НЕКОТОРЫЕ ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ОДНОМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Регирер

(Воркута)

В статье рассматривается установившееся одномерное течение вязкой капельной жидкости при наличии теплообмена с учетом зависимости вязкости от температуры и диссипации энергии.

Находятся все возможные решения для краевых условий простейшего типа в случае, когда скорость постоянна вдоль изотерм.

§ 1. Рассмотрим установившееся течение вязкой капельной жидкости в направлении оси OZ. Плотность жидкости ρ и ее теплопроводность k будем полагать постоянными, внешние условия и температуру T неизменными в направлении движения, вязкость жидкости — заданной функцией температуры. Из уравнения неразрывности $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, поскольку $v_x = v_y = 0$, получим $\partial v_z / \partial z = 0$ или $v_z = v(x, y)$. Очевидно, что из всех компонент тензора напряжений отличными от нуля оказываются только

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \tau_{yz} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.1}$$

Уравнения движения и энергии для течений данного типа при отсутствии массовых сил принимают вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial p}{\partial z} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

$$Jk\,\Delta T + \eta\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \tag{1.4}$$

Обычные рассуждения [11] показывают, что

$$\partial p / \partial z = \mathrm{const} = p^*$$

Из уравнений (1.1), (1.4) требуется найти $v(x, y)$ и $T(x, y)$, принимающие заданные постоянные значения на границах потока Σ.

Отметим, что возможно поставить аналогичную задачу для переменной теплопроводности $k = k(T)$. В этом случае уравнение энергии имеет вид:

$$J\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] + \eta\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \tag{1.5}$$

Если ввести здесь новую переменную

$$Q = \int_0^T k(T)\, dT$$

то имеем

$$J\Delta Q + \eta\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \tag{1.6}$$

т. е. уравнение типа (1.4), где $\eta = \eta(Q)$. Ясно, что решения и анализ систем (1.2)—(1.4) и (1.2), (1.3), (1.6) ничем по существу не будут отличаться.

В настоящей статье мы ставим своей задачей изучение таких решений системы (1.2)—(1.4), для которых

$$\frac{D(\;}{D(x, y)} = 0 \tag{1.7}$$

т. е. $v = v(T)$ и скорость постоянна на изотермах. Из этого условия следует, что можно построить функцию

$$r = \int_0^v \eta(v)\, dv \tag{1.8}$$

такую, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \tau_{xz} = \eta \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \tau_{yz} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.9}$$

Граничные условия для r находятся при помощи (1.8) и имеют тот же вид, что и для $v(x, y)$, $T(x, y)$ — постоянные значения на границах потока. Полагая в (1.2), (1.4) r в качестве новой независимой переменной для v и T, получим, во-первых, краевую задачу

$$\Delta r = p^*, \qquad r\,|_{\Sigma_i} = r_i = \text{const} \tag{1.10}$$

и, во-вторых, уравнение

$$Jk \frac{dT}{dr} \Delta r + \left[Jk \frac{d^2T}{dr^2} + \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2\right] \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right] = 0$$

Из (1.8) следует, что $\partial v/\partial r = \eta^{-1}$, и, кроме того, известно, что $\Delta r = p^*$. Таким образом, окончательная форма уравнения энергии

$$Jk \frac{dT}{dr} p^* + \left(Jk \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{\eta}\right) \left[\left(\frac{\partial r}{\partial k}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \tag{1.11}$$

В дальнейшем рассмотрим это уравнение для двух принципиально различных задач, когда $p^* \neq 0$ и $p^* = 0$.

§ 2. Предположим, что $p \neq 0$, т. е. случай напорного течения в трубе некоторого заданного профиля. Для того чтобы удовлетворялось уравнение (1.11), необходимо иметь

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = F(r) \tag{2.1}$$

так как остальные его члены зависят только от r. Тогда для определения $r(x, y)$ мы имеем краевую задачу (1.10) и дополнительное условие (2.1). Следует ожидать, что решение краевой задачи (1.10) лишь в ограниченном числе случаев будет удовлетворять условию (2.1), причем $F(r)$ в каждом таком случае будет определяться автоматически. Следовательно, необходимо найти[1] все виды контуров Σ, для которых совпадают решения уравнений (1.10) и (2.1), удовлетворяющие условиям $r = r_i$ на Σ_i.

