Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. И. Каландия
(Тбилиси)

Рассматриваются некоторые контактные задачи плоской теории упругости, когда соприкосновение между круговыми телами происходит без трения вдоль значительной части их границ, и следовательно, гипотезой Герца о малости участка контакта пользоваться нельзя. Дается вывод основных уравнений, совпадающих внешне с уравнением теории крыла конечного размаха с неизвестным параметром. К решению этих уравнений применяется известный прием Мультопа [1], в конкретных примерах приводятся численные расчеты.

§ 1. Пусть жесткий штамп с плоским симметрическим основанием вдавливается силой, действующей по оси штампа, в упругую среду, представляющую собой бесконечную плоскость с круговым отверстием.

Предполагается, что штамп может совершать лишь поступательное перемещение и, кроме того, напряжения и вращение отсутствуют на бесконечности.

Заданными считаются форма основания штампа (близкая к контуру отверстия) и главный вектор внешних сил, прижимающих штамп к границе среды.

Ищется напряженное состояние упругого тела.

Пусть рассматриваемая упругая среда занимает плоскость переменной $\zeta = \xi + i\eta$, из которой удален круг с центром в точке $\zeta = 0$ радиуса 1. Будем считать, что на штамп действует единственная сила величины P, направленная противоположно оси η.

Граничные условия задачи запишутся в виде (ср. [2], стр. 429)

$$N = 0, \quad T = 0 \quad \text{на } L_1; \qquad T = 0, \quad v_\rho = g(\sigma) \quad \text{на } L_2 \tag{1.1}$$

причем вторые из этих условий выполняются на дуге контакта L_2, не задаваемой заранее, а первые — на остальной части полной окружности L, $L = L_1 + L_2$. Здесь N, T — соответственно нормальная и касательная составляющие внешнего напряжения, действующего на контур L, v_ρ — нормальное (упругое) смещение, $g(\sigma)$ — заданная на L_2 действительная функция от точки $\sigma = e^{i\alpha}$, характеризующая форму основания штампа, ввиду симметрии удовлетворяющая условию $g(\sigma) = g(-\bar{\sigma})$.

В дальнейшем будем считать, что $g(\sigma)$ имеет вторую производную по дуге контура, удовлетворяющую условию Гельдера[1].

---

[1] Последнее условие (1.1) следовало бы писать более точно: $v_\rho = g(\sigma) + c \sin \alpha$, где c — поступательное перемещение штампа, но от этого смещения можно отвлечься, так как оно может быть устранено жестким поступательным смещением всей системы.

Для решения задачи введем функции Колосова-Мусхелишвили $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$. На границе области, как известно, имеет место соотношение ([2], стр. 335)

$$\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\sigma)}-\sigma\Phi'(\sigma)-\sigma^2\Psi(\sigma)=N-iT \qquad \text{на } L \tag{1.2}$$

Согласно принятому выше условию на бесконечности при больших $|\zeta|$ будем иметь

$$\Phi(\zeta)=\frac{a}{\zeta}+O(\zeta^{-2}), \qquad \Psi(\zeta)=\frac{b}{\zeta}+O(\zeta^{-2}) \tag{1.3}$$

причем коэффициенты A, b выражаются через компоненты главного вектора $(0, -P)$ внешних усилий следующим образом:

$$a=\frac{iP}{2\pi(1+\varkappa)}, \qquad b=\frac{i\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)} \qquad (\varkappa=3-4\nu) \tag{1.4}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона.

Условие $T=0$ на L в силу (1.2) представим в виде

$$\sigma\Phi'(\sigma)+\sigma^2\Psi(\sigma)-\overline{\sigma}\overline{\Phi'(\sigma)}-\overline{\sigma}^2\overline{\Psi(\sigma)}=0 \qquad \text{на } L \tag{1.5}$$

Отсюда, произведя операцию

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

и принимая во внимание (1.3), сразу находим

$$\begin{aligned} &\zeta\Phi'(\zeta)+\zeta^2\Psi(\zeta)=b(\zeta-\zeta^{-1})+A && \text{при } |\zeta|\geqslant 1 \\ &A=\lim \zeta^2[\Psi(\zeta)-b\zeta^{-1}] && \text{при } \zeta\to\infty \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для определения постоянной A помножим (1.2) на $\sigma^{-1}d\sigma$ и полученное равенство проинтегрируем вдоль L. Будем иметь

$$A=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{N(\sigma)\,d\sigma}{\sigma} \tag{1.7}$$

