КОСОЙ УДАР ДВУМЕРНОЙ СТРУИ ГАЗА В ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

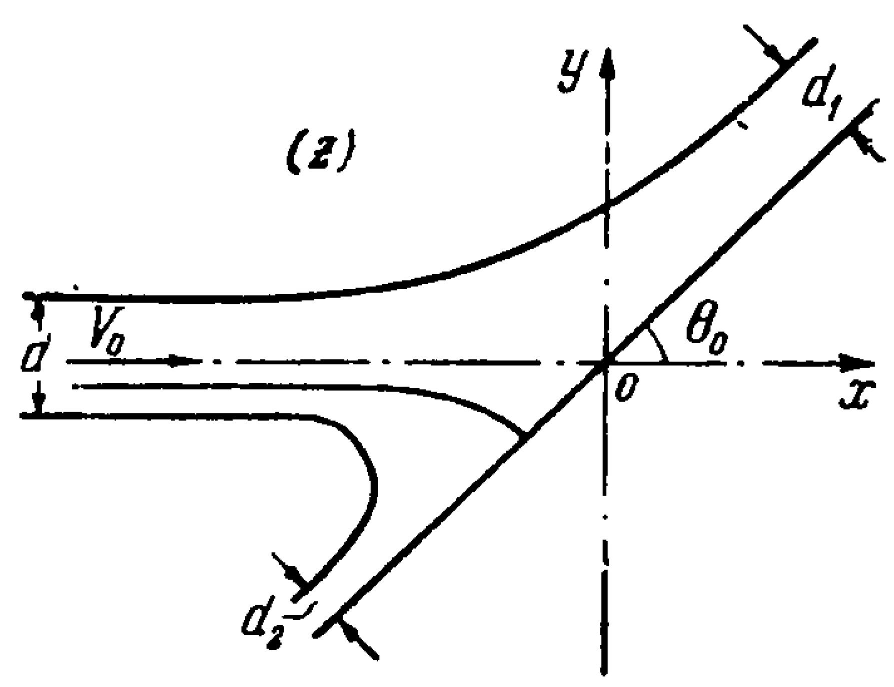
А. И. Назаров

(Москва)

Задача об ударе двумерной газовой струи в плоскую безграничную стенку в случае, когда скорость струи на бесконечности перпендикулярна стенке, решена Н. А. Слезкиным[1].

Здесь рассматривается тот случай, когда скорость струи на бесконечности образует со стенкой угол θ_0. Принятая система координат показана на фиг. 1. Обозначим через d ширину набегающей струи. Ударяясь о стенку, струя разветвляется на две струи, линии тока которых при удалении от места удара асимптотически стремятся к прямым, параллельным стенке. Пусть ширина этих струй на бесконечности будет d_1 и d_2. Предполагая течение установившимся, из закона количества движения получаем:

$$d_1 = {}^1/_2\,(1 + \cos\theta_0)\,d, \qquad d_2 = {}^1/_2\,(1 - \cos\theta_0)\,d$$



Фиг. 1.

Будем предполагать скорость струи на бесконечности V_0 меньшей скорости звука. Для решения задачи можно использовать метод Чаплыгина[2]. Как известно, этот метод сводит решение задачи о газовой струе к решению аналогичной задачи для струи несжимаемой жидкости.

Пусть $W = \Phi + i\Psi$ — комплексный потенциал течения в струе несжимаемой жидкости, V — величина скорости, θ — угол ее наклона к действительной оси плоскости течения $z = x + iy$,

$$\omega = \ln\left(V_0 \frac{dz}{dW}\right) = \ln\frac{V_0}{V} + i\theta, \qquad \theta = V_0 d$$

и, наконец, u — комплексное переменное, меняющееся в верхней полуплоскости. Тогда будем иметь[1]

$$W = -\frac{Q}{\pi}\left[(1 - a)\ln\frac{u}{u - a} + a\ln\frac{u - 1}{u - a}\right] \qquad \left(a = \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$2u - 1 = -\cos(\theta_0 + i\omega)$$

Отсюда находим

$$W = -\frac{Q}{\pi}\left[\ln\frac{1 - e^{2(i\theta_0 - \omega)}}{(1 - e^{-\omega})(1 - e^{2i\theta_0 - \omega})} + \cos\theta_0 \ln\frac{1 - e^{i\theta_0 - \omega}}{1 + e^{i\theta_0 - \omega}}\right] \tag{1}$$

Разлагая логарифмы в (1) в ряды и отделяя действительную и мнимую части, получим потенциал скоростей и функцию тока для несжимаемой жидкости:

$$\Phi = \frac{4Q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\left(\frac{V}{V_0}\right)^k \cos k(\theta - \theta_0)$$

$$\Psi = -\frac{4Q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\left(\frac{V}{V_0}\right)^k \sin k(\theta - \theta_0) \tag{2}$$

Здесь

$$a_k = \sin^2\frac{k}{2}\theta_0 \qquad \text{для } k \text{ четного}$$

$$a_k = \sin\frac{k-1}{2}\theta_0 \sin\frac{k+1}{2}\theta_0 \qquad \text{для } k \text{ нечетного}$$

На основании результатов Чаплыгина[2] функция тока для газа ψ определяется формулой

$$\psi = -\frac{4Q}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{k}\frac{Z_{k/2}(\tau)}{Z_{k/2}(\tau_0)}\sin k(\theta-\theta_0) \qquad \left(\tau=\frac{V^2}{2a}\right) \tag{3}$$

Здесь постоянная a выражается известным образом через отношение теплоемкостей γ, плотность и давление газа в точке, где $V=0$, а функция $Z_{k/2}(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{dZ_{k/2}}{d\tau}\right\}-\frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{k^2}{4}Z_{k/2}=0 \qquad \left(\beta=\frac{1}{\gamma-1}\right)$$

Из основных уравнений Чаплыгина

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=-\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

определяется потенциал скорости газа φ:

$$\varphi=\frac{8Q\tau}{\pi(1-\tau)^{\beta}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{k^2}\frac{Z'_{k/2}(\tau)}{Z_{k/2}(\tau_0)}\cos k(\theta-\theta_0)+\mathrm{const} \tag{4}$$

Положим

$$Z_{k/2}=\tau^{k/2}y_{k/2}(\tau)$$

Тогда для $y_{k/2}(\tau)$ получается гипергеометрическое уравнение

$$\tau(1-\tau)y''_{k/2}+[k+1+(\beta-k-1)\tau]\,y'_{k/2}+\frac{1}{2}\beta k(k+1)\,y_{k/2}=0$$

В этих обозначениях формулы (3) и (4) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}\psi&=-\frac{4Q}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{k}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\frac{k}{2}}\frac{y_{k/2}}{y_{k/2,\,0}}\sin k(\theta-\theta_0)\\ \varphi&=\frac{4Q}{\pi(1-\tau)^{\beta}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{k}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\frac{k}{2}}\frac{y_{k/2}}{y_{k/2,\,0}}\left(1+\frac{2\tau}{k}\frac{y'_{k/2}}{y_{k/2}}\right)\cos k(\theta-\theta_0)+\mathrm{const}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$y_{k/2}=y_{k/2}(\tau), \qquad y_{k/2,\,0}=y_{k/2}(\tau_0)$$

Полагая в (5) $\theta_0=\frac{1}{2}\pi$, получим результат, содержащийся в упоминаемой выше работе Н. А. Слезкина,

$$\psi=\frac{2Q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2k+1}\frac{y_{2k+1}}{y_{2k+1,\,0}}\frac{\sin 2(2k+1)\theta}{2k+1}$$

Для окончательного решения задачи остается найти зависимости

$$x=x(\tau,\theta), \quad y=y(\tau,\theta)$$

Их определим из уравнений

$$\sqrt{2a\tau}\,\frac{\partial x}{\partial\theta}=\cos\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{6}$$

$$\sqrt{2a\tau}\,\frac{\partial y}{\partial\theta}=\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{7}$$

$$\sqrt{2a\tau}\,\frac{\partial x}{\partial\tau}=\cos\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-\frac{\sin\theta}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \tag{8}$$

$$\sqrt{2a\tau}\,\frac{\partial y}{\partial\tau}=\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\frac{\cos\theta}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \tag{9}$$

Интегрируя (6) и (7) по θ, находим

$$\sqrt{2\alpha\tau}\,x = F_1(\tau) + \frac{4Q}{\pi(1-\tau)^\beta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{Z_{k/2,\,0}}\left\{\frac{\cos\theta'\cos k(\theta-\theta_0)}{k^2-1}\left[2\tau Z'_{k/2}+Z_{k/2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\theta\sin k(\theta-\theta_0)}{k^2-1}\left[\frac{2\tau Z'_{k/2}}{k}+kZ_{k/2}\right]\right\} \tag{10}$$

$$\sqrt{2\alpha\tau}\,y = F_2(\tau) - \frac{4Q}{\pi(1-\tau)^\beta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{Z_{k/2,\,0}}\left\{\frac{\cos\theta\sin k(\theta-\theta_0)}{k^2-1}\left[\frac{2\tau}{k}Z'_{k/2}+kZ_{k/2}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\theta\cos k(\theta-\theta_0)}{k^2-1}\left[2\tau Z'_{k/2}+Z_{k/2}\right]\right\}$$

где $F_1(\tau)$ и $F_2(\tau)$ — произвольные функции τ. Из условия $y = x\operatorname{tg}\theta_0$ на стенке получаем

$$F_2(\tau)\cos\theta_0 = F_1(\tau)\sin\theta_0$$

Положим

$$F_1(\tau) = \sqrt{2\alpha\tau}\,K(\tau)\cos\theta_0, \qquad F_2(\tau) = \sqrt{2\alpha\tau}\,K(\tau)\sin\theta_0$$

Для определения $K(\tau)$ продифференцируем выражение для x в (10) по τ и приравняем правой части (8), деленной на $\sqrt{2\alpha\tau}$. После простых преобразований будем иметь

$$K'(\tau)\cos\theta_0 = -\frac{4Q}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{Z_{k/2,\,0}}\left\{\cos\theta\cos k(\theta-\theta_0)\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{2\tau Z'_{k/2}+Z_{k/2}}{\sqrt{2\alpha\tau}(1-\tau)^\beta(k^2-1)}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{2\alpha\tau}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{Z'_{k/2}}{k^2}\right)\right]+$$

$$\left.+\sin\theta\sin k(\theta-\theta_0)\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{2\tau Z'_{k/2}+k^2Z_{k/2}}{\sqrt{2\alpha\tau}(1-\tau)^\beta k(k^2-1)}\right)-\frac{Z'_{k/2}}{k(1-\tau)^\beta}\right]\right\}$$

Отсюда получаем, что величины в квадратных скобках обращаются в нуль и, следовательно, $K(\tau) = K_0 = \mathrm{const}$.

Так как на оси x в бесконечности $\tau = \tau_0$, $\theta = 0$, то из (10) имеем

$$K_0\sin\theta_0 = -\frac{4d}{\pi(1-\tau)^\beta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k\sin k\theta_0}{k-1}\left[1-\frac{2\tau_0}{k(k+1)}\frac{y'_{k/2,0}}{y_{k/2,0}}\right]$$

В частности

$$K_0 = 0 \quad \text{при} \quad \theta_0 = {}^1\!/_2\pi$$

После этого легко находятся координаты точки встречи струи с плоскостью, т. е. точки, где $V = 0$. Полагая в (10) $\tau = 0$, находим $x = K_0\cos\theta_0$, $y = K_0\sin\theta_0$. В частности, для $\theta_0 = {}^1\!/_2\,\pi$ получаем $x = 0$, $y = 0$.

Поступила 7 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Об ударе плоской газовой струи в безграничную стенку. ПММ, т. XVI, вып. 2, 1952, стр. 227—230.

2 Чаплыгин С. А. О газовых струях. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1949.