ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ

О. С. Рыжов

(Москва)

1. В декартовой системе координат, где ось z направлена вертикально вверх. а оси x и y выбраны в горизонтальной плоскости, уравнения движения звуковых волн имеют вид [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+w\frac{d\rho_0}{dz}=0$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}-\frac{\rho'}{\rho_0^2}\frac{dp_0}{dz}=0,\qquad \frac{\partial p'}{\partial t}-\varkappa\frac{p_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial t}+w\left(\frac{dp_0}{dz}-\varkappa\frac{p_0}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\right)=0 \tag{1.1}$$

Здесь t — время, p_0 и ρ_0 — значения давления и плотности в невозмущенной атмосфере, p' и ρ' — избыточные давление и плотность в воздушной волне, u, v и w — проекции вектора скорости $\mathbf{V}$ соответственно на оси x, y и z, $\varkappa$ — показатель адиабаты. Давление p_0 и плотность ρ_0 считаем функциями только координаты z; они связаны между собой соотношением

$$\frac{dp_0}{dz}=-\rho_0 g \tag{1.2}$$

где g — ускорение силы тяжести.

В рассматриваемом акустическом приближении фронт слабой ударной волны, заданный уравнением $t=F(x, y, z)$, совпадает с характеристической поверхностью, поэтому функция t должна удовлетворять следующему уравнению [1]:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{a_0^2}\qquad \left(a_0^2=a_0^2(z)=\varkappa\frac{p_0}{\rho_0}\right) \tag{1.3}$$

где a_0 — скорость звука в невозмущенной среде. В дальнейшем считаем, что a_0 зависит от z линейно, т. е. $a_0=a_{00}-kz$, и полагаем атмосферу безграничной.

2. Рассмотрим плоскую волну, которая в начальный момент времени имела скорость, направленную вдоль оси x. Тогда начальные условия для уравнения (1.3) можно записать в виде

$$t=0 \qquad \text{при } x=0 \tag{2.1}$$

а его решение будет определяться соотношением

$$x=\frac{a_0}{k}\operatorname{sh} kt \tag{2.2}$$

Из формулы (2.2) следует, что при выбранной зависимости скорости звука от высоты (координаты z) волна, фронт которой первоначально был плоским, остается плоской во все время движения.

Обратимся теперь к вопросу о том, как изменяется амплитуда волны, т. е. избыточное давление на ее фронте. С этой целью приведем систему (1.1) к характеристикам, в результате чего вдоль характеристической поверхности, заданной соотношением (2.2), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{a_0\rho_0}{\operatorname{ch}kt}\frac{\partial u}{\partial t}+a_0\rho_0\operatorname{th}kt\frac{\partial w}{\partial t}+a_0^2\rho_0\frac{\partial w}{\partial z}+a_0\operatorname{th}kt\frac{\partial p'}{\partial z}+\frac{\partial p'}{\partial t}-\left(\frac{a_0}{\rho_0}\rho'\operatorname{th}kt-w\right)\frac{dp_0}{dz}=0 \tag{2.3}$$

Но на фронте волны функции u, w, p' и ρ' связаны между собой соотношениями

$$u=\frac{1}{a_0\operatorname{ch}kt}\frac{p'}{\rho_0},\qquad w=\frac{\operatorname{th}kt}{a_0}\frac{p'}{\rho_0},\qquad p'=a_0^2\rho' \tag{2.4}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.3), получим дифференциальное уравнение, которое определяет изменение избыточного давления на фронте волны:

$$2\frac{\partial p'}{\partial t}+2a_0\operatorname{th}kt\frac{\partial p'}{\partial z}+a_0^2\rho_0\operatorname{th}kt\frac{d(a_0\rho_0)^{-1}}{dz}p'=0 \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) имеет простое решение:

$$p' = \sqrt{a_0\rho_0}\, f\,(a_0 \operatorname{ch} kt) \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь движение элемента фронта ударной волны; его положение в пространстве описывается следующей системой уравнений, определяющей траектории или «лучи»:

$$\frac{dz}{dt} = a_0 \operatorname{th} kt, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{a_0}{\operatorname{ch} kt} \tag{2.7}$$

Решение последней системы дается формулами

$$a_0 \operatorname{ch} kt = a_0(z_0), \qquad x = \frac{a_0\,(z_0)}{k} \operatorname{th} kt \tag{2.8}$$

где z_0 — начальная координата рассматриваемого элемента. Из первой формулы (2.8) следует, что величина $a_0 \operatorname{ch} kt$ остается постоянной вдоль траектории элемента волны, значение второго множителя в формуле (2.6) зависит поэтому только от луча, значение же перепада давления на фронте волны вдоль каждого луча изменяется по закону

$$p' = \mathrm{const}\, \sqrt{a_0\rho_0} \tag{2.9}$$

Это решение было известно ранее [1] для плоской волны, распространяющейся по направлению изменения начальных параметров среды. Это связано с тем, что во все время движения в обеих задачах элемент волны сохраняет свою первоначальную форму. Действительно, пусть длина элемента в момент $t = 0$ была Δz_0, тогда в момент t его длина будет

$$\Delta l = \Delta z_0 \sqrt{\operatorname{th}^2 kt + \operatorname{ch}^{-2} kt} = \Delta z_0$$

т. е. элемент не деформируется.