Если эта задача будет решена, то нахождение $r(x, y)$ и искомых функций, вообще говоря, не представит принципиальных затруднений. Решение этой проблемы может быть осуществлено следующим образом. Посредством дифференцирования и несложных алгебраических операций из уравнений (1.10), (2.1) можно получить

$$\frac{2\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - \left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}}{\left[\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{F}}\left(p^* + \frac{1}{2}\frac{dF}{dr}\right) = \mathrm{K}(r) \tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что левая часть (2.2) есть выражение кривизны плоской кривой $r(x, y) = \text{const}$, т. е. линии уровня [3] поверхности $r = r(x, y)$. Уравнение (2.2) показывает, что кривизна каждой линии уровня есть величина постоянная, определяющаяся лишь высотой уровня. Поскольку граничный контур есть также линия уровня и ее уравнение $r(x, y) = r_i$, то из (2.2) следует, что граничный контур есть кривая постоянной кривизны $\mathrm{K}(r_i)$.

---

[1] Аналогичная по математической формулировке задача была ранее поставлена Н. А. Слезкиным [2], однако решение ее не было указано.

Если вернуться теперь к уравнению (2.1), представляющему собой условие постоянства квадрата модуля градиента $|\mathrm{grad}\, r|^2$ на линиях уровня поверхности $r = r(x, y)$, то становится очевидным, что линии уровня, а следовательно, и граничные контуры суть либо параллельные прямые, либо концентрические окружности.

Следовательно, условие постоянства скорости на изотермах в случае напорного течения с постоянными температурой и скоростью на границе справедливо только для трех задач: а) течение между параллельными плоскими стенками; б) течение в трубе круглого сечения; в) осевое течение между соосными круговыми цилиндрами. Ниже рассматриваются эти три задачи.

а) *Течение между параллельными плоскими стенками.* Слой вязкой жидкости расположен между бесконечными плоскостями $y = 0$ и $y = h$. Граничные условия

$$v = 0, \quad T = T_0 \quad \text{при } y = 0; \qquad v = U, \quad T = T_h \text{ при } \quad y = h \tag{2.3}$$

Из уравнения (1.2) получаем

$$\frac{d}{dy}\left(\eta \frac{dv}{dy}\right) = p^* \tag{2.4}$$

Отсюда

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} = p^* y + \tau_0 \tag{2.5}$$

где $\tau_0 = \tau(0)$ — постоянная, подлежащая определению из условий (2.3). Подставляя выражение (2.5) для τ в уравнение энергии

$$Jk \frac{d^2T}{dy^2} + \eta \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 = 0 \tag{2.6}$$

получим

$$\frac{d^2T}{dy^2} + \frac{(p^* y + \tau_0)^2}{Jk\eta(T)} = 0 \tag{2.7}$$

Примем зависимость вязкости от температуры по гиперболическому закону (см., например, [12])

$$\eta(T) = \eta_m \frac{1}{1 + \alpha^2 (T - T_m)} \tag{2.8}$$

где α^2 — постоянная, T_m — характерная температура, $\eta_m = \eta(T_m)$. Вводя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{p^* y + \tau_0}{p^* h}, \qquad \psi = 1 + \alpha^2 (T - T_m) \tag{2.9}$$

получим уравнение относительно текучести ψ

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \Pi^2 \psi \xi^2 = 0 \qquad \left(\Pi^2 = \frac{h^4 \alpha^2 p^{*2}}{Jk\eta_m}\right) \tag{2.10}$$

где Π^2 — параметр, характеризующий диссипативный эффект.

Решение уравнения (2.10) выражается через цилиндрические функции и имеет вид [4]:

$$\psi = \sqrt{|\xi|}\left[C_2 J_{1/4}\left(\frac{\Pi\xi^2}{2}\right) + C_3 J_{-1/4}\left(\frac{\Pi\xi^2}{2}\right)\right] = \sqrt{|\xi|}\, Z_{1/4}\left(\frac{\Pi\xi^2}{2}\right) \tag{2.11}$$

Граничные условия для ψ получаются из (2.3):

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 = \frac{\tau_0}{hp^*}, \qquad & \psi &= \psi_1 \\ \xi &= \xi_2 = 1 + \frac{\tau_0}{hp^*}, \qquad & \psi &= \psi_2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Удовлетворяя в (2.11) этим условиям, можно выразить постоянные C_2 и C_3 через τ_0, содержащееся в ξ_1, ξ_2 и Π.

