

## УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ КЛИНА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Л. М. Качанов

(Ленинград)

Упруго-пластическое равновесие клина, испытывающего равномерное давление по одной из граней, было изучено в условиях плоской деформации В. В. Соколовским<sup>[1]</sup> (случай полуплоскости) и Г. С. Шапиро<sup>[2]</sup>. Ниже рассматривается задача об упруго-пластическом равновесии клина в условиях плоского напряженного состояния и в предположении непрерывности смещений; эта задача отличается рядом особенностей, в частности не всегда является статически определяемой.

**1. Интенсивность касательных напряжений.** Обозначим через  $2\gamma$  угол раствора клина, через  $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от оси симметрии. Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_\theta = -p, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \gamma \quad (1.1)$$

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = -\gamma \quad (1.2)$$

При упругом равновесии клина компоненты напряжения равны<sup>[3]</sup>:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{p}{2x} \left( 2\theta - x \pm \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\gamma} \right), \quad \tau_{r\theta} = \frac{p}{2x} \left( -1 + \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\gamma} \right) \quad (1.3)$$

где  $x = \operatorname{tg} 2\gamma - 2\gamma$ . Вычисляя интенсивность касательных напряжений  $T$ , получаем

$$T^2 = \frac{1}{3} (\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2) = \frac{1}{12} \left( \frac{p}{x} \right)^2 \left[ x_1 + 4\theta(\theta - x) - 6 \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\gamma} \right] \quad (1.4)$$

где  $x_1 = 3 + x^2 + 3/\cos^2 2\gamma$ . Характер распределения интенсивности  $T$  зависит от угла  $2\gamma$ .

Для острого клина  $2\gamma < 1/2\pi$  кривая  $T = T(\theta)$  обращена выпуклостью вниз, имеет один минимум, лежащий в правой половине клина; наибольшего значения  $T$  достигает на свободной грани  $\theta = -\gamma$ .

Для прямоугольного клина  $2\gamma = 1/2\pi$  интенсивность  $T$  постоянна.

Для тупого клина имеем более сложную картину. При  $1/2\pi < 2\gamma \leq 2\gamma_1$ , где  $2\gamma_1 = 116^\circ 14'$  есть корень уравнения  $\operatorname{tg} 2\gamma + 2\gamma = 0$ , кривая  $T = T(\theta)$  обращена выпуклостью вверх и обладает максимумом, лежащим в правой половине клина. При этом  $(T)_{\theta=\gamma} > (T)_{\theta=-\gamma}$ . При  $2\gamma_1 < 2\gamma < 2\gamma_2$ , где  $2\gamma = 126^\circ 40'$ , интенсивность  $T$  имеет близкие максимум и минимум, лежащие в правой половине клина. С приближением к свободной грани  $\theta = -\gamma$  интенсивность  $T$  быстро убывает. Для  $2\gamma > 122^\circ 40'$  наибольшее значение  $T$  достигается на грани  $\theta = \gamma$ ; для  $2\gamma < 122^\circ 40'$  наибольшее значение  $T$  будет внутри клина. Наконец, в интервале  $2\gamma_2 \leq 2\theta \leq \pi$  интенсивность монотонно убывает от наибольшего значения при  $\theta = \gamma$  к наименьшему при  $\theta = -\gamma$ . В точках экстремума  $dT/d\theta = 0$ , вследствие чего вдоль соответствующих лучей  $\sigma_\theta = 2\sigma_r$ .

Давление, при котором достигается предел текучести, определяется по условию пластичности Мизеса равенством

$$T_{\max} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = \tau_s$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести при растяжении; соответствующая зависимость  $p/\sigma_s$  от  $\gamma$  показана на фиг. 1 пунктиром. При дальнейшем увеличении давления возникают зоны пластической деформации, примыкающие к упругим зонам.

**2. Решение в упругих зонах.** Как обычно, имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = A - 2D\theta \pm (B \sin 2\theta + C \cos 2\theta) \quad (2.1)$$

$$\tau_{r\theta} = D + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta$$

где  $A, B, C, D$  — произвольные постоянные. Интегрируя уравнения для компонент деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$ , не зависящих от  $r$ , получаем формулы для компонент смещения:

$$u_r = \varepsilon_r r + P(\theta) \quad (P(\theta) = c_{11} \sin \theta + c_{12} \cos \theta)$$

$$u_\theta = r \int (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) d\theta + C_1 r \ln r + C_2 r - \int P(\theta) d\theta \quad (2.2)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. Члены с  $P(\theta)$  определяют параллельный перенос тела и в дальнейшем отбрасываются. Слагаемое  $C_2 r$  характеризует вращение тела. Уравнение неразрывности деформаций в рассматриваемом случае таково:

$$\frac{d\varepsilon_r}{d\theta} = \gamma_{r\theta} - C_1 \quad (2.3)$$

Внося сюда компоненты деформации при помощи закона Гука и формул (2.1), получаем, что в упругих зонах

$$C_1 = \frac{4D}{E}$$

где  $E$  — модуль Юнга; кроме того, в упругой зоне

$$\int (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) d\theta = \frac{1}{2G} \tau_{r\theta} \quad (2.4)$$

