Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Л. Я. Айнола

(Таллин)

Из многочисленных исследований о применении вариационных методов в нелинейной теории упругих оболочек и пластин надо упомянуть работы Алумяэ [1, 2], Галимова [3, 4], Ху [5] и Рейсснера [6]. В данной работе для получения вариационных задач в нелинейной теории оболочек используется метод преобразования вариационных задач [7] в обобщенном виде. Этим методом выводится один цикл основных вариационных задач упрощенной нелинейной теории оболочек с простыми граничными условиями. В конце работы указываются возможности получения ряда других вариационных задач.

1. Основные соотношения и исходная вариационная задача. Пусть будут v_i, v — компоненты вектора перемещения срединной поверхности оболочки, $\varepsilon_{ik}, \mu_{ik}$ — компоненты симметричных тензоров деформаций, e_{ik} и ω_i — компоненты вспомогательных кинетических тензоров, T^{ik} и M^{ik} — компоненты симметричного тензора тангенциальных сил и тензора моментов, S^i — компоненты вспомогательного вектора поперечных сил, обусловленных нелинейностью задачи, X^i, X — компоненты вектора внешних сил, a_{ik} и b_{ik} — коэффициенты первой и второй квадратичных форм срединной поверхности, c_{ik} — компоненты дискриминантного тензора первой квадратичной формы, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона и h — толщина оболочки.

Рассмотрим нелинейную задачу о среднем изгибе упругой оболочки [8], основные соотношения которой заданы в следующем упрощенном виде.

Соотношения между деформациями, вспомогательными кинетическими тензорами и перемещениями

$$\varepsilon_{ik} = e_{ik} + \frac{1}{2}\omega_i\omega_k \tag{1.1}$$

$$2e_{ik} = \nabla_i v_k + \nabla_k v_i - 2b_{ik}v, \quad \omega_i = \nabla_i v \tag{1.2}$$

$$\mu_{ik} = -\nabla_{ik} v \tag{1.3}$$

Уравнения непрерывности деформаций и вспомогательных кинетических тензоров

$$c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}(2b_{\alpha\beta}\mu_{\gamma\delta} - \mu_{\alpha\beta}\mu_{\gamma\delta} - 2\nabla_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}) = 0 \tag{1.4}$$

$$c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}(b_{\alpha\beta}\mu_{\gamma\delta} - \nabla_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}) = 0, \quad \mu_{ik} + \nabla_k\omega_i = 0 \tag{1.5}$$

$$c^{\alpha\beta}\nabla_\beta\mu_{i\alpha} = 0 \tag{1.6}$$

Уравнения равновесия

$$\nabla_\alpha T^{\alpha i} + X^i = 0 \tag{1.7}$$

$$T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha S^\alpha + \nabla_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} + X = 0 \tag{1.8}$$

Соотношения упругости

$$T^{ik} = BE^{ik\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad M^{ik} = DE^{ik\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} \tag{1.9}$$

$$S^i = T^{i\alpha}\omega_\alpha \tag{1.10}$$

Обратными соотношениями предыдущих законов упругости являются

$$e_{ik} = B'P_{ik\alpha\beta}\left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} BE^{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_\gamma\omega_\delta\right), \quad \mu_{ik} = D'P_{ik\alpha\beta}M^{\alpha\beta} \tag{1.11}$$

$$\omega_i = \frac{2c_{i\xi}c_{\vartheta\varkappa}S^\vartheta T^{\xi\varkappa}}{c_{\alpha\gamma}c_{\beta\delta}T^{\alpha\beta}T^{\gamma\delta}} \tag{1.12}$$

В этих соотношениях введены обозначения

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E^{ijke} = a^{ik}a^{je} + \nu c^{ik}c^{je} \tag{1.13}$$

$$B' = \frac{1}{Eh}, \quad D' = \frac{12}{Eh^3}, \quad P_{ijke} = a_{ik}a_{je} - \nu c_{ik}c_{je} \tag{1.14}$$

Пусть дальше u_i, u — заданные компоненты перемещения, w — заданный угол поворота в направлении нормали контура, N^i, N — заданные компоненты вектора внешних сил, G — заданный момент изгиба на контуре и n_i и t_i — компоненты единичного вектора нормали и единичного тангенциального вектора контура.

В рассматриваемой задаче назначим следующие граничные условия: на части C_1 контура C

$$v_i - u_i = 0, \qquad v - u = 0, \qquad n^\alpha \nabla_\alpha v - w = 0 \tag{1.15}$$

на части C_2 контура C

$$T^i - N^i = 0, \qquad T - N = 0, \qquad M - G = 0 \tag{1.16}$$

где

$$T^i = T^{i\alpha}n_\alpha, \quad T = S^\alpha n_\alpha + \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}n_\beta + t^\gamma \nabla_\gamma (M^{\alpha\beta}n_\alpha t_\beta), \quad M = M^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta \tag{1.17}$$

При использовании метода преобразования вариационных задач исходим из принципа возможных перемещений:

$$\int\limits_s (T^{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}\delta\mu_{\alpha\beta})\, d\sigma - \int\limits_s (X^\alpha \delta v_\alpha + X\delta v)\, d\sigma -$$

$$- \int\limits_{C_2} (N^\alpha \delta v_\alpha + N\delta v - Gn^\alpha \nabla_\alpha \delta v)\, ds = 0 \tag{1.18}$$

Здесь S — средняя поверхность оболочки, $d\sigma = \sqrt{a}\, dx^1 dx^2$, где x^1 и x^2 — гауссовые координаты на S и s — дуга контура.

Учитывая соотношения упругости (1.9) и вводя обозначения

$$V(e, \omega, \mu) = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\delta} B\left[\left(e_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega_\alpha\omega_\beta\right)\left(e_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}\omega_\gamma\omega_\delta\right) + D\mu_{\alpha\beta}\,\mu_{\gamma\delta}\right] \tag{1.19}$$

$$J(X, v) = X^\alpha v_\alpha + Xv, \qquad K(N, v) = N^\alpha v_\alpha + Nv - G\, n^\alpha \nabla_\alpha v \tag{1.20}$$

вариационную задачу 1 — задачу Лагранжа — можно сформулировать так: найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{V[e(v), \omega(v), \mu(v)] - J(X, v)\}\, d\sigma - \int_{C_2} K(N, v)\, ds \tag{1.21}$$

при граничных условиях (1.15).

Обозначение $e(v)$, $\omega(v)$, $\mu(v)$ здесь и в дальнейшем показывает, что в соответствующих выражениях тензоры e_{ik}, ω_i, μ_{ik} надо заменить перемещениями через (1.2) и (1.3).

2. Общая вариационная задача. По причинам, которые выяснятся в дальнейшем, интерпретируем задачу Лагранжа так, что e_{ik}, ω_i, μ_{ik} фигурируют в ней как функциональные аргументы. Последние должны удовлетворять дополнительным связям (1.2) и (1.3). Теперь задача 1 может быть перефразирована так: найти стационарное значение функционала

$$\int_S [V(e, \omega, \mu) - J(X, v)]\, d\sigma - \int_{C_2} K(N, v)\, ds \tag{2.1}$$

с добавочными условиями (1.2), (1.3) в S и (1.15) на C_1.

От добавочных условий вариационной задачи можно освободиться при помощи правила множителей Лагранжа. Это правило в данном случае показывает, что решение предыдущей задачи является в то же время решением и следующей задачи: найти стационарное значение функционала

$$\int_S [V(e, \omega, \mu) - J(X, v)]\, d\sigma - \int_S \Big\{T^{\alpha\beta}\Big[e_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}(\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) + b_{\alpha\beta} v\Big] +$$

$$+ S^\alpha(\omega_\alpha - \nabla_\alpha v) + M^{\alpha\beta}(\mu_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha\beta} v)\Big\}\, d\sigma - \int_{C_2} K(N, v)\, ds - \int_{C_1} [\varkappa^\alpha(v_\alpha - u_\alpha) +$$

$$+ \varkappa(v - u) - \lambda(n^\alpha \nabla_\alpha v - w)]\, ds \tag{2.2}$$

Здесь T^{ik}, M^{ik}, S^i, $\varkappa^i$, $\varkappa$ и λ — множители Лагранжа.

Функциональными аргументами для (2.2) являются перемещения v_i, v, компоненты кинетических тензоров e_{ik}, ω_i, μ_{ik} и множители Лагранжа T^{ik}, M^{ik}, S^i, $\varkappa^i$, $\varkappa$, λ, причем на искомые функции никаких добавочных условий не налагается.

В соответствии с этими группами варьируемых аргументов дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа функционала (2.2) разделяются на три группы:

1) по v_i, v — уравнения равновесия (1.7)—(1.8);

2) по T^{ik}, M^{ik}, S^i — соотношения между кинетическими тензорами и перемещениями (1.2)—(1.3);

3) по e_{ik}, ω_i, μ_{ik} — соотношения упругости (1.9)—(1.10).

Из соотношения упругости (1.9)—(1.10) видно, что множители Лагранжа T^{ik}, M^{ik} нужно рассматривать как компоненты тензора тангенциальных сил и моментов, а S^i как компоненты вспомогательного вектора поперечных сил. Это оправдывает ранее принятые обозначения множителей Лагранжа.

Естественными граничными условиями функционала (2.2) на C_2 являются соотношения (1.16) и на C_1 соотношения (1.15) и

$$T^i - \varkappa^i = 0, \qquad T - \varkappa = 0, \qquad M - \lambda = 0 \tag{2.3}$$

Дальнейшее преобразование полученной вариационной задачи производится при помощи принципа Курант-Гильберта [7]: если в какой-нибудь вариационной задаче присоединить одно или несколько из соответствующих стационарных условий к предварительным условиям задачи, то стационарный характер рассматриваемого выражения сохраняется и для новой задачи.

По этому принципу можно считать соотношения (2.3) предварительно удовлетворенными и ими уменьшить число варьируемых предыдущей задачи, исключив $\varkappa^i$, $\varkappa$ и λ из функционала (2.2). Если введем еще обозначение

$$2U(T, e) = T^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + S^{\alpha}\omega_{\alpha} + M^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} \tag{2.4}$$

то вариационная задача получает следующую общую форму 2: найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{V(e, \omega, \mu) - 2U(T, e) + 2U[T, e(v)] - J(X, v)\}\, d\sigma -$$
$$- \int_{C_1} K(T, v - u)\, ds - \int_{C_2} K(N, v)\, ds \tag{2.5}$$

Условиями стационарности функционала (2.5) являются все основные соотношения оболочки — (1.2)—(1.3), (1.7)—(1.8), (1.9)—(1.10) и как геометрические (1.15) так и статические граничные условия (1.16).

3. Каноническая вариационная задача и вариационная задача Кастильяно. Применение принципа Куранта-Гильберта позволяет из общей задачи 2 получить ряд новых формулировок вариационных задач. Форма задачи зависит от того, какие условия стационарности приняты за предварительные. Ниже приводятся те основные виды вариационной задачи, для получения которых предварительно удовлетворяются целые группы из условий стационарности.

Пусть соотношения упругости (1.9)—(1.10) удовлетворены. Тогда можно через их обратные соотношения (1.11)—(1.12) из функционала (2.5) исключить тензоры e_{ik}, ω_i и μ_{ik}. Получаемая вариационная задача 3, являющаяся соответствием известной канонической формы при рассматриваемом случае, гласит: найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{2U[T, e(v)] - H(T, S, M) - J(X, v)\}\, d\sigma -$$
$$- \int_{C_1} K(T, v - u)\, ds - \int_{C_2} K(N, v)\, ds \tag{3.1}$$

Обобщенная функция Гамильтона имеет здесь вид:

$$H(T, S, M) = \frac{1}{2} P_{\alpha\beta\gamma\delta}(B' T^{\alpha\beta} T^{\gamma\delta} + D' M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta}) + \frac{c_{\rho\pi} c_{\vartheta\varkappa} S^{\vartheta} S^{\rho} T^{\pi\varkappa}}{c_{\alpha\gamma} c_{\beta\delta} T^{\alpha\beta} T^{\gamma\delta}} \tag{3.2}$$

Для этой задачи систему условий стационарности образуют соотношения (1.2) — (1.3), (1.7) — (1.8), (1.15) и (1.16).

Преобразуем полученную задачу дальше. Для этого требуем, чтобы функциональные аргументы удовлетворяли еще уравнениям равновесия (1.7) — (1.8) и статическим граничным условиям (1.16). Неудовлетворительными остаются тогда только те связи, которые мы положили на исходную задачу 1, и геометрические граничные условия.

Легко проверить, что уравнения равновесия (1.7) — (1.8) тождественно удовлетворены, если T^{ik}, M^{ik} и S^i выразить через шесть функций напряжения ρ, η_i и ϑ^{ik} следующим образом:

$$T^{ik} = c^{i\alpha} c^{k\beta} \nabla_{\alpha\beta} \rho + T_0^{ik}, \qquad S^i = \nabla_\alpha \vartheta^{\alpha i} + S_0^i \tag{3.3}$$

$$M^{ik} = \left(c^{i\alpha} c^{k\beta} - \frac{1}{2} c^{ik} c^{\alpha\beta}\right) \nabla_\alpha \eta_\beta - c^{i\alpha} c^{k\beta} b_{\alpha\beta} \rho - \vartheta^{ik} + M_0^{ik} \tag{3.4}$$

где T_0^{ik}, M_0^{ik}, S_0^i — частное решение неоднородных уравнений (1.7) — (1.8).

Интегрированием по частям можно функционалу (3.1) дать такую форму, что выполнение условий (1.7) — (1.8) и (1.16) вызывает исчезновение членов, содержащих перемещения v_i, v. Вариационная задача 4 сформулируется так: найти стационарное значение функционала

$$-\int_S H[T(\rho),\ S(\rho),\ M(\rho)]\, d\sigma + \int_{C_1} K[T(\rho),\ u]\, ds \tag{3.5}$$

при граничных условиях (1.16).

Обозначения $T(\rho)$, $S(\rho)$, $M(\rho)$ показывают, что в соответствующих выражениях T^{ik}, S^i и M^{ik} надо заменить через (3.3) и (3.4).

В линейной теории упругости вариационная задача Кастильяно получается из вариационной задачи Лагранжа при помощи преобразования Фридрихса. Задача 4 получена таким же образом. Поэтому эту задачу нужно рассматривать как вариационную задачу Кастильяно в нелинейной теории оболочек.

Дифференциальными уравнениями Эйлера-Лагранжа задачи Кастильяно являются условия непрерывности кинетических тензоров (1.5) и (1.6).

Естественными граничными условиями для (3.5) на C_1 получаются следующие геометрические граничные условия в функциях напряжения:

$$\begin{gathered} c^{\alpha\gamma} c^{\beta\delta} \{t^\nu \nabla_\nu (e'_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}) n_\delta t_\gamma] + \nabla_\delta (e'_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}) n_\gamma\} = 0 \\ c^{\alpha\gamma} c^{\beta\delta} (e'_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}) n_\gamma n_\delta = 0, \quad c^{\alpha\gamma} c^{\beta i} (\mu'_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha\beta}) n_\gamma = 0 \\ (\omega_i' - \omega_i) n_k = 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь e'_{ik}, ω'_i и μ'_{ik} образуются по (1.2) и (1.3) из заданных u_i, u и e_{ik}, ω_i, μ_{ik} надо заменить функциями напряжения через (1.11) — (1.12) и (3.3) — (3.4).

4. Общая вариационная задача и каноническая вариационная задача в деформациях и функциях напряжения. Вариационную задачу Кастильяно можно рассматривать как новую исходную задачу и к ней применить преобразования, приведенные в предыдущих пунктах.

Если ввести вспомогательные переменные T^{ik}, S^i и M^{ik}, выбранные по (3.3) — (3.4), то общую вариационную задачу 5, полученную из задачи 4 таким же образом, как задача 2 из задачи 1, можно сформулировать следующим образом: найти стационарное значение функционала

$$-\int_S \{H(T,\ S,\ M) - 2U(T,\ e) + 2U[T(\rho),\ e]\}\, d\sigma +$$

$$+\int_{C_1} K[T(\rho),\ u]\, ds - \int_{C_2} K[N - T(\rho),\ v]\, ds \tag{4.1}$$

если v_i и v удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3).

Функциональными аргументами для (4.1) являются функция напряжения ρ, η_i, ϑ^{ik}, кинетические тензоры e_{ik}, ω_i, μ_{ik} и тензоры сил T^{ik}, S^i, M^{ik}.

Дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа функционала (4.1) образуют следующую систему основных уравнений оболочки: соотношения между T^{ik}, S^i, M^{ik} и функциями напряжения (3.3) — (3.4), условия непрерывности кинетических тензоров (1.5)—(1.6) и законы упругости (1.11)—(1.12).

Естественными граничными условиями задачи 5 являются на C_1 соотношения (3.6) и на C_2 следующие статические условия:

$$c^{i\alpha}c^{k\beta}\{\nabla_\alpha(\rho' - \rho)\, n_\beta + t^\gamma \nabla_\gamma[(\rho' - \rho)\, n_\alpha t_\beta]\} = 0$$

$$c^{i\alpha}c^{k\beta}(\rho' - \rho)\, n_\alpha n_\beta = 0, \quad \left(c^{i\alpha}c^k - \frac{1}{2}c^{ik}c^{\alpha\beta}\right)(\eta'_\beta - \eta_\beta)\, n_\alpha = 0$$

$$(\vartheta'^{i\alpha} - \vartheta^{i\alpha})\, n_\alpha = 0 \tag{4.2}$$

где ρ', η'_i и ϑ'^{ik} — решение уравнений (1.16), если в последних T^{ik}, S^i, и M^{ik} заменить по (3.3) и (3.4).

Исключение компонентов сил при помощи закона упругости из общей задачи 5 дает вариационной задаче каноническую форму 6: найти стационарное значение функционала

$$\int_S \{V(e,\omega,\mu) - 2U[T(\rho), e]\}\, d\sigma + \int_{C_1} K[T(\rho),\ u]\, ds - \int_{C_2} K[N - T(\rho), v]\, ds \tag{4.3}$$

если v_i, v удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3).

Условиями стационарности этой задачи будут (3.3)—(3.4), (1.5)—(1.6), (3.6) и (4.2).

Преобразование Фридрихса для задачи Кастильяно получается, если от функциональных аргументов задачи 6 потребовать удовлетворения условия непрерывности кинетических тензоров (1.5)—(1.6) и геометрические граничные условия (3.6). Первые из них тождественно удовлетворены, задав e_{ik}, ω_i, μ_{ik} через (1.2) и (1.3).

Так как полученная задача совпадает с исходной задачей Лагранжа, то цикл преобразований окончен.

5. Заключение. При исходной задаче 1 подынтегральное выражение $V(e,\ \omega,\ \mu)$ расчленяется на две части, соответствующие работе тангенциальных сил и моментов. Это обстоятельство делает возможным применение преобразования отдельно к обеим частям. Отметим, что если использовать содержащиеся здесь возможности, легко формулировать, кроме приведенных 6 задач, еще 65 вариационных задач.

Кроме названных, новые формы вариационной задачи получаются, если вместо функциональных аргументов S^i применить связанные ими аргументы ω_i. Для этого придется соотношениями (1.10) исключить в задаче 2 не ω_i, а S^i. Преобразование Фридрихса в этом случае приведет к случаю, представленному Галимовым[3].

Все рассмотренные задачи принадлежат циклу, полученному посредством вспомогательных переменных e_{ik}, ω_i и μ_{ik}. Задачами этого цикла еще не исчерпаны все возможные формулировки вариационной задачи, так как вспомогательные переменные можно выбирать и иным образом. Например, выбор ε_{ik}, μ_{ik} дает новый цикл задач (23 задачи, из которых 9 совпадают с задачами первого цикла). Этот цикл содержит и задачу Рейсснера[6], задачу[2] с варьируемыми ρ и v и задачу, данную Алумяэ[1].

Поступила 23 X 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н. А. Применение обобщенного вариационного принципа Кастильяно к исследованию послекритической стадии тонкостенных упругих оболочек. ПММ, т. XIV, вып. 1, 1950.
2. Алумяэ Н. А. Одна вариационная формула для исследования тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. ПММ, т. XIV, вып. 2, 1950.
3. Галимов К. З. К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
4. Галимов К. З. К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек. Ученые записки Казанского ГУ, т. 116, кн. 1, 1956.
5. Hu H. C. On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity. Scientia Sinica, vol. IV, No 1, 1955.
6. Reissner E. On a variatinal theorem for finite elastic deformations. Journ. Math. Phys., vol. 32, No 2—3, 1953.
7. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. т. I, гл. IV, § 9, 1951.
8. Алумяэ Н. А. Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. ПММ, т. XIII, вып. 1, 1949.