Для определения скорости воспользуемся формулами (2.5), (2.9), откуда

$$\frac{dv}{d\xi}=\frac{h^2p^*}{\eta_m}\psi\xi \tag{2.13}$$

Интегрируя и удовлетворяя условию $v=0$ при $\xi=\xi_1$, будем иметь

$$v=\frac{h^2p^*}{\eta_m}\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\xi\sqrt{|\xi|}\,Z_{1/4}\left(\frac{\Pi\xi^2}{2}\right)d\xi \tag{2.14}$$

Удовлетворяя второму условию $v=U$ при $\xi=\xi_2$, находим трансцендентное уравнение

$$U=\frac{h^2p^*}{\eta_m}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\xi\sqrt{|\xi|}\,Z_{1/4}\left(\frac{\Pi\xi^2}{2}\right)d\xi \tag{2.15}$$

из которого определяется значение τ_0. Очевидно, что это уравнение может иметь не одно решение, поэтому следует выбирать то значение напряжения τ_0, которое обращается в нуль при $p^*=0$ и $U=0$, т. е. при отсутствии движения.

Определение расходной характеристики потока

$$Q=\int\limits_0^h v(y)\,dy=h\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}v(\xi)\,d\xi$$

после интегрирования по частям и использования (2.13) и (2.11) приведет к трансцендентному уравнению, связывающему расход жидкости Q с напором p^*, входящим в Π, ξ_1, ξ_2 и т. д.

б) *Течение в круглой трубе*[1]. Вместо уравнений (1.1)—(1.4) рассмотрим соответствующие уравнения в цилиндрических координатах [1]. При отсутствии массовых сил ввиду осевой симметрии имеем

$$\frac{d\tau}{dr}+\frac{\tau}{r}=p^* \qquad \left(\tau=\eta\frac{dv}{dr}\right) \tag{2.16}$$

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{\tau^2}{Jk\eta(T)}=0 \tag{2.17}$$

Интегрируя (2.16) и требуя, чтобы $\tau(r)$ было ограничено при $r=0$, получаем

$$\tau=\frac{1}{2}p^*r \tag{2.18}$$

После подстановки этого выражения в (2.17) и перехода к безразмерным переменным $\xi=r/R$, $\psi=\eta_m/\eta$, где R — радиус трубы, $\eta(T)$ дается формулой (2.8), приходим к уравнению

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\psi}{d\xi}+\Pi^2\psi\xi^2=0 \qquad \left(\Pi^2=\frac{R^4\alpha^2p^{*2}}{4Jk\eta_m}\right) \tag{2.19}$$

Граничные условия для текучести ψ имеют следующий вид:

$$\psi=\psi_1 \quad \text{при } r=R \ (\xi=1), \qquad \psi<+\infty \quad \text{при } r=0 \ (\xi=0)$$

Интеграл уравнения (2.19), удовлетворяющий этим условиям, выражается через цилиндрические функции

$$\psi=\frac{J_0(^1/_2\,\Pi\xi^2)}{J_0(^1/_2\,\Pi)} \tag{2.20}$$

---

[1] Как указано в статье [5], задача о тепловом эффекте в капилляре была рассмотрена Бринкманом [6]. К сожалению, нам не удалось ознакомиться с этой работой.

Дальнейший ход рассмотрения задачи полностью аналогичен предыдущему решению. Для распределения скоростей при выполнении условия $v=0$ при $\xi=1$ получаем

$$v=\frac{R^2p^*}{2\eta_m J_0(^1/_2\,\Pi)}\int\limits_1^\xi \xi J_0\left(\frac{\Pi\xi^2}{2}\right)d\xi \tag{2.21}$$

Для расходной характеристики течения

$$Q=2\pi\int\limits_0^R rv(r)\,dr$$

применяя ту же последовательность операций, что и в n° (а), будем иметь

$$Q=\frac{\pi R^2}{\alpha}\left(\frac{Jk}{\eta_m}\right)^{1/2}\frac{J_1(^1/_2\,\Pi\xi^2)}{J_0(^1/_2\,\Pi)} \tag{2.22}$$

в) *Осевое течение в зазоре между соосными круговыми цилиндрами.* В качестве исходных уравнений используем (2.16) и (2.17). Интегрируя (2.16), найдем

$$\tau=\frac{rp^*}{2}+\frac{C_1}{r} \tag{2.23}$$

где C_1 — постоянная. Переходя к безразмерным величинам и используя соотношение (2.8) для $\eta=\eta(T)$, получим уравнение

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\psi}{d\xi}+\Pi^2\left(\xi+\frac{D}{\xi}\right)^2=0 \tag{2.24}$$

где

$$\xi=\frac{r}{R_1},\qquad \psi=\frac{\eta_m}{\eta},\qquad D=\frac{2C_1}{R_1^2p^*},\qquad \Pi^2=\frac{R_1^4\alpha^2p^{*2}}{4Jk\eta_m}$$

