ОБ ОДНОМ ВИДЕ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПЛОЩАДЕЙ

А. А. Богоявленский

(Москва)

В работе Чаплыгина [1] в § 4 рассматривается вопрос об интеграле, который характеризует воздействие количества движения одной части системы на главный момент другой.

Получаемый интеграл уравнений движения системы может существовать при несколько иных силах и связях, наложенных на систему. Примем обозначения величин и определения, как у Чаплыгина.

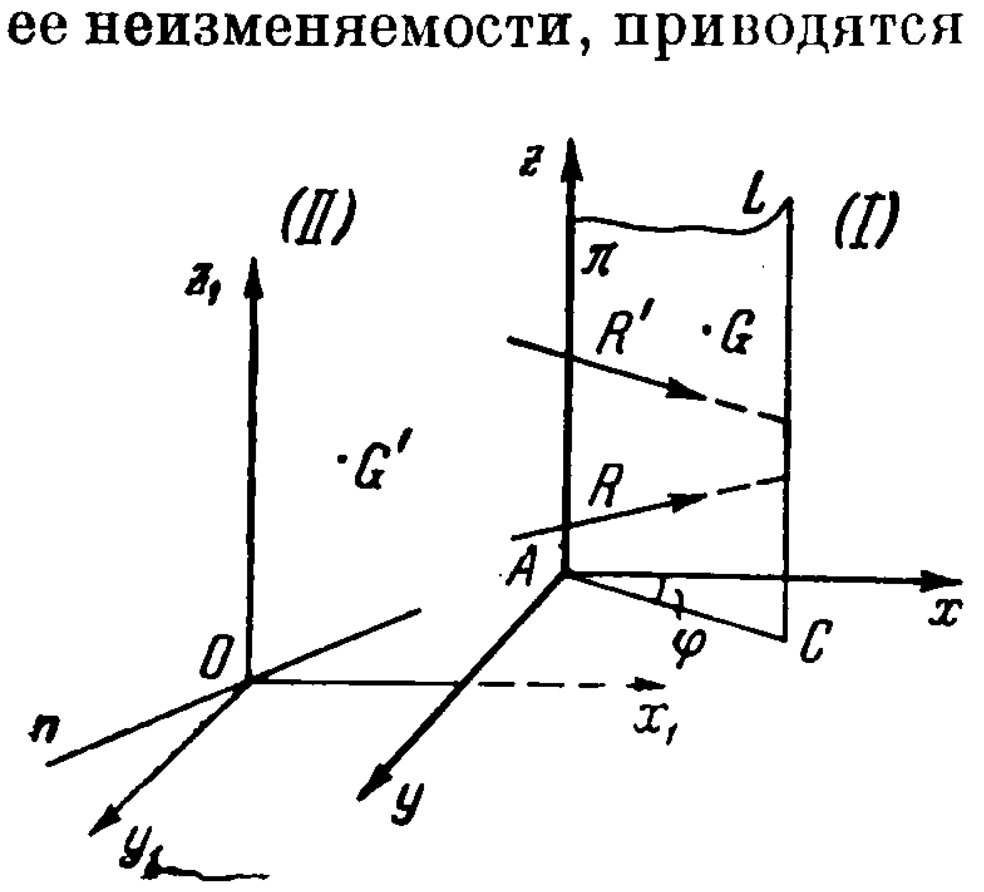
Пусть механическая система (Λ), состоящая из произвольного числа материальных точек $(m_1, m_2, \ldots)$, может быть разделена на две части (I) и (II).

Система находится под действием произвольных внутренних сил, действующих между точками этих двух частей системы, если рассматривать части системы отдельно одну от другой.

Внешние силы, действующие на систему (1), если их сложить в предположении ее неизменяемости, приводятся к двум силам, пересекающим неизменно направленную подвижную прямую Az, которая постоянно проходит через движущуюся точку A. Положение этой точки относительно неподвижных осей $Ox_1y_1z_1$ определяется координатами α, β, γ, которые связаны с координатами α^0, β^0, γ^0 центра тяжести G системы (I) относительно тех же осей соотношениями

$$\alpha^0 = \lambda\alpha + \alpha_0, \quad \beta^0 = \lambda\beta + \beta_0, \quad \gamma^0 = \lambda\gamma + \gamma_0$$

где λ, α_0, β_0, γ_0 — произвольные постоянные.



Фиг. 1.

Точка A имеет скорость, параллельную скорости центра тяжести G системы (I).

Подвижные оси $Axyz$, связанные с точкой A, перемещаются, оставаясь все время параллельными неподвижным осям (фиг. 1). Силы воздействия системы (I) на систему (II), слагаясь, приводятся к двум силам R и R', которые постоянно пересекают прямую CL, параллельную Az. След C этой прямой на плоскости Axy имеет неизменное расположение. Проекции сил R и R' на оси обозначим соответственно через R_x, R_y, R_z, R_x', R_y', R_z'.

Внешние силы, действующие на систему (II) по сложении, в предположении ее неизменяемости, дают произвольную пару и силу, параллельную плоскости π, проходящей через прямые Az и CL.

Связи, наложенные на систему, таковы, что они все время допускают вращение системы (I) без изменения конфигурации вокруг подвижной прямой Az и поступательное перемещение системы (II) без изменения конфигурации по неизменному направлению прямой n, все время перпендикулярной плоскости π. При этом возможные перемещения одной части системы (Λ) рассматриваются в предположении освобождения от второй части с заменой последней силами воздействия второй части системы на первую.

Обозначим через M сумму масс системы (1), через M' — сумму масс системы (II), через a и b — координаты точки C и через ξ, η, ζ — координаты центра тяжести G' системы (II) относительно осей $Axyz$. Координаты точки G' относительно неподвижных осей будут

$$\xi + \alpha, \quad \eta + \beta, \quad \zeta + \gamma$$

Применяя к системе (II) теорему о движении центра тяжести вдоль прямой n, будем иметь уравнение

$$M'\left[\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\sin\varphi - \left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\cos\varphi\right] =$$
$$= (R_x + R_x')\sin\varphi - (R_y + R_y')\cos\varphi$$

где φ — угол между прямой неизменного направления AC и осью Ax.

Умножив обе части уравнения на величину расстояния AC, получим

$$M'\left[\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)b-\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)a\right]=(R_x+R_x')\,b-(R_y+R_y')\,a \qquad (1)$$

Изображая количество движения каждой точки системы (I) вектором и складывая все эти векторы так, как складываются силы, приложенные к точкам в предположении неизменяемости системы, получим главный вектор $\mathbf{Q}$ и пару, характеризуемую кинетическим моментом $\mathbf{S}$, т. е. бивектор количества движения системы (I) (согласно Гамильтону).

Отнесем бивектор количества движения системы (I) к подвижной точке приведения A; тогда производная приведенного к точке A вектора кинетического момента $\mathbf{S}$, вычисленная так, как если бы эта точка предполагалась неподвижной, имеет вид:

$$\left(\frac{d\mathbf{S}_A}{dt}\right)^0=\frac{d\mathbf{S}_A}{dt}+\mathbf{V}_A\times\mathbf{Q}$$

Так как скорость $\mathbf{V}_A$ точки A параллельна скорости центра тяжести G, то

$$\mathbf{V}_A\times\mathbf{Q}=0 \qquad (2)$$

Силы, действующие на систему (I), также приводятся к бивектору сил, который мы будем относить к подвижной точке A.

Применяя теорему о моменте количества движения системы (I), подсчитанном в системе осей $0x_1y_1z_1$, отнесенном к подвижной оси Az, в силу (2) получим

$$\left(\frac{d\mathbf{S}_A}{dt}\right)_z=b\,(R_x+R_x')-a\,(R_y+R_y') \qquad (3)$$

Имея выражения координат центра тяжести G относительно осей $Axyz$ в виде

$$\alpha(\lambda-1)+\alpha_0,\qquad \beta(\lambda-1)+\beta_0,\qquad \gamma(\lambda-1)+\gamma_0$$

можем записать

$$(\mathbf{S}_z)_A=\sum_{(I)}m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+M(\lambda-1)\left(\alpha\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\alpha}{dt}\right)+M\left(\alpha_0\frac{d\beta}{dt}-\beta_0\frac{d\alpha}{dt}\right) \qquad (4)$$

Уравнения (1), (3) в силу (4) дают следующий интеграл:

$$\sum_{(I)}m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+M'\left(a\frac{d\eta}{dt}-b\frac{d\xi}{dt}\right)+$$
$$+M(\lambda-1)\left(\alpha\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\alpha}{dt}\right)+(M\alpha_0+M'a)\frac{d\beta}{dt}-(M\beta_0+M'b)\frac{d\alpha}{dt}=\mathrm{const} \qquad 5$$

Указанный интеграл является интегралом циклического перемещения по Н. Г. Четаеву , если за циклическое перемещение принять возможный поворот системы (I) вокруг прямой Az на угол $\delta\theta$ и одновременное перемещение системы (II) вдоль прямой n на расстояние δl в предположении неизменяемости систем (I) и (II). Эти возможные перемещения связаны между собой соотношением

$$\delta l=\sqrt{a^2+b^2}\,\delta\theta$$

Направление перемещения δl при этом совпадает с направлением поворота от оси Ax к оси Ay и возможные перемещения систем (I) и (II) рассматриваются в предположении, которое было высказано о них ранее.

Рассмотренная механическая система материальных точек (Λ) допускает возможность обобщения в смысле С. А. Чаплыгина (см. § 5 работы Чаплыгина [1]).

Приношу глубокую благодарность Н. Г. Четаеву, под впечатлением лекций которого в Московском университете по интегрированию уравнений динамики написана эта заметка.

Поступила 28 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров. Соб. соч., т. I, Гостехиздат, 1948, стр. 26—56.
2. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, т. V, вып. 2, 1941, стр. 253—262.