На основании (1.6) равенство (1.2) примет вид:

$$\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\sigma)}-b(\sigma-\overline{\sigma})-A=N \qquad \text{на } L$$

Отсюда, как и выше, находим

$$\Phi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{N(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{b}{\zeta} \qquad \text{при } |\zeta|>1 \tag{1.8}$$

Дифференцируя (1.8) по ζ и принимая во внимание непрерывность[1] нормального напряжения $N(\sigma)$ на границе L, получим

$$\Phi'(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{N'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{b}{\zeta^2} \tag{1.9}$$

Для определения $N(\sigma)$ на L воспользуемся известной формулой ([2], стр. 135)

$$2\mu v_\rho=\operatorname{Re}\{\overline{\sigma}[\varkappa\varphi(\sigma)-\sigma\overline{\varphi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}]\} \qquad \text{на } L \tag{1.10}$$

[1] Предполагается, что на границе контакта штамп не имеет угловых точек. При таком предположении $N(\sigma)$ будет непрерывной функцией на L, обращающейся в нуль на концах дуги контакта.

Из этого равенства дифференцированием по α, $\sigma = e^{i\alpha}$, получим, если учесть также (1.5), следующую формулу:

$$2\mu\left[v_\rho + \frac{d^2 v_\rho}{d\alpha^2}\right] = \operatorname{Re}\{(\varkappa-1)\Phi(\sigma) - (\varkappa+1)\sigma\Phi'(\sigma) + \sigma\Phi'(\sigma) + \sigma^2\Psi(\sigma)\} \text{ на } L_2 \quad (1.11)$$

Внося сюда предельные значения функции $\Phi(\zeta)$, $\Phi'(\zeta)$, даваемые формулами (1.8), (1.9), а также выражение для левой части (1.6), получим на основании последнего из условий (1.1) уравнение

$$\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}N(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{\pi i}\int_{L_2}\frac{N'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\sigma_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{N(\sigma)\,d\sigma}{\sigma} + \frac{\varkappa P i}{\pi(1+\varkappa)}\,(\sigma_0 - \bar{\sigma}_0) =$$

$$= \frac{4\mu}{\varkappa+1}\left[g(\sigma) + \frac{d^2 g(\sigma)}{d\alpha^2}\right] \quad \text{на } L_2 \qquad (1.12)$$

Для определения линии интегрирования в этом сингулярном интегро-дифференциальном уравнении имеем еще одно соотношение

$$\int_{L_2} N(\sigma)\,d\sigma = -P \qquad (1.13)$$

После нахождения $N(\sigma)$ и L_2 функции напряжения будут определены (1.8) и (1.6). В частном случае, когда жесткий штамп представляет собой вложенную в отверстие круглую шайбу того же радиуса, мы будем иметь $g(\sigma) = 0$ на L_2 и уравнение (1.12) примет вид:

$$\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}N(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{\pi i}\int_{L_2}\frac{N'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\sigma_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{N(\sigma)\,d\sigma}{\sigma} = \frac{\varkappa P}{\pi i(1+\varkappa)}(\sigma_0 - \bar{\sigma}_0) \qquad (1.14)$$

Примечание. Уравнение (1.12) (или, точнее, уравнение, получаемое из (1.12) при замене правой части некоторым ее приближенным выражением) содержится в работе В. В. Панасюка [3].

Указанное уравнение выводится несколько иным путем на основе результатов И. Н. Карцивадзе (например, [2], § 125, 126). Автор, по-видимому, не был знаком со сравнительно новыми аналитическими средствами, разработанными за последнее время для решения этого интегро-дифференциального уравнения (см. ниже, § 3).

Отметим также, что случай круглого штампа (того же радиуса, что отверстие) рассматривался М. П. Шереметьевым [4], который предложил способ построения уравнения (1.14), несколько отличный от применяемого здесь способа.

Однако рассуждение автора содержит упущение, ввиду чего уравнение, полученное в работе [4], неверно.

Как известно, в плоском деформированном случае между деформацией $e_{\alpha\alpha}$ и напряжениями σ_ρ, σ_α в полярных координатах существует согласно закону Гука зависимость вида

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \nu\sigma_\rho) - \frac{\nu^2}{E}(\sigma_\rho + \sigma_\alpha) \qquad (1.15)$$

где E — модуль упругости. Аналогичная же формула, пригодная в случае обобщенного плоского напряженного состояния, имеет вид:

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \nu\sigma_\rho) \qquad (1.16)$$

М. П. Шереметьев [4] пользуется исключительно формулой (1.16) [[4], стр. 439, формула (1.10)], ввиду чего его рассуждение справедливо лишь во втором из указанных плоских случаев. В этом случае уравнение автора [стр. 442, 2.15)] на самом деле совпадает с (1.14) (только на этот раз нужно брать $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$); следует учесть, что в работы [4] сила P направлена по оси ξ.