причем через R_1 и R_2 обозначены соответственно радиусы внутреннего и внешнего цилиндров. Граничные условия для (2.24)

$$\psi=\psi_1\quad \text{при } r=R_1,\ \xi=1;\qquad \psi=\psi_2\quad \text{при } r=R_2,\ \xi=\xi_2 \tag{2.25}$$

Общий интеграл уравнения (3.25) представляется в функциях Уиттекера [7]

$$\psi=\frac{1}{\xi}\left[C_2W_{\lambda,\,\mu}(-i\Pi\xi^2)+C_3W_{-\lambda,\,\mu}(i\Pi\xi^2)\right] \tag{2.26}$$

где $\lambda={}^1/_2 i\Pi D$, $\mu=i\Pi D$. Постоянные C_2 и C_3 выражаются через C_1 при помощи граничных условий (2.25).

Для определения скорости так же, как и ранее, используем соотношение $\tau=\eta dv\,/\,dr$ и формулу (2.23), что в безразмерных величинах даст

$$\frac{dv}{dr}=\left(\frac{R_1^2p^*}{2}\xi+\frac{C_1}{\xi}\right)\frac{\psi}{\eta_m} \tag{2.27}$$

Интегрируя (2.27) и удовлетворяя, например, условию $v=0$ при $\xi=1$ (внутренний цилиндр неподвижен), получим

$$v=\int\limits_1^\xi\left(\frac{R_1^2p^*}{2}+\frac{C_1}{\xi^2}\right)\frac{1}{\eta_m}\left[C_2W_{\lambda,\,\mu}(-i\Pi\xi^2)+C_3W_{-\lambda,\,\mu}(i\Pi\xi^2)\right]d\xi \tag{2.28}$$

Полагая здесь $\xi=\xi_2$ и $v=U$, получим уравнение для отыскания постоянной C_1, входящей в λ и μ. Так же, как и ранее, можно, интегрируя $(2\pi rv)$ в пределах от R_1 до R_2, получить расходную характеристику Q и ее связь с напором p^*.

§ 3. Перейдем теперь к так называемым безнапорным течениям, когда $p^*=0$, и движение жидкости вызывается только разницей в скоростях граничных поверхностей. Сечение потока для простоты можно полагать заведомо двусвязной областью.

Из уравнения (1.10) для функции r вытекает уравнение Лапласа

$$\Delta r=0 \tag{3.1}$$

Из уравнения энергии (1.11) при $p^* = 0$ находим

$$\left(Jk\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{\eta(T)}\right)\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \tag{3.2}$$

Поскольку $r \neq \mathrm{const}$ (в противном случае $\tau_{xz} \equiv 0$ и $\tau_{yz} \equiv 0$, т. е. течения нет), то и $(\partial r/\partial x)^2 + (\partial r/\partial y)^2 \neq 0$ и мы, следовательно, независимо от вида $r(x, y)$ приходим к уравнению[1]

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{Jk\eta(T)} = 0 \tag{3.3}$$

Таким образом, в случае безнапорного течения условие постоянства скорости на изотермах всегда выполняется. Решение системы (1.2), (1.4) сводится к решению краевой задачи для уравнения (3.1):

$$r = r_1 \quad \text{на } \Sigma_1; \qquad r = r_2 \quad \text{на } \Sigma_2 \tag{3.4}$$

где r_1 и r_2 — некоторые пока неизвестные постоянные. Полученное выражение $r = r(x, y, r_1, r_2)$ затем подставляется в решение уравнения (3.3), что дает нам

$$T = T(x, y, r_1, r_2, C_1, C_2) \tag{3.5}$$

Наконец, учитывая определение r (1.8), для отыскания скорости используем уравнение

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\eta[T(r)]}$$

После интегрирования получаем

$$v = v(x, y, r_1, r_2, C_1, C_2, C_3) \tag{3.6}$$

Удовлетворяя в (3.5) и (3.6) граничным условиям и используя соотношение

$$r_1 = \int_0^{v_1} \eta(v)\, dv \tag{3.7}$$

получим систему пяти уравнений, которая даст все постоянные r_1, r_2, C_1, C_2, C_3. Отметим, что из них только четыре независимы друг от друга.

Для рассматриваемого класса течений можно получить интеграл подобия, аналогичный интегралу Стодолы-Крокко (например, [10]). Из уравнений (1.2) и (1.4), умножая первое на Jkv и складывая со вторым, получаем (при $\partial p / \partial z = 0$)

$$\Delta(JkT + R) = 0 \qquad \left(R = \int_0^v v\eta(v)\, dv\right) \tag{3.8}$$

Сравнивая (3.8) с (3.1) и учитывая аналогичность граничных условий для T и v, а следовательно, и для r и R, обнаружим, что решения уравнений (3.1) и (3.8) связаны между собой линейной зависимостью

$$JkT + R = \frac{Jk(T_2 - T_1) + R_2 - R_1}{r_2 - r_1}\, r + \frac{Jk(T_2 r_1 - T_1 r_2) + R_2 r_2 - R_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{3.9}$$

Уравнение Лапласа (3.1) с аналогичными граничными условиями встречается в задачах о плоском безвихревом движении несжимаемой жидкости.

Рассмотрим вспомогательное плоское течение в области S, расположенной между контурами Σ_1 и Σ_2, причем потребуем, чтобы сами эти контуры являлись линиями тока, а функция тока принимала на них соответственно значения $\psi_1 = v_1$ и $\psi_2 = v_2$, т. е. равные граничным скоростям в изучаемой термогидродинамической задаче.

Если $W = \varphi + i\psi$ есть комплексный потенциал этого вспомогательного движения, то ψ должно удовлетворять уравнению Лапласа и условиям $\psi = v_1$ на Σ_1 и $\psi = v_2$ на Σ_2.

---

[1] Уравнение (3.3) было решено в работах [1, 8, 9] для случая $r = Cy$, т. е. для течения между параллельными стенками.

Вид уравнений для r (3.1) и для ψ одинаков:

$$\Delta r = 0, \qquad \Delta\psi = 0 \tag{3.10}$$

а граничные условия отличаются численно:

$$r = r_1 = \int_0^{v_1} \eta(v)\,dv, \qquad \psi = \psi_1 = v_1 \qquad \text{на } \Sigma_1$$

$$r = r_2 = \int_0^{v_2} \eta(v)\,dv, \qquad \psi = \psi_2 = v_2 \qquad \text{на } \Sigma_2$$

Поэтому интересующие нас решения уравнений (3.10) связаны линейной зависимостью

$$r = \frac{r_2 - r_1}{v_2 - v_1}\psi + \frac{r_1 v_2 - r_2 v_1}{v_2 - v_1}$$

Здесь коэффициенг при ψ есть среднее значение вязкости, полученное усреднением по полю скоростей:

$$\frac{r_2 - r_1}{v_2 - v_1} = \frac{1}{v_2 - v_1}\int_{v_1}^{v_2} \eta(v)\,dv = \eta_{v\text{ср}}$$

Рассуждая далее так же, как это делается в обычной, изотермической гидродинамике [11], найдем, что сила трения, действующая на какой-либо граничный цилиндр в расчете на единицу длины цилиндра, равна произведению вязкости, усредненной по полю скоростей, на циркуляцию скорости вспомогательного плоского течения по контуру поперечного сечения цилиндра, причем контур обходится в положительном направлении, т. е.

$$T_{mp} = \eta_{v\text{ср}}\Gamma \tag{3.11}$$

В заключение считаю своим долгом выразить искреннюю признательность С. Л. Соболеву, Н. А. Слезкину и Т. Я. Гораздовскому за их ценные советы.

Поступила 24 I 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений, ГИТТЛ, 1951.
2. Слезкин Н. А. О геометрически подобных плоских потоках идеальной и вязкой жидкости. ПММ, т. 111, № 1, 1936, стр. 154—158.
3. Погорелов А. В. Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков, 1955.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. ИЛ, 1949.
5. Carrier G. F., Lewis J. A. On heat transfer problems in viscous flow. Quart. Appl. Math., vol. 7, 1950, p. 450—457.
6. Brinkman J. H. C. Heat effects in capillary flow. Appl. Sci. Res., vol. A2, N 2, 1950, p. 120.
7. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, т. II. ГТТИ, 1934.
8. Hagg A. C. Heat effects in lubricating films. Journ. Appl. Mech., vol. 11, 1944, p. A72.
9. Павлин А. К. Об одном случае интегрирования уравнений движения вязкой жидкости с переменным коэффициентом вязкости. ПММ, т. XIX, вып. 5, 1955, стр. 635—638.
10. Калихман Л. Е. Газодинамическая теория теплопередачи. Труды НИИ-1 МАП, № 14, 1946.
11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II. ГИТТЛ, 1948.
12. Гораздовский Т. Я., Регирер С. А. Движение ньютоновской жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами при наличии внутренних тепловых процессов, влияющих на вязкие свойства. ЖТФ, т. XXVI, вып. 7, 1956, стр. 1532—1541.