Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ[1]

Ю. Н. Работнов, С. А. Шестериков

(Москва)

В данной работе делается попытка рассмотреть явление потери устойчивости стержня или пластинки в прямом смысле слова. За последние годы появилось большое количество работ, посвященных устойчивости в условиях ползучести, однако во всех этих работах речь идет не об устойчивости прямого стержня или плоской пластинки, а о выпучивании элемента, имеющего начальную кривизну [1—3].

При исследовании таких вопросов, как устойчивость, необходимо исходить из некоторых достаточно хорошо физически обоснованных основных гипотез о связи между напряжениями и деформациями. Эмпирическая зависимость, удовлетворительно подтверждающаяся для суммарного описания процесса, может давать совершенно неверные результаты для соотношений между вариациями рассматриваемых величин. С этой точки зрения мы не считали возможным пользоваться теорией ползучести типа одной из теорий старения; теория упрочнения [4], или, как ее иногда называют, гипотеза уравнения состояния, представляется во всяком случае внутренне непротиворечивой. Ряд выполненных экспериментальных исследований подтверждает ее вполне удовлетворительное совпадение с экспериментом.

§ 1. Устойчивость сжатого стержня. В качестве исходной физической гипотезы мы примем теорию упрочнения, согласно которой процесс ползучести описывается некоторым уравнением, связывающим напряжение, величину пластической деформации и скорость пластической деформации:

$$\Phi(\sigma, p_1, \dot p) = 0 \qquad \left(p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right) \tag{1.1}$$

Мы предполагаем, что уравнение (1.1) проинтегрировано для рассматриваемого случая центрального сжатия, когда σ постоянна по сечению и заданы либо закон изменения сжимающей силы во времени, либо деформация как функция времени. Предположим, что сжатый стержень изгибается, причем прогибы чрезвычайно малы. Напряжение, полная деформация и пластическая деформация получают при этом малые приращения $\delta\sigma$, $\delta\varepsilon$ и δp. Варьируя уравнение (1.1), получим

$$\lambda\delta\sigma + \mu\delta p + \nu\delta\dot p = 0 \tag{1.2}$$

Здесь

$$\lambda = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}, \qquad \mu = \frac{\partial\Phi}{\partial p}, \qquad \nu = \frac{\partial\Phi}{\partial\dot p}$$

---

[1] Результаты § 2 и 5 были получены в 1949 г. первым из авторов и содержатся в отчете Института механики АН СССР.

Перепишем уравнения (1.2) следующим образом:

$$(E\lambda - \mu)\,\delta\sigma - \nu\delta\dot{\sigma} + E(\mu\delta\varepsilon + \nu\delta\dot{\varepsilon}) = 0 \tag{1.3}$$

Согласно закону плоских сечений $\delta\varepsilon = \varkappa z$, поэтому из (1.3) следует соотношение между изгибающим моментом m и кривизной $\varkappa$:

$$(E\lambda - \mu)\,m - \nu\dot{m} + EI(\mu\varkappa + \nu\dot{\varkappa}) = 0 \tag{1.4}$$

Предположим, что стержню сообщено отклонение от прямолинейной формы или импульс.

Уравнение колебаний стержня при условии (1.4) будет следующим:

$$\left[-(E\lambda - \mu) + \nu\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\left(\mu\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t}\right)\right] = 0 \tag{1.5}$$

В общем случае уравнение (1.5) не допускает разделения переменных. Для стержня длиной a с опертыми концами мы можем удовлетворить этому уравнению, приняв

$$y = \tau(t)\sin\frac{\pi x}{a}$$

Для функции $\tau(t)$ получается следующее уравнение:

$$\ddot{\tau} + \frac{\mu - E\lambda}{\nu}\ddot{\tau} + \frac{\pi^2}{\rho F}(P_э - P)\,\dot{\tau} + \frac{\pi^2}{\rho F\nu}[E\lambda P + \mu(P_э - P) - \nu\dot{P}]\,\tau = 0 \tag{1.6}$$

Здесь $P_э$ — эйлерова критическая сила. Так как коэффициенты при $\ddot{\tau}$ и $\dot{\tau}$ положительны, для ограниченности решений необходимо

$$\frac{E\lambda P}{P_э - P} + \mu - \nu\frac{\dot{P}}{P_э - P} > 0 \tag{1.7}$$

Если скорость приложения нагрузки невелика, последним членом в описанном выше уравнении можно пренебречь и мы получим

$$\frac{P}{P_э} = \frac{1}{1 - E\lambda/\mu} \tag{1.8}$$

§ 2. Упрощенный критерий устойчивости. Исследование уравнения (1.5) в общем случае затруднительно. Однако для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости стержня мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что, если соотношение (1.7) становится равенством, характеристическое уравнение, соответствующее (1.6), имеет нулевой корень. Заметим, что (1.6) на самом деле является уравнением с переменными коэффициентами, но исходное определение устойчивости относится к достаточно малому интервалу времени, который всегда может быть выбран настолько малым, чтобы изменением коэффициентов в (1.6) можно было пренебречь. Теперь для отыскания границы области устойчивости мы можем поставить вопрос об условиях, при которых (1.5) имеет не зависящее от времени решение $y = u(x)$. Легко убедиться, что такое решение существует, если выполнено условие (1.8). Желая ограничиться квазистатической постановкой вопроса, мы могли бы, исходя из соотношения (1.4) между моментом и кривизной, составить уравнение равновесия продольно сжатого стержня, положив в нем $y=u(x)\tau(t)$, и разделить переменные. В результате получается

$$\frac{EIu''}{u}=\frac{(E\lambda-\mu)P\tau-\nu\dot{P}\tau-\nu P\dot{\tau}}{\mu\tau+\nu\dot{\tau}}=-P_э$$

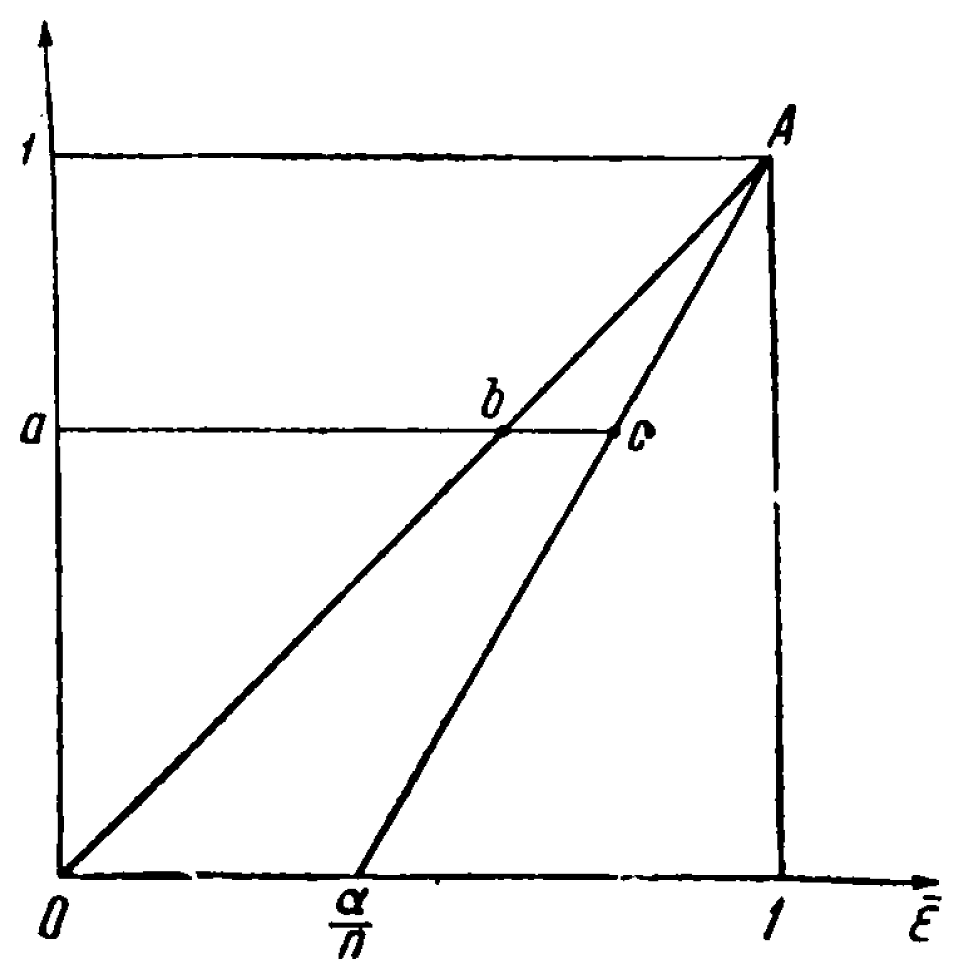
Отсюда можно найти отношение $\dot{\tau}/\tau$. Знак этого отношения указывает на то, возрастает или убывает прогиб со временем. Очевидно, что отсюда получается критерий устойчивости (1.7).

Рассмотрим частные виды закона ползучести:

$$(a)\qquad \Phi\equiv\dot{p}p^{\alpha}-A\sigma^{n}=0 \tag{2.1}$$

Уравнение (1.8) приводится к следующему виду:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\alpha}{n}+\bar{\sigma}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\quad\left(\bar{\sigma}=\frac{\sigma}{\sigma_э},\quad \bar{\varepsilon}=\frac{E\varepsilon}{\sigma_э}\right) \tag{2.2}$$



Фиг. 1.

Уравнение (2.2) допускает простую графическую интерпретацию (фиг. 1). В плоскости $\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}$ точка A соответствует упругой потере устойчивости, прямая (2.2) проходит через эту точку и отсекает на оси $\bar{\varepsilon}$ отрезок α/n. Напряжение $\bar{\sigma}$ вызывает упругую деформацию $\bar{\varepsilon}$, изображаемую отрезком ab на фиг. 1; после накопления деформации ползучести bc происходит потеря устойчивости.

$$(б)\qquad \Phi\equiv\dot{p}p^{\alpha}-k\exp\frac{\sigma}{A} \tag{2.3}$$

В этом случае критическое значение пластической деформации

$$p=\frac{A\alpha}{E}\left(\frac{\sigma_э}{\sigma}-1\right) \tag{2.4}$$

Замечание. Постановка задачи устойчивости состоит в том, что ищется возможность искривления стержня с бесконечно малой скоростью, тогда как скорость ползучести при сжатии всегда конечна. Отсюда следует, что данная постановка исключает возможность рассмотрения разгрузки, последняя может приниматься во внимание лишь тогда, когда ищутся конечные прогибы. Переходя к предельному случаю исчезающе малой скорости ползучести, мы получаем постановку Шенли [5, 6].

§ 3. Устойчивость пластинок. Переходя к рассмотрению неодномерных задач, мы должны прежде всего остановиться на той или иной системе исходных уравнений теории ползучести. Распространение гипотезы упрочнения на случай пространственного напряженного состояния возможно провести различными способами. Рассмотрим следующие варианты теории.

1. Уравнения типа теории течения

$$\dot{p}_{ij}=\frac{3}{2}g(p_i,\ \sigma_i)\,\sigma_{ij}^{*} \tag{3.1}$$

Здесь σ_{ij}^{*} — девиатор напряжений, p_{ij} — тензор пластической деформации. Предполагая материал несжимаемым, будем считать

$$p_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2G}\sigma_{ij}^{*}$$

Инварианты σ_i и p_i определяются следующим образом:

$$\sigma_i^2 = \frac{3}{2}\sigma_{ij}^*\sigma_{ij}^*, \quad p_i = \int_0^t \left(\frac{2}{3}\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}\right)^{1/2} dt$$

$$\varepsilon_i^2 = \frac{2}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$$

2. Уравнения деформационного типа

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}\sigma_{ij}^* \tag{3.2}$$

При этом инварианты σ_i и p_i связаны дифференциальным соотношением, а именно

$$\Phi(\sigma_i, p_i, \dot{p}_i) = 0$$

Здесь в отличие от предыдущих уравнений инвариант p_i определяется следующим образом:

$$p_i = \varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E}$$

При выводе уравнений устойчивости по той или другой теории мы будем предполагать, что основное напряженное состояние неизменно, для пластинки мы будем считать справедливой гипотезу Кирхгофа-Лява, согласно которой

$$\delta\varepsilon_{11} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \delta\varepsilon_{22} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \delta\varepsilon_{12} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3.3}$$

Здесь w — прогиб срединной поверхности, дополнительная деформация срединной поверхности при потере устойчивости равна нулю.

Моменты внутренних сил выражаются следующими формулами:

$$G_1 = \int_{-h}^{+h} (2\delta\sigma_{11}^* + \delta\sigma_{22}^*)\, z dz, \qquad G_2 = \int_{-h}^{+h} (2\delta\sigma_{22}^* + \delta\sigma_{11}^*)\, z dz$$

$$H = \int_{-h}^{+h} \delta\sigma_{12} z dz \tag{3.4}$$

Введем еще следующие величины:

$$\alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}, \qquad \alpha_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}^*}{\sigma_i}$$

В дальнейшем нам понадобится линейный оператор

$$P = \alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

Уравнение равновесия пластинки при выпучивании может быть записано при помощи этого оператора следующим образом:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + 2h\sigma_i P(w) = 0 \tag{3.5}$$

§ 4. Устойчивость пластинок по теории течения. Из (3.1) и определения инварианта p_i следует

$$\dot{p}_i = g\sigma_i$$

Проварьируем это соотношение и определим путем интегрирования δp_i:

$$\delta p_i = \int_0^t g(b+1)\, e^{a(t-\tau)}\, \delta\sigma_i d\tau = gL\delta\sigma_i \tag{4.1}$$

Здесь

$$a=\sigma_i\frac{\partial g}{\partial p_i},\qquad b=\frac{\sigma_i}{g}\frac{\partial g}{\partial\sigma_i}$$

Варьируя (3.1) при $\sigma_{33}=0$ и учитывая (4.1), имеем

$$\frac{2}{3}\,\delta\dot{\varepsilon}_{ij}=\left(g+\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial t}\right)\delta\sigma_{ij}^{*}+\alpha_{ij}^{*}g\,(aL+b)\,\delta\sigma_i \tag{4.2}$$

Чтобы исключить отсюда $\delta\sigma_i$, умножим (4.2) на α_{ij}^{*} и просуммируем. Получим

$$\alpha_{ij}^{*}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}=M\delta\sigma_i\qquad M=g\,(b+1)+\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial t}+agL \tag{4.3}$$

Кроме оператора M, введем оператор

$$N=g+\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial t}$$

Тогда, исключая из (4.2) $\delta\sigma_i$ при помощи (4.3), получим

$$\delta\sigma_{ij}^{*}=\frac{2}{3}N^{-1}\,(\delta\dot{\varepsilon}_{ij})-\alpha_{ij}^{*}g\,(aL+b)\,(NM)^{-1}\,(\alpha_{ij}^{*}\delta\,\dot{\varepsilon}_{ij}) \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в уравнения (3.4), найдем

$$G_1=\frac{2h^3}{3}\left\{-N^{-1}\,\frac{4}{3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\alpha_{11}g\,(aL+b)\,(MN)^{-1}P\right\}\dot{w} \tag{4.5}$$

. . . .

Внесем (4.5) в уравнение равновесия (3.5) и получим следующее интегро-дифференциальное уравнение устойчивости:

$$M\,(\Delta^2\dot{w})-\frac{3}{4}g\,(b+aL)\,PP\dot{w}-\frac{9\sigma_i}{(2h)^2}MNPw=0 \tag{4.6}$$

Путем дифференцирования в (4.6) можно исключить оператор L, в результате чего получается дифференциальное уравнение устойчивости

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+E\left(bg+g-\frac{a}{E}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\Delta\Delta w-\frac{3}{4}gE\left(b\frac{\partial}{\partial t}+a\right)PPw-$$

$$-\frac{9\sigma_i}{E\,(2h)^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+E\left(bg+2g-\frac{a}{E}\right)\frac{\partial}{\partial t}+E^2g\left(gb+g-\frac{a}{E}\right)\right]Pw=0 \tag{4.7}$$

§ 5. Устойчивость пластинок по теории деформаций. Соотношение связывающее инварианты ε_i и σ_i, имеет тот же вид, что соотношение (1.1) для одноосного случая. Вариации $\delta\varepsilon_i$ и $\delta\sigma_i$, следовательно, связаны уравнением (1.3) или эквивалентной зависимостью

$$\delta\sigma_i=A\,\delta\varepsilon_i \tag{5.1}$$

Здесь A — символ некоторого интегрального оператора.

Варьируя (3.2) для случая плоского напряженного состояния и используя (5.1), получим

$$\delta\sigma_{ij}^{*}=\alpha_{ij}^{*}\left(A-\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\delta\varepsilon_i+\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\,\delta\varepsilon_{ij}$$

Внося эти выражения в формулы для моментов, найдем

$$G_1=\frac{2h^3}{3}\left\{\frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\alpha_{11}\left(A-\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)P\right\}w$$

. . . .

Уравнение устойчивости получается при этом следующим:

$$\frac{3}{4}\left(A-\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)PPw+\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\,\Delta\Delta w+\frac{9\sigma_i}{(2h)^2}Pw=0 \tag{5.2}$$

§ 6. Прямоугольная пластинка, опертая по контуру и сжатая в двух направлениях. В этом случае

$$\sigma_{12}=0, \qquad P=\alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Для упругой пластинки уравнение устойчивости будет следующим:

$$\triangle\triangle u+\frac{9\sigma_{i_э}}{E(2h)^2}P(u)=0 \tag{6.1}$$

Ему можно удовлетворить, положив

$$u=\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{k\pi y}{l_2}$$

Функция u удовлетворяет прежним условиям и для случая ползучести, поэтому можно принять

$$w=\tau(t)\,u(x,\ y)$$

Рассмотрим решение этой задачи по двум теориям.

Теория течения. Из (6.1) получается следующее уравнение

$$\ddot{\tau}\left(1-\frac{\sigma_i}{\sigma_{i_э}}\right)+\dot{\tau}E\left[\left(bg+g-\frac{a}{E}\right)-\frac{3}{4}bg\left(\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(bg+2g-\frac{a}{E}\right)\frac{\sigma_i}{\sigma_{i_э}}\right]+\tau E^2 g\left[-\frac{3}{4}\frac{a}{E}\left(\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(gb+g-\frac{a}{E}\right)\frac{\sigma_i}{\sigma_{i_э}}\right]=0$$

Здесь

$$\lambda_1=\frac{k^2 l_1^2}{m^2 l_2^2}$$

Для дальнейшего исследования воспользуемся частным законом ползучести (2.1), из которого следует

$$g=A\sigma^{n-1}p_i^{-\alpha}, \qquad a=-\frac{\alpha\sigma_i g}{p_i}, \qquad b=n-1$$

Как оказывается, решающую роль при оценке устойчивости играет коэффициент при τ. Введем безразмерные величины

$$\bar{\sigma}=\frac{\sigma_i}{\sigma_{i_э}}, \qquad \bar{\varepsilon}=\frac{Ep_i+\sigma_i}{\sigma_{i_э}}$$

В этих обозначениях уравнение границы устойчивости получим в виде

$$\bar{\varepsilon}=\bar{\sigma}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)+\frac{3}{4}\frac{\alpha}{n}\left(\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)^2 \tag{6.2}$$

Теория деформаций. Разделяя точно таким же способом переменные в уравнении (5.2), получим интегральное уравнение для $\tau(t)$:

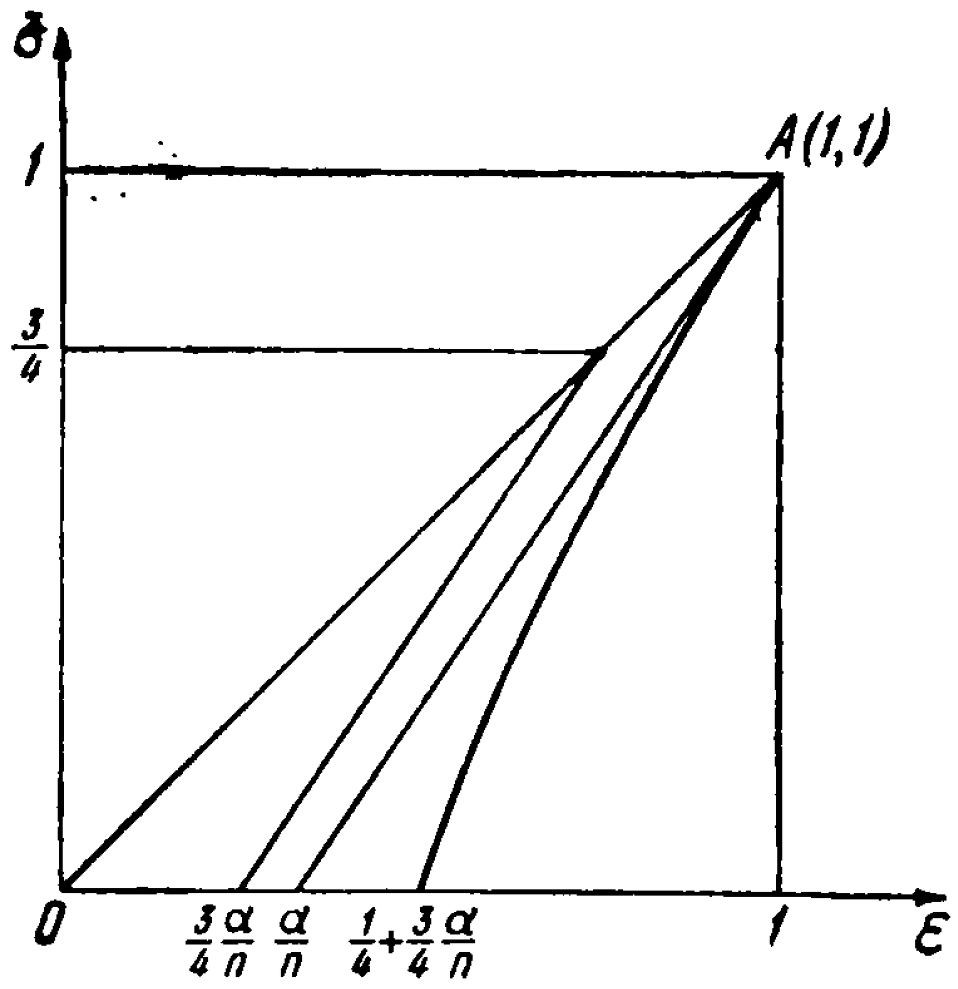
$$\frac{E\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}}\left[1+\frac{4}{3}(\bar{\varepsilon}-1)\left(\frac{1+\lambda_1}{\alpha_{11}+\alpha_{22}\lambda_1}\right)^2\right]\tau=A\tau$$

где введены определенные выше безразмерные параметры $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\sigma}$. Это соотношение означает, что входящие в него величины связаны дифференциальным уравнением (1.3), в котором они заменяют $\delta\varepsilon$ и $\delta\sigma$. Получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции τ. Условие обращения в нуль производной $\dot{\tau}$ оказывается следующим:

$$\bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}\left[1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(\frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}\lambda_1}{1 + \lambda_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\bar{\sigma}\right] +$$

$$+\left[1 - \frac{3}{4}\left(\frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}\lambda_1}{1 + \lambda_1}\right)^2\right]\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\bar{\sigma} = 0 \qquad (6.3)$$

На фиг. 2 построены области устойчивости по уравнениям (6.2) и (6.3) для равномерно сжатой квадратной пластинки в случае $\alpha/n = {}^1/_3$.



Фиг. 2.

На той же фигуре проведена прямая (2.2), соответствующая сжатому стержню.

Поступила 7 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость, ИЛ, М. 1955.
2. Hoff N. J. Creep buckling. Aeronaut. Quart., т. 7, N 1, 1956, стр. 1—20.
3. Розенблюм В. М. Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести. Инженерный сборник, т. 18, 1954, стр. 99—104.
4. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложениями к исследованию ползучести роторов. Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1957.
5. Shanley F. R. Inelastic column theory. J. Aeronaut. Sci., 14, 1947.
6. Работнов Ю. Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности. Инженерный сборник, т. XI, 1952, стр. 123—126.