Отметим еще, что при начальном (т. е. при $t = 0$) перепаде давления на фронте волны, заданном в виде $p' = \varphi(z)$, решение задачи Коши для уравнения (2.5) дается формулой

$$p' = \sqrt{\frac{\rho_0\,(z)}{\rho_0(\zeta) \operatorname{ch} kt}}\,\varphi(\zeta) \qquad \left(\zeta = \frac{a_{00} - a_0 \operatorname{ch} kt}{k}\right) \tag{2.10}$$

3. Рассмотрим волну, возникающую от действия точечного источника. В этом случае начальные значения для уравнения (1.3) будут следующими:

$$t = 0 \quad \text{при } x = y = z = 0 \tag{3.1}$$

решение же его можно представить в виде

$$x^2 + y^2 + \left[z - \frac{a_{00}}{k}(1 - \operatorname{ch} kt)\right]^2 = \frac{a_{00}{}^2}{k^2} \operatorname{sh}^2 kt \tag{3.2}$$

Из последнего соотношения следует, что фронт волны предоставляет собой сферу, центр ξ которой движется вдоль оси z по закону

$$\xi = \frac{a_{00}}{k}\,(1 - \operatorname{ch} kt)$$

а радиус R растет в соответствии с формулой

$$R = \frac{a_{00}}{k} \operatorname{sh} kt \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь вопрос об изменении перепада давления на фронте ударной волны. Для этого, как и прежде, приведем систему (1.1) к характеристикам, в результате чего получим вдоль характеристической поверхности, являющейся фронтом волны, следующее дифференциальное уравнение:

$$\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{k}{a_{00}a_0 \operatorname{sh} kt}\left\{x\frac{\partial p'}{\partial x} + y\frac{\partial p'}{\partial y} + \left[z - \frac{a_{00}}{k}(1 - \operatorname{ch} kt)\right]\frac{\partial p'}{\partial z}\right\} +$$

$$+ \left[\frac{w}{a_0{}^2} - \frac{kz - a_{00}(1 - \operatorname{ch} kt)}{\rho_0 a_{00} a_0 \operatorname{sh} kt}\,p'\right]\frac{dp_0}{dz} = 0 \tag{3.4}$$

где время t должно быть выражено через x, y, z при помощи равенства (3.2). Используя соотношения

$$u = \frac{kx}{a_{00}\,\mathrm{sh}\,kt}\frac{p'}{\rho_0 a_0}, \qquad v = \frac{ky}{a_{00}\,\mathrm{sh}\,kt}\frac{p'}{\rho_0 a_0}$$

$$w = \frac{k}{a_{00}\,\mathrm{sh}\,kt}\left[z - \frac{a_{00}}{k}(1 - \mathrm{ch}\,kt)\right]\frac{p'}{\rho_0 a_0}, \qquad p' = a_0{}^2\rho' \tag{3.5}$$

связывающие функции u, v, w, p' и ρ' на фронте волны, преобразуем уравнение (3.4):

$$2kx\frac{\partial p'}{\partial x} + 2ky\frac{\partial p'}{\partial y} + 2\left[kz - a_{00}(1 - \mathrm{ch}\,kt)\right]\frac{\partial p'}{\partial z} +$$

$$+\left[2k - \frac{kz - a_{00}(1 - \mathrm{ch}\,kt)}{\rho_0 a_0}\frac{d\rho_0 a_0}{dz}\right]p' = 0 \tag{3.6}$$

Переходя к цилиндрической системе координат, положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, упростим уравнение (3.6):

$$2kr\frac{\partial p'}{\partial r} + 2\left[kz - a_{00}(1 - \mathrm{ch}\,kt)\right]\frac{\partial p'}{\partial z} + \left[2k - \frac{kz - a_{00}(1 - \mathrm{ch}\,kt)}{\rho_0 a_0}\frac{da_0\rho_0}{dz}\right]p' = 0 \tag{3.7}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$p' = \frac{k}{a_{00}\,\mathrm{sh}\,kt}\sqrt{\frac{\rho_0}{a_0}}\,P(r, z) \tag{3.8}$$

где t — функция r и z, определяемая равенством (3.2). Подставляя выражение для p', даваемое формулой (3.8), в соотношение (3.7), получим после несложных преобразований линейное однородное уравнение, определяющее функцию P:

$$r\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{a_{00}\mathrm{ch}\,kt - a_0}{k}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{3.9}$$

Как известно, решение последнего уравнения сводится к нахождению интеграла обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dr}{r} = \frac{kdz}{a_{00}\,\mathrm{ch}\,kt - a_0} \tag{3.10}$$

Функция

$$\Psi(r, z) = \frac{r}{2a_{00}\,z - k(r^2 + z^2)} = C$$

дает искомый интеграл. Тогда решение для избыточного давления на фронте ударной волны можно представить в виде

$$p' = \frac{k}{a_{00}\,\mathrm{sh}\,kt}\sqrt{\frac{\rho_0}{a_0}}\,P\left[\Psi(r, z)\right] \tag{3.11}$$

Рассмотрим, как и ранее, движение элемента фронта ударной волны. Его положение в цилиндрической системе координат описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dt} = \frac{kra_0}{a_{00}\,\mathrm{sh}\,kt}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{a_0(a_{00}\,\mathrm{ch}\,kt - a_0)}{a_{00}\,\mathrm{sh}\,kt} \tag{3.12}$$

Деля первое из уравнений (3.12) на второе, получим уравнение (3.10). Отсюда следует, что функция P постоянна вдоль каждого луча, она может менять свое значение только при переходе от одного элемента фронта волны к другому, завися от начального распределения давления в ударной волне. Но если волна возникает от действия точечного источника, то начальное распределение всех величин на ее фронте вообще ни от чего не зависит, поэтому в этом случае $P = \mathrm{const}$ и формулу (3.11) можно представить в виде

$$p' = \mathrm{const}\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\rho_0}{a_0}} \tag{3.13}$$

Найденный закон изменения перепада давления на фронте сферической волны, распространяющейся в неоднородной атмосфере, отличается от закона его изменения в плоской волне не только множителем R^{-1}, который представляет собой «естественное» затухание сферической волны, но и множителем a_0^{-1}, появившимся в результате того, что верхняя часть волны фокусируется, а нижняя, наоборот, растягивается, проходя через слои воздуха с различными скоростями звука.

В случае, когда скорость звука в среде постоянна (т. е. в случае $k = 0$), из формулы (3.11) следует

$$p' = \frac{\sqrt{\rho_0}}{a_{00}t} f\left(\frac{r}{z}\right) \tag{3.14}$$

Отсюда для волны, порождаемой точечным источником, излучающим равномерно по всем направлениям, имеем известную [1] формулу

$$p' = \mathrm{const}\, \frac{1}{R_0} \sqrt{\rho_0} \qquad (R_0 = a_{00}t) \tag{3.15}$$

Поступила 19 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Keller J. B. Geometrical Acoustics, I. The Theory of weak shock Waves. Journal of applied Physics, vol. 25, N 8, 1954.

ЗАМЕЧАНИЕ О ЛИНЕАРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

М. И. Гуревич, М. Д. Хаскинд

(Москва, Одесса)

В работе решается задача об обтекании бесконечной пластинки плоским дозвуковым потоком невязкого газа. Уравнение неразрывности берется в линеаризированном виде, как и в методе Прандтля-Глауэрта [1]. Граничные условия записываются точно, но область течения в окрестности передней кромки пластинки не рассматривается. При такой приближенной постановке задачи с учетом высших степеней угла атаки только в граничных условиях, зависимость коэффициента подъемной силы C_y от числа M заметно отличается от той, которая дается в теории Прандтля-Глауэрта, так как при $M \to 1$ коэффициент C_y уже не стремится к бесконечности. Ввиду того, что при $M \to 1$ в газе появляются скачки уплотнения, полученной ниже формулой при больших M так же нельзя пользоваться, как и формулой Прандтля-Глауэрта.

Цель предлагаемой заметки состоит только в том, чтобы показать большую чувствительность решений уравнения газовой динамики к линеаризации граничных условий.

Рассмотрим плоскую пластинку длины $2l$, перемещающуюся с постоянной скоростью U в сжимаемой жидкости (фиг. 1, a). Для потенциала скоростей возмущенного течения $\varphi(x, y)$ имеем линеаризированное уравнение неразрывности

$$(1 - M^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Граничное условие обтекания пластинки запишем в точном виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\alpha = U\sin\alpha \tag{2}$$