Настоящее замечание относится к рассуждению автора также и в других случаях равновесия бесконечной плоскости, рассмотренных в той же работе [4].

§ 2. Пусть в круговое отверстие, проделанное в бесконечной упругой среде, вставлена упругая, вообще говоря, с другими упругими свойствами круглая шайба того же радиуса. Предполагается, что шайба прижата к окружающему материалу сосредоточенной силой, приложенной к ее центру. По-прежнему будем считать, что напряжения и вращение исчезают на бесконечности.

Все элементы, относящиеся к шайбе (упругие постоянные, функции напряжения и пр.), отметим знаком 0 и запишем контурные условия задачи в виде (ср. [2], стр. 207)

$$N=0, \quad T=0 \quad \text{на } L_1, \qquad T=0, \quad v_\rho^0 = v_\rho \quad \text{на } L_2$$
$$N_0 - iT_0 = N - iT \quad \text{на } L \tag{2.1}$$

Функции напряжения $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, соответствующие бесконечной пластинке, будут по-прежнему выражаться формулами (1.8), (1.6).

Функции же $\Phi_0(\zeta)$, $\Psi_0(\zeta)$, соответствующие упругой шайбе, очевидно, будут иметь вид:

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{a_0}{\zeta} + \Phi_0{}^*(\zeta), \qquad \Psi_0(\zeta) = \frac{b_0}{\zeta} + \Psi_0^*(\zeta)$$
$$\left(a_0 = \frac{iP}{2\pi(1+\varkappa_0)}, \quad b_0 = a_0\varkappa_0 \right) \tag{2.2}$$

причем функции $\Phi_0^*(\zeta)$, $\Psi_0^*(\zeta)$ голоморфны в единичном круге.

Исходя из соответствующих условий (2.1), получим совершенно аналогично предыдущему

$$\zeta\Phi_0'(\zeta) + \zeta^2\Psi_0(\zeta) = a_0(\zeta - \zeta^{-1}), \qquad |\zeta| \leqslant 1 \tag{2.3}$$

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{N(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} + a_0\left(2\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + \frac{A}{2}, \qquad |\zeta| < 1 \tag{2.4}$$

где постоянная A дается формулой (1.7); при этом предполагается, что $\operatorname{Im}\Phi_0^*(0) = 0$. Из (2.4), используя по-прежнему условие

$$N(\sigma_*) = N(-\bar\sigma_*) = 0 \tag{2.5}$$

σ_*, $-\bar\sigma_*$ — конечные точки дуги L_2, находим

$$\Phi_0'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{N'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} + a_0\left(2 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \tag{2.6}$$

Составляя левую часть для v_ρ^0 и v_ρ и выражая равенство

$$v_\rho^0 + \frac{d^2 v_\rho^0}{d\alpha^2} = v_\rho + \frac{d^2 v_\rho}{d\alpha^2}$$

будем иметь

$$\mu_0 \operatorname{Re}\{(\varkappa - 1)\Phi(\sigma) - (\varkappa + 1)\sigma\Phi'(\sigma) + \sigma\Phi'(\sigma) + \sigma^2\Psi(\sigma)\} =$$
$$= \mu \operatorname{Re}\{(\varkappa_0 - 1)\Phi_0(\sigma) - (\varkappa_0 + 1)\sigma\Phi_0'(\sigma) + \sigma\Phi_0'(\sigma) + \sigma^2\Psi_0(\sigma)\} \quad \text{на } L_2 \tag{2.7}$$

Внеся сюда соответствующие выражения, даваемые предыдущими формулами, получим после некоторых упрощений

$$kN(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{N'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \sigma_0} - \frac{p}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{N(\sigma)\,d\sigma}{\sigma} = \frac{q}{2\pi i} P(\sigma_0 - \bar\sigma_0) \quad \text{на } L_2 \tag{2.8}$$

где

$$k = \frac{1}{2}\frac{(1-2\nu)(1+\nu)E_0-(1-2\nu_0)(1+\nu_0)E}{(1-\nu^2)E_0+(1-\nu_0^2)E} \tag{2.9}$$

$$p = \frac{(1-\nu^2)E_0}{(1-\nu^2)E_0+(1-\nu_0^2)E}, \quad q = \frac{1}{2}\frac{(1+\nu)\varkappa E_0+(1+\nu_0)E}{(1-\nu^2)E_0+(1-\nu_0^2)E} \tag{2.10}$$

причем E обозначает модуль упругости. Дуга контакта L_2 по-прежнему неизвестна, в виду чего к уравнению (2.8) следует, как и раньше, присоединить соотношение (1.13).

