Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЙ

Н. Г. Четаев
(Москва)

В исследовании прикладных задач динамики применяются приближенные способы, которые обычно состоят из некоторой последовательности алгорифмических шагов; практически ограничиваются первыми шагами. Никакой подобный способ исследований не может почитаться приемлемым, если отсутствуют оценки его результатов по сравнению с истинным решением.

Вопросы оценок и сходимости приближенных методов были предметом многих замечательных математических исследований. Некоторые из таких вопросов имеют много общего с известными задачами об устойчивости движения и допускают применение метода Ляпунова, развитого им в сочинении «Общая задача об устойчивости движения».

1. Будем заниматься системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

для вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$ от независимого вещественного времени t. Правые части уравнений предполагаем голоморфными функциями переменных x_s в некоторой области D пространства $\{x_s\}$ для всех значений времени.

Допустим, что в некотором способе предлагается приближенное решение

$$x_s = u_s(t) \tag{2}$$

добытое некоторым, нас сейчас не интересующим, алгорифмом. Требуется сравнить это решение с истинным:

$$x_s = u_s(t) + \xi_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Пусть A и λ некоторые положительные постоянные. Условимся говорить, что приближение (2) имеет A, λ-оценку, если при начальных отклонениях $\zeta_{10}, \ldots, \zeta_{n0}$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum \xi_{s0}^2 \leqslant \lambda$$

для всякого t, большего t_0, согласно уравнениям (1) будет соблюдаться условие

$$\sum \xi_s^2 < A$$

Отклонения ζ_s удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\xi_s}{dt} = X_s(t, u_1 + \xi_1, \ldots, u_n + \xi_n) - \frac{du_s}{dt} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Для целей дальнейшего анализа уравнения эти запишем в форме

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n + f_s \tag{3}$$

где p_{sn} обозначают некоторые непрерывные ограниченные функции t, а

$$f_s = X(t, u_1 + \xi_1, \ldots, u_n + \xi_n) - \frac{du_s}{dt} - \sum p_{sj}\xi_j$$

Пусть функции p_{sn} таковы, что существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно-отрицательная функция $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum (p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n)\frac{\partial V}{\partial \xi_s} \geqslant \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$$

$$1 - \sum \left|\frac{\partial V}{\partial \xi_s}\right| > 0$$

для всякого t, большего t_0, в области, определенной неравенством

$$\sum \xi_s^2 \leqslant A$$

Согласно определению знакоопределенной (в области A, начиная с t_0) функции в смысле Ляпунова при сделанных нами предположениях будет существовать не зависящая от t определенно-положительная функция $W(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ такая, что функция $(-V - W)$ представляет (для всякого t, большего t_0, и для значений $\xi_1, \ldots, \xi_n$, удовлетворяющих неравенству $\Sigma \xi_s^2 < A$) положительную функцию.

Обозначим через l точный низший предел функции на сфере $\Sigma\xi_s^2 = A$. Функция $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ допускает бесконечно малый высший предел, другими словами, для l нам дается такое положительное число λ, что при $\Sigma \xi_s^2 \leqslant \lambda$ будем иметь

$$|V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)| < l$$

Если при всем этом в области $\lambda \leqslant \Sigma \xi_s^2 \leqslant A$ значения функций f_s, стеснены неравенствами

$$|f_s| < \lambda \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

то при начальных отклонениях ξ_{s0}, удовлетворяющих условию $\Sigma \xi_{s0}^2 \leqslant \lambda$, будем согласно уравнениям (3) иметь $\Sigma \xi_s^2 < A$; другими словами, приближение (2) будет при условии (4) иметь A, λ-оценку.

Доказательство изложено в моей работе «Устойчивость движения» [1] на стр. 123. В области $\lambda \leqslant \Sigma \xi_s^2 \leqslant A$ имеем

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \sum \xi_s^2 + \sum \frac{\partial V}{\partial \xi_s} f_s \geqslant \sum \xi_s^2 - \sum \left| \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \right| |f_s| >$$

$$> \sum \xi_n^2 - \lambda \sum \left| \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \right| \geqslant \left(\sum \xi^2 \right) \left(1 - \sum \left| \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \right| \right) > 0$$

Это значит, что для возможных изменений ξ_s согласно уравнениям (3) при начальных данных ξ_{s0}, удовлетворяющих условию $\Sigma \xi_{s0}^2 \leqslant \lambda$, значения функции $(|V|)$ не могут принять значений, равных и превосходящих l; соответственные значения функции W будут тем более меньше l, а это и доказывает, что переменные ξ_s будут удовлетворять неравенству $\Sigma \xi_s^2 < A$, так как l есть точный низший предел функции W на сфере $\Sigma \xi_s^2 = A$.

Условия (4) будут условиями существования A, λ-оценки равномерно для всякого начального момента $t > t_0$.

Доказанные оценки весьма грубы.

2. Пример. В прикладных исследованиях движений механических систем нередко пренебрегают так называемыми инерциальными членами. Чтобы остановиться на чем-либо определенном, предположим, что имеем дифференциальное уравнение

$$a_0 \frac{d_n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = 0$$

где a_s — постоянные, среди которых a_0 мало по сравнению с остальными коэффициентами. Пусть за приближенное решение и предлагается решение укороченного уравнения

$$a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n u = 0$$

Полагая $x = u(t) + \xi$, для ξ имеем уравнение

$$a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n u = 0$$

или (при $\xi = \xi_1$)

$$\xi_j' = \xi_{j+1} \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

$$a_0 \xi_n' = -a_1 \xi_n - \ldots - a_n \xi_1 - a_0 u^{(n)}$$

Естественная линеаризация последних уравнений состоит в предположении $p_{js} = \delta_{j, s-1}$, $a_0 p_{ns} = -a_{n-s+1}$.

Первое из достаточных условий оценки состоит в том, что характеристическое уравнение

$$a_0\varkappa^n + a_1\varkappa^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (5)$$

должно иметь все корни с отрицательными вещественными частями. При этом условии существует квадратичная определенно отрицательная форма V с постоянными коэффициентами C_{sr}

$$V = \frac{1}{2} \sum C_{sr}\xi_s\xi_r$$

такая, что

$$\sum \frac{\partial V}{\partial \xi_s}(p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$$

Определим положительное число A так, чтобы на сфере $\Sigma\,\xi_s^2 = A$ был положительным минимум функции

$$1 - \sum \left|\frac{\partial V}{\partial \xi_s}\right|$$

По числу A определим положительную постоянную l как точный низший предел функции $|V|$ на сфере $\Sigma\,\xi_s^2 = A$. Определив число l, определяем число λ из условия, чтобы при $\Sigma\,\xi_s^2 \leqslant \lambda$ имело место неравенство

$$|V(\xi_1, \ldots, \xi_n)| < l$$

Следовательно, если

$$|u^{(n)}| < \lambda \qquad (6)$$

а корни уравнения (5) все имеют отрицательные вещественные части, то изучаемое приближение будет иметь A, λ-оценку.

Условие (6) при соответствующих начальных значениях $u(t_0), \ldots, u^{(n-2)}(t_0)$ будет всегда удовлетворено, если алгебраическое уравнение

$$a_1\rho^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (7)$$

имеет все корни с отрицательными вещественными частями. Условие (6) особенно сильно ограничивает область начальных значений $u^{(k)}(t_0)$ $(k = 1, \ldots, n-2)$, если уравнение (7) имеет некоторые корни с положительными вещественными коэффициентами.

3. Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение $dx/dt = X(t, x)$, в котором X представляет непрерывную ограниченную вещественную функцию и x.

Зададимся составить приближенное решение под видом конечной суммы

$$x = \sum a_s\varphi_s$$

зависящей от непрерывных однозначных функций $\varphi_j(t)$ некоторого семейства $(j = 1, 2, \ldots)$ и постоянных a_s. Чтобы выяснить оценку, положим

$$x = \sum a_s\varphi_s + \xi$$

Отсюда

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x}\xi + \left\{X - \sum a_s\varphi_s' + [2]\right\}$$

где вместо x следует подставить $\Sigma\,a_s\varphi_s$, а $[2]$ обозначает члены, начиная со второго порядка малости, в разложении $X(t, \Sigma\,a_s\varphi_s + \xi)$ в ряд по целым степеням ξ.

Согласно доказанному предложению, если

$$\frac{\partial X}{\partial x} < -b \qquad (8)$$

где b — некоторая положительная постоянная, и если при этом

$$\left|X - \sum a_s\varphi_s + [2]\right| < b \qquad (9)$$

для всех значений ξ, удовлетворяющих условиям $\xi^2 < b$, то приближенное решение $x = \Sigma\,a_s\varphi_s$ заданного уравнения будет иметь b, b-оценку.

Условия существования приведенной оценки грубы. Условие (8) не всегда имеет место. Если условие (8) выполнимо при определенных значениях a_s и положительном b, то, сужая область изменения переменной — ξ неравенством $\xi^2 > \varepsilon$, при котором в условии (9) можно пренебречь членами второго порядка малости, получим

$$\left|X - \sum a_s\varphi_s'\right| < \varepsilon$$

что при малом ε и при конечной сумме $\Sigma\,a_s\varphi_s$ не всегда будет иметь место.