**3. Решение в пластических зонах.** При отсутствии упрочнения имеем для компонент напряжения систему уравнений

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} + 2\tau_{r\theta} = 0, \quad \frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2 = \sigma_s^2 \quad (3.1)$$

Исключая из этих уравнений  $\sigma_r, \tau_{r\theta}$  и полагая последовательно

$$\sigma_\theta = s, \quad \frac{ds}{d\theta} = u, \quad \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = v(s), \quad v + s^2 = w(s)$$

получаем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)^2 + 12w - 48\tau_s^2 = 0 \quad (3.2)$$

Частное решение (решение I — простое напряженное состояние)  $w = \text{const} = 4\tau_s^2$  приводит к формулам ( $c$  — произвольная постоянная)

$$\sigma_r = \pm \tau_s \cos(\theta + c), \quad \sigma_\theta = \pm 2\tau_s \cos(\theta + c), \quad \tau_{r\theta} = \pm \tau_s \sin(\theta + c) \quad (3.3)$$

содержащимся в работе Хилла<sup>[4]</sup>.

Интегрирование (3.2) приводит к решению II с двумя произвольными постоянными  $B, C$ , представляющему равномерное напряженное состояние:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = A \pm (B \sin 2\theta + C \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = B \cos 2\theta - C \sin 2\theta \quad (3.4)$$

где

$$A = \pm \sqrt{3} \sqrt{\tau_s^2 - B^2 - C^2}$$

По уравнениям теории упруго-пластических деформаций

$$\varepsilon_r = \psi(\sigma_r - \sigma) + k\sigma, \quad \gamma_{r\theta} = 2\psi\tau_{r\theta}, \quad \varepsilon_\theta = \psi(\sigma_\theta - \sigma) + k\sigma \quad (3.5)$$

где  $\sigma$  — среднее давление,  $\psi$  — неизвестная функция,  $k$  — коэффициент объемного сжатия.

Внося (3.3), (3.5) в (2.2), (2.3) и выполняя интегрирование, получаем для решения I формулы (в (3.3) взят минус)

$$2\psi = -k - \frac{C_1}{\tau_s \sin(\theta + c)} \quad (3.6)$$

$$u_r = \varepsilon_r r, \quad u_\theta = r\psi\tau_{r\theta} - \frac{C_1}{2} r \ln \left| \frac{\tau_{r\theta}}{\tau_s} \right| + C_1 r \ln r + C_2 r \quad (3.7)$$

Для решения II будет

$$\psi = C_3 - C_1 \int \frac{d\theta}{\sqrt[3]{A + B \sin 2\theta + C \cos 2\theta}} \quad (3.8)$$

$$u_r = \varepsilon_r r, \quad u_\theta = r\psi\tau_{r\theta} + \frac{C_1}{2} r \ln \left| \frac{\sigma_r - \sigma}{\sigma_s} \right| + C_1 r \ln r + C_2 r \quad (3.9)$$

**4. Условия непрерывности.** На линии раздела  $\theta = \text{const}$  различных решений должны быть непрерывны компоненты напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ , функция  $\psi$  и составляющие смещения  $u_r, u_\theta$ . При непрерывности компонент напряжения и функции  $\psi$  непрерывны компоненты деформации и  $u_r$ ; из требования непрерывности  $u_\theta$  вытекают два условия:

$$C_1^- = C_1^+, \quad C_2^- = C_2^+ + \frac{1}{2} C_1^+ L \quad (4.1)$$

где индексы плюс и минус отличают значения произвольных постоянных слева и справа от линии раздела, а  $L$  — логарифм некоторой функции напряжений. Например, если слева от линии раздела лежит упругая зона, а справа состояние определяется решением II, то  $L = \ln |(\sigma_r - \sigma) / \sigma_s|$  и т. д.

Заметим, что для устранения вращения необходимо закрепить какую-либо точку клина, например точку  $r = 1$  одной из граней клина.

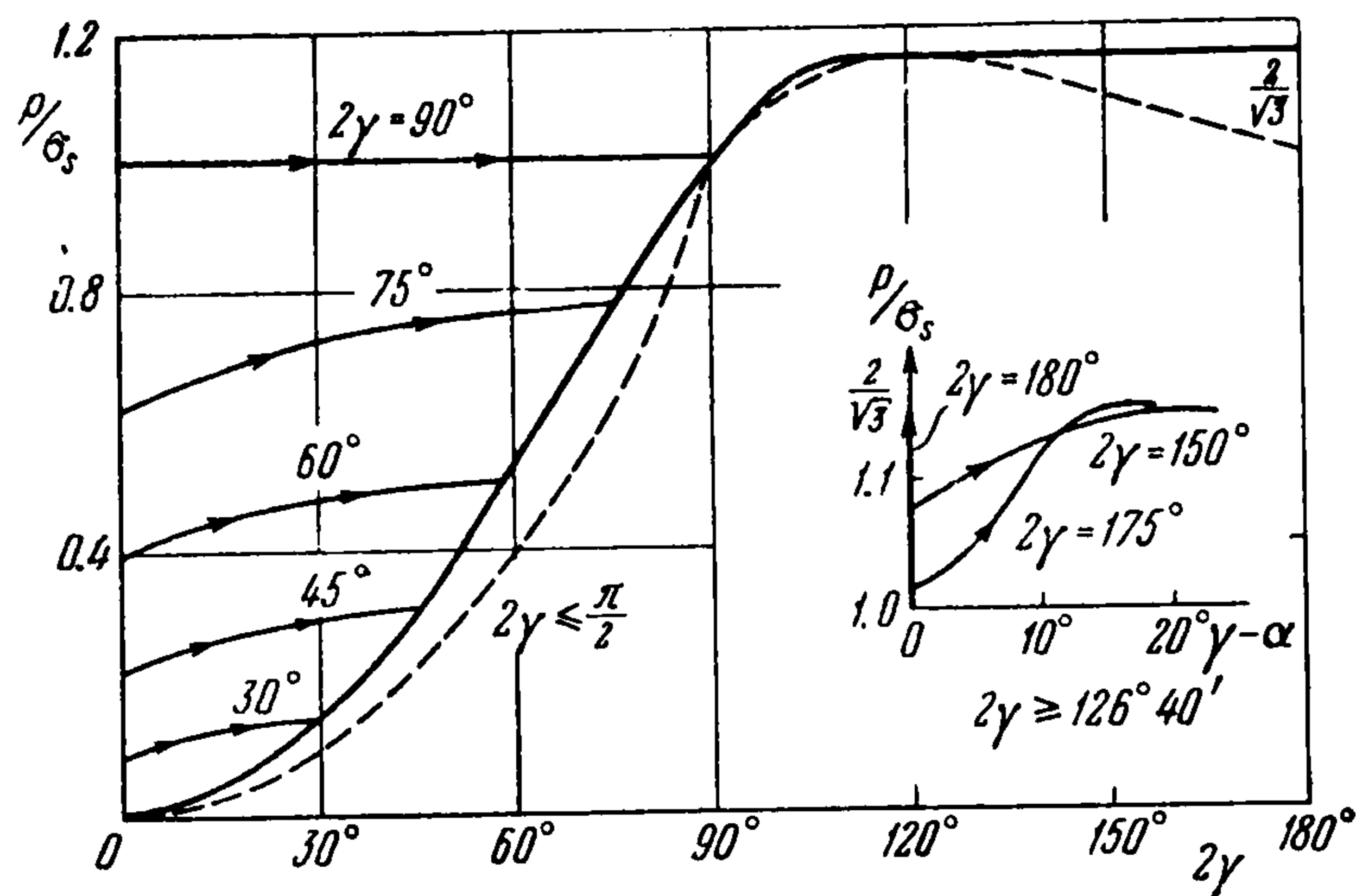
**5. Острый клин.** Для острого клина задача является статически определенной. Сначала возникает одна пластическая область ( $-\gamma \leq \theta \leq \alpha$ ) вблизи свободной грани  $\theta = -\gamma$ . В этой области реализуется равномерное напряженное состояние (3.4), причем в силу (1.2) получаем

$$A = -\frac{1}{2} \sigma_s, \quad B = \frac{1}{2} \sigma_s \sin 2\gamma, \quad C = -\frac{1}{2} \sigma_s \cos 2\gamma$$

Произвольные постоянные в упругой области ( $\alpha \leq \theta \leq \gamma$ ) и параметр  $\alpha$  определяются по двум граничным условиям (1.1) и трем условиям непрерывности компонент напряжения на линии раздела  $\theta = \alpha$ . Выполнив вычисления, получим зависимость между давлением и углом  $\alpha$ :

$$\frac{2p}{\sigma_s} = \frac{1 - 2 \sin 2\alpha \sin 2\gamma - 2(\gamma - \alpha) \sin 4\gamma - \cos 4\gamma}{1 - \cos 2(\gamma - \alpha)} \quad (5.1)$$

Следя за интенсивностью  $T$  в упругой области, обнаруживаем, что с возрастанием давления возникает вторая пластическая область, примыкающая к нагруженной



Фиг. 1.

границы  $\theta = \gamma$ . В этой области ( $\beta \leq \theta \leq \gamma$ ) — равномерное напряженное состояние, причем знак в  $A$  выбирается по условию положительности  $(\sigma_r)_{\theta=\gamma}$ , а произвольные постоянные  $B, C$  находятся по граничным условиям (1.1). Четыре произвольные постоянные в упругой области ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) и углы  $\alpha, \beta$  определяются из шести условий непрерывности на линиях раздела  $\theta = \alpha, \theta = \beta$ . Исключение произвольных постоянных приводит к двум сложным трансцендентным уравнениям, связывающим углы  $\alpha, \beta$  с величинами  $p, \gamma$  и допускающим лишь численное решение. На фиг. 1 показаны вычисленные кривые (со стрелками) зависимости  $p/\sigma_s$  от угла раствора пластических зон ( $2\gamma - \alpha$  или  $2\gamma - \beta + \alpha$ ) для случаев  $2\gamma = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ . С возрастанием давления упругая область суживается и в предельном состоянии вырождается в линию разрыва. Зависимость между предельным давлением и углом  $2\gamma$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_s} + \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p}{\sigma_s} \right)^2} \right] \left( 1 - 2 \frac{p}{\sigma_s} \right) - 2 \left( \frac{p}{\sigma_s} \right)^2 = \\ = \left[ \frac{1}{2} \frac{p}{\sigma_s} + \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p}{\sigma_s} \right)^2} \right] \cos 4\gamma \end{aligned} \quad (5.2)$$

Кривая предельной нагрузки показана на фиг. 1 сплошной линией. Угол  $\theta = \theta^*$ , определяющий положение линии разрыва, находится из соотношения

$$\left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_s} + \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p}{\sigma_s} \right)^2} \right] \sin 2(\gamma - \theta^*) = \sin 4\gamma \quad (5.3)$$

Как показывают вычисления,  $\theta^* > 0$ , т. е. линия разрыва несколько смещена вправо от осевой линии. Это смещение возрастает вместе с углом  $2\gamma$  и не превышает в общем нескольких градусов.

**6. Тупой клин.** Рассмотрим сначала клин с углом ( $126^\circ 40' \leq 2\gamma \leq \pi$ ), когда задача по-прежнему является статически определимой. Здесь возникает одна область пластических деформаций ( $\alpha \leq \theta \leq \gamma$ ), примыкаю-

шая к нагруженной грани; в этой области будет равномерное напряженное состояние

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = A \pm (p + A) \cos 2(\gamma - \theta), \quad \tau_{r\theta} = (p + A) \sin 2(\gamma - \theta) \quad (6.1)$$

причем

$$A = \frac{\sigma_s}{2} \left[ -\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_s} - \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p}{\sigma_s} \right)^2} \right]$$

Четыре произвольные постоянные в упругой зоне ( $-\gamma \leq \theta \leq \alpha$ ) и угол  $\alpha$  находятся по двум граничным условиям (1.2) и трем условиям непрерывности компонент напряжения на линии раздела  $\theta = \alpha$ . Проведя необходимые вычисления, получим уравнение, связывающее давление  $p$  и угол  $\alpha$ :

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{p}{\sigma_s} - \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p}{\sigma_s} \right)^2}}{\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_s} + \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p}{\sigma_s} \right)^2}} = \frac{1 - \cos 2(\gamma + \alpha)}{\cos 2(\gamma - \alpha) - 2(\gamma + \alpha) \sin 4\gamma - \cos 4\gamma} \quad (6.2)$$

В правой части фиг. 1 показаны кривые зависимости давления от угла пластической зоны  $\gamma - \alpha$  для  $2\gamma = 180^\circ, 175^\circ, 150^\circ$ . С увеличением угла  $2\gamma$  область пластических деформаций суживается и для полуплоскости стягивается в линию  $\theta = 1/2\pi$ . Напряженное состояние полуплоскости при этом описывается формулами (5) при следующих значениях произвольных постоянных:

$$B = D = \frac{p}{2\pi}, \quad C = -\frac{p}{4} + \frac{\sigma_s}{2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p}{\sigma_s} \right)^2}, \quad A = -C - \pi B, \quad p \geq \sigma_s$$

При  $p = \sigma_s$  на нагруженной грани достигается предел текучести, в дальнейшем давление  $p$  может возрасти до величины  $(2/\sqrt{3})\sigma_s$ . При этом в пластическом состоянии будет находиться лишь граница  $\theta = 1/2\pi$ , вся остальная часть полуплоскости остается упругой.

При  $109^\circ 28' \leq 2\gamma \leq \pi$  предельная нагрузка определяется наибольшим возможным давлением  $p = (2/\sqrt{3})\sigma_s$ .

Заметим, наконец, что приведенный анализ сохраняет значение и для  $2\gamma > 122^\circ 40'$ .

Если  $1/2\pi < 2\gamma < 122^\circ 40'$ , то наибольшее значение интенсивности  $T$  лежит внутри клина и здесь возникает область пластических деформаций. В этих случаях задача является статически неопределимой (в отличие от плоской деформации, когда пластическая зона расположена симметрично).

Как уже указывалось, на линии возникновения пластической зоны  $\sigma_\theta - 2\sigma_r = 0$  (т. е. эта линия является характеристикой), однако одно простое напряженное состояние не может развиваться. Между упругими секторами располагается либо пластический сектор равномерного напряженного состояния, либо пластический сектор простого напряженного состояния, окаймленный пластическими секторами равномерного напряженного состояния. В первом случае, например, для определения 15 произвольных постоянных [пять — в упругом секторе ( $-\gamma, \alpha$ ), пять —

в упругом секторе  $(\beta, \gamma)$ , пять — в пластическом секторе  $(\alpha, \beta)$  и двух параметров  $\alpha, \beta$  имеем четыре граничных условия, условие неподвижности одной из точек клина и 12 условий, вытекающих из требования непрерывности компонент напряжения, деформации и смещения на линиях раздела  $\theta = \alpha, \theta = \beta$ . Заметим, что если рассматривать задачу только в напряжениях, то имеем 12 неизвестных и лишь 10 уравнений для их определения. В зависимости от угла  $2\gamma$  возможны различные положения; так, пластический сектор равномерного напряженного состояния может выйти к нагруженной грани  $\theta = \gamma$ , в то время как упругая зона сохраняется у свободной границы  $\theta = -\gamma$ , или же упругие секторы могут удержаться у обеих граней клина.

Углы раствора различных секторов в зависимости от параметров  $2\gamma$  и  $p$  определяются численным решением громоздких трансцендентных уравнений.

При  $2\gamma \leq 109^\circ 28'$  предельная нагрузка достигается при переходе всего клина в пластическое состояние; последнее характеризуется двумя секторами  $(-\gamma \leq \theta \leq \alpha)$  и  $(\beta \leq \theta \leq \gamma)$  равномерного напряженного состояния (3.4), связанными сектором  $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$  простого напряженного состояния (3.3). Произвольные постоянные  $B, C$  находятся по граничным условиям, параметры  $s, \alpha, \beta, p$  определяются из четырех условий непрерывности компонент напряжения на линиях раздела  $\theta = \alpha, \theta = \beta$ . Выпишем здесь лишь формулу для вычисления предельной нагрузки:

$$4\gamma + 2.462 = \arccos \left[ \frac{-A_2}{3(p + A_2)} \right] + 2 \arccos \left( \frac{2}{3} \frac{A_2}{\tau_s} \right) \quad (6.3)$$

где

$$A_2 = \frac{\sigma_s}{2} \left[ -\frac{3}{2} \frac{p}{\sigma_s} + \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{p}{\sigma_s} \right)^2} \right] \quad (6.4)$$

При  $2\gamma = 109^\circ 28'$  предельное давление достигает наибольшей возможной величины  $p = (2/\sqrt{3})\sigma_s$ ; при больших  $2\gamma$  вполне пластическое состояние клина не наступает.

7. Если отказаться от предположения непрерывности смещения, то в случаях, когда пластическая зона возникает внутри клина, возможна (как заметил С. С. Голушкевич в отношении задачи для клина при плоской деформации) другая интерпретация: вдоль луча пластической деформации происходит скольжение одной части клина по другой. Соответствующая нагрузка должна при этом рассматриваться как предельная.

Поступила 30 XI 1956

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности, ГТТИ, 1950.
2. Шапиро Г. С. Упруго-пластическое равновесие клина. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости, ГТТИ, 1934.
4. Hill R. On discontinuous plastic states, with special reference to a localized necking in thin sheets. Journ. Mech. a Phys. of Solids, t. I, No. 1, 1952.