В случае, когда шайба и пластинка из одного материала ($\nu_0=\nu$, $E_0=E$), коэффициент k в (2.8) обращается в нуль, вследствие чего это уравнение решается в замкнутом виде. Решение (замкнутое) задачи в этом случае было найдено в работе [5].

Переходя в уравнении (2.8) к пределу при $E_0 \to \infty$, приходим к случаю абсолютно жесткой шайбы, — уравнение (1.14).

При $E=\infty$ имеем случай круглой упругой шайбы, вставленной в отверстие того же радиуса, проделанное в абсолютно жесткой пластинке, прижатой к ней сосредоточенной силой, приложенной к центру шайбы. При этом уравнение (2.8) дает

$$-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}N(\sigma_0)+\frac{\sigma_0}{\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{N'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\sigma_0}=\frac{P}{\pi i(1+\varkappa)}(\sigma_0-\bar\sigma_0) \qquad \text{на } L_2 \tag{2.11}$$

причем $\varkappa$ — упругая постоянная шайбы.

Уравнение (2.8) представляет собой пример уравнения плоской контактной задачи, трактуемой без каких-либо ограничительных предположений[1].

§ 3. В уравнение (2.8) внесем новую переменную, вводимую соотношением

$$\sigma = i\frac{x-i\beta}{x+i\beta}, \qquad \beta=\frac{\cos\alpha_*}{1+\sin\alpha_*}, \qquad \sigma_*=e^{i\alpha_*} \tag{3.1}$$

Предыдущая функция, как известно, дает преобразование единичной окружности $|\sigma|=1$ на действительную ось x, переводя дугу L_2 в отрезок $[-1,1]$; при этом точки окружности $-\bar\sigma_*$, σ_* переходят[2] соответственно в точки $x=-1$, $x=1$.

После очевидных преобразований будем иметь

$$\frac{k\beta}{x^2+\beta^2}N(x)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{N'(t)\,dt}{t-x}-\frac{p\beta^2}{\pi(x^2+\beta^2)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{N(t)\,dt}{t^2+\beta^2}=\frac{q\beta}{\pi}P\frac{x^2-\beta^2}{(x^2+\beta^2)^2} \tag{3.2}$$

$$N(1)=N(-1)=0$$

причем для простоты вновь полагаем $N(\sigma)=N(x)$. Равенство же (1.13) преобразуется к виду.

$$2\beta\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^2-\beta^2}{(t^2+\beta^2)^2}N(t)dt=P \tag{3.3}$$

---

[1] Контактные задачи подобного вида, приводящиеся к уравнениям такой же структуры, были впервые рассмотрены, по-видимому, в работах И. Я. Штаермана (например [6]). В настоящей работе мы обращаем внимание главным образом на возможность эффективного решения этих задач.

[2] Через σ_* обозначаем конечную точку дуги L_2, для которой $\operatorname{Re}\sigma_*>0$.

Уравнение (3.2), если не обращать внимания на неизвестный параметр β, представляет собой хорошо известное в литературе уравнение теории крыла конечного размаха, которое обычно записывается так:

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)\,dt}{t-x} = f(x) \tag{3.4}$$

Здесь B и f — заданные функции на отрезке $[-1,1]$, причем $B(x)$ нигде, за возможным исключением концов этого отрезка, в нуль не обращается, а $\Gamma(x)$ — искомая функция, подчиненная условию $\Gamma(1) = \Gamma(-1) = 0$.

Уравнению теории крыла посвящено большое количество работ (см., например, [7,8]). Среди многочисленных способов численного решения, посвященных этому уравнению, наиболее удачным с точки зрения практических применений оказался (прямой) метод Мультоппа [1], который благодаря своей простоте и эффективности считается до сего времени лучшим математическим аппаратом для аэродинамического расчета крыла.

Согласно этому методу искомая Γ представляется в виде тригонометрического интерполяционного полинома

$$L[\Gamma;\,x] