое уравнение (1.6), определяющее напряжение σ_r , следует отбросить, заменив его соотношением (2.2). При этом σ_r может быть найдено из уравнения статики. Видоизмененная таким образом полная система уравнений задачи легко интегрируется.

Заметим прежде всего, что вследствие (2.2) радиальное перемещение u не зависит от r , т. е. $u = u(t)$. Уравнение неразрывности при этом приводится к виду

$$\frac{d}{dt}(rh) = 0 \quad \text{или} \quad rh = \text{const} = r_0 h_0 \quad (2.3)$$

Вводя (2.2) в (1.7) и учитывая (1.8) и второе уравнение (1.6), получаем

$$\sigma_\varphi = 2^{\nu+2} B_*(t) \xi_z^\nu \quad (2.4)$$

Используя (1.1), (2.3), приведем уравнение равновесия к координатам исходного состояния:

$$\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0 \sigma_r) = \frac{r_0}{r_0 + u} \sigma_\varphi - \rho \omega^2 r_0 (r_0 + u) \quad (2.5)$$

Напряжение σ_r здесь может быть исключено при помощи (2.4):

$$\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0 \sigma_r) = \frac{r_0}{r_0 + u} 2^{\nu+2} B_*(t) \left[\frac{1}{r_0 + u} \frac{du}{dt} \right]^\nu - \rho \omega^2 r_0 (r_0 + u) \quad (2.6)$$

Интегрируя это уравнение по r_0 в пределах от $r_0 = a_0$ до $r_0 = b_0$ и учитывая, что контуры диска свободны от напряжений, получим

$$2^{\nu+2} B_*(t) \left(\frac{du}{dt} \right)^\nu \int_{a_0}^{b_0} \frac{r_0 dr_0}{(r_0 + u)^{\nu+1}} = \rho \omega^2 \int_{a_0}^{b_0} (r_0 + u) r_0 dr_0 \quad (2.7)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка определяет радиальное перемещение $u(t)$.

Введем новую функцию времени

$$B_1(t) = \frac{1}{3^{1/2(m+1)} [2B_*(t)]^m} \quad \left(m = \frac{1}{\nu} \right) \quad (2.8)$$

Функция $B_1(t)$ имеет простой физический смысл, так как при этом уравнение простого растяжения записывается в виде

$$\xi_z = B_1(t) \sigma_\varphi^\nu \quad (2.9)$$

Вычисляя квадратуры и учитывая (2.8), можно представить уравнение (2.7) в виде

$$\frac{1}{B_1(t)} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{cf^m(x)} \quad \left(\frac{1}{c} = (\rho\omega^2 a_0^2)^m \left(\frac{1-\mu}{m} \right)^m \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{m+1} \right) \quad (2.10)$$

$$f(x) = \frac{\frac{\lambda\mu+x}{(\lambda+x)^\mu} - \frac{\mu+x}{(1+x)^\mu}}{\frac{\lambda^3-1}{3} + x \frac{\lambda^2-1}{2}} \quad \left(x = \frac{u}{a_0}, \quad \lambda = \frac{b_0}{a_0} \right) \quad (2.11)$$

Из (2.10) получаем

$$\int_0^t B_1(t) dt = c \int_0^x f^m(x) dx \quad (2.12)$$

Обозначим

$$\Omega_1(t) = \int_0^t B_1(t) dt, \quad F(x) = \int_0^x f^m(x) dx \quad (2.13)$$

Тогда зависимость радиального перемещения u от времени может быть представлена в форме

$$\Omega_1(t) = cF\left(\frac{u}{a_0}\right) \quad (2.14)$$

Полагая здесь $u = \infty$, находим время t_* до разрушения диска:

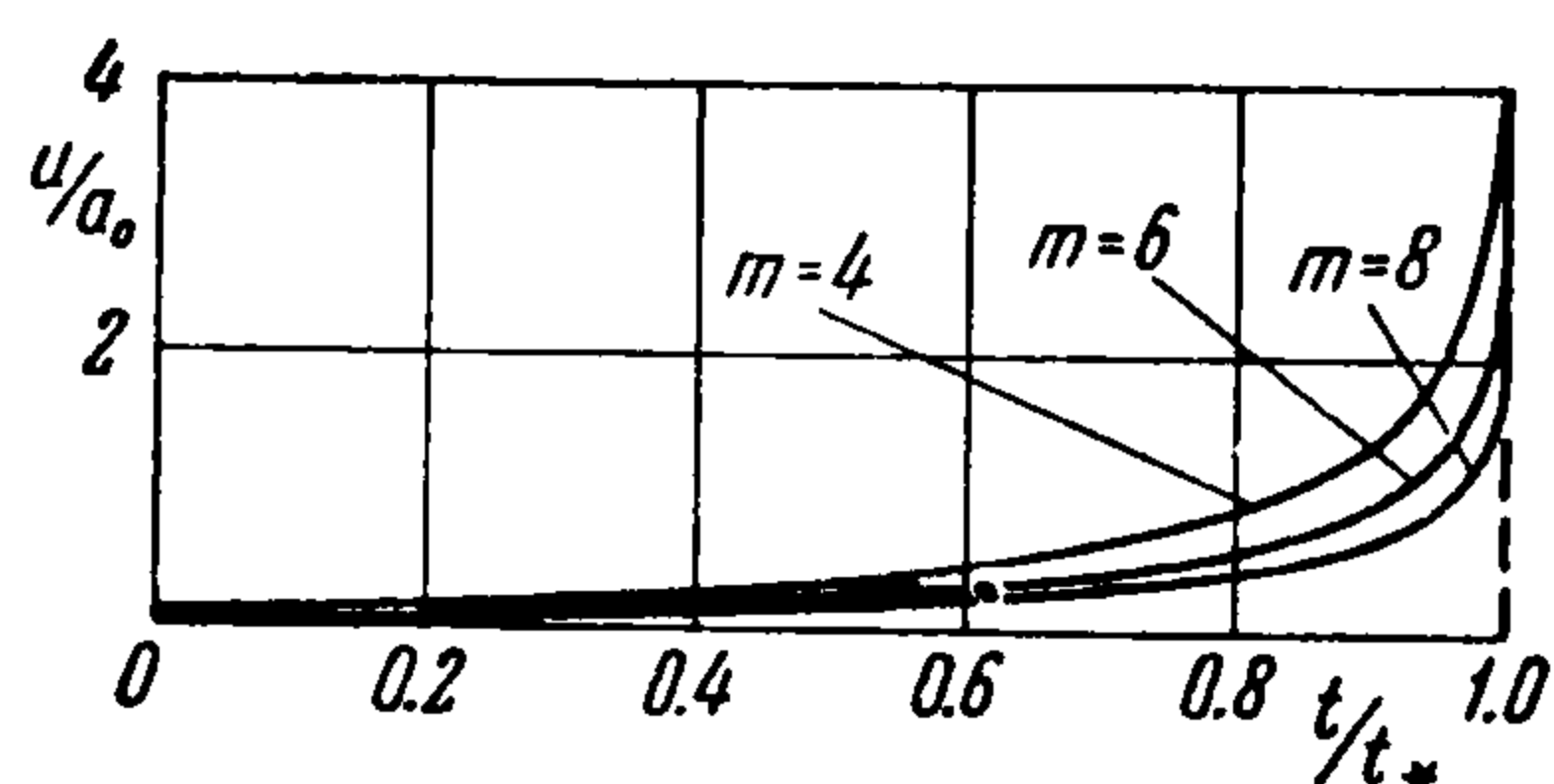
$$\Omega_1(t_*) = cF(\infty) \quad (2.15)$$

Интеграл $F(x)$ при этом вычисляется численными методами.

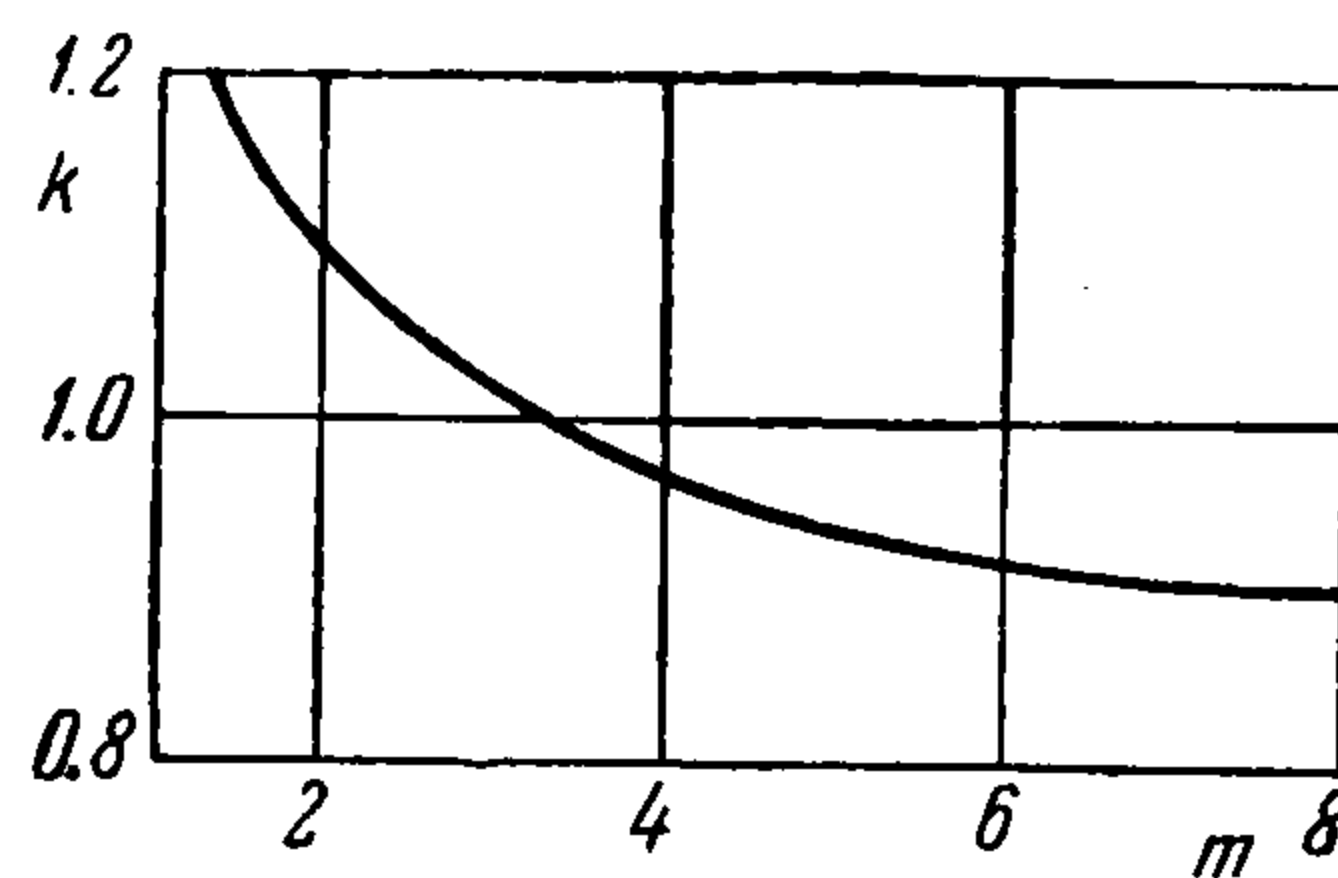
3. При больших сроках службы функцию $B_1(t)$ можно считать постоянной, равной B_1^0 . В этом случае из (2.14), (2.15) получаем

$$\frac{t}{t_*} = \frac{F(u/a_0)}{F(\infty)} \quad (3.1)$$

Графическое представление зависимости (3.1) для некоторых значений m ($\lambda = 8$) дано на фиг. 2. Как видно из этого графика, на протяжении почти всего интервала



Фиг. 2.



Фиг. 3.

времени $0 \leq t \leq t_*$ отношение u/a_0 остается весьма малым, что подтверждает возможность оценки срока службы диска временем t_* .

4. Представляет интерес выяснение корреляции времени до разрушения (длительной прочности) диска с длительной прочностью растянутого цилиндрического образца.

В связи с этим заметим, что согласно Хоффу^[1] время до разрушения цилиндрического образца определяется формулой

$$\Omega_1(t_*) = \frac{1}{m\sigma_0^m} \quad (4.1)$$

(σ_0 — номинальное напряжение в образце).

Формулу (2.15) можно представить в виде, аналогичном (4.1):

$$\Omega_1(t_*) = \frac{1}{m(k\sigma_0^0)^m} \quad (4.2)$$

где через σ_z^0 обозначено среднее по ширине диска значение σ_z (для недеформированного состояния диска):

$$\sigma_z^0 = \frac{1}{b_0 - a_0} \int_{a_0}^{b_0} \sigma_z dr_0 = \frac{1}{3} \rho \omega^2 (b_0^2 + a_0 b_0 + a_0^2) \quad (4.3)$$

Заметим, что σ_z^0 определяется непосредственно из уравнения статики и не связано поэтому со свойствами материала.

При этом коэффициент k в формуле (4.2) имеет значение

$$k = \frac{3}{1 + \lambda + \lambda^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2m} \right)^{1+\mu} \frac{1 - \mu}{F^*(\infty)} \quad (4.4)$$

При вычислениях обнаружилось, что коэффициент k практически не зависит от λ . Значения k в зависимости от m приведены на фиг. 3.

Формулы (4.1), (4.2) показывают, что время до разрушения вращающегося диска совпадает с временем до разрушения растянутого цилиндрического образца, номинальное напряжение в котором связано со средним напряжением в диске соотношением

$$\sigma_0 = k \sigma_z^0 \quad (4.5)$$

Поступила 25 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoff. Necking and Rupture of Rods Under Tensile Loads. J. Appl. Mech. No. 1, 1953.
2. Качанов Л. М., Некоторые вопросы теории ползучести, ГТТИ, 1949.
3. Wahl A. M., Creep Tests of Rotating Discs. J. Appl. Mech., № 3, 1954.

К ЗАДАЧЕ О ДАВЛЕНИИ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ШТАМПА С ПЛОСКИМ ОСНОВАНИЕМ

В. Л. Рвачев

(Осипенко)

Предлагается метод решения задачи о давлении под штампом с плоским основанием. Метод проведен для случая штампа, имеющего контакт по области, ограниченной произвольной центральной кривой второго порядка. В случае, когда область контакта ограничена двумя пересекающимися прямыми, получается решение, напоминающее решение, приведенное Л. А. Галиным^[1] для штампа клинообразной формы в плане.

§ 1. Задача о давлении на упругое полупространство штампа с плоским основанием приводится к отысканию в пространстве гармонической функции $w = \Phi(x, y, z)$, принимающей постоянное значение в точках плоской области S (при $z = 0$), имеющей форму области контакта. Эту область S можно рассматривать как одну из поверхностей уровня функции $\Phi(x, y, z)$.

Пусть $F(x, y, z, \lambda) = 0$ — уравнение семейства поверхностей уровня для функции $w = \Phi(x, y, z)$, вырождающихся при $\lambda = \bar{\lambda}$ в плоскую область (S). Так как в этом случае каждому значению w соответствует определенная поверхность уровня, то $\lambda = \lambda(w)$. Эту функцию $\lambda(w)$ будем находить из условия, что функция w , определяемая как неявная функция от x, y и z из уравнения $F[x, y, z, \lambda(w)] = 0$, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Оказывается, что для областей контакта, ограниченных центральными кривыми второго порядка, указанное семейство поверхностей уровня имеет вид:

$$\frac{x^2}{\lambda(w)} + \frac{y^2}{\lambda(w) + \alpha} + \frac{z^2}{\lambda(w) + \beta} = 1 \quad (1.1)$$

Постоянные α и β выбираются в зависимости от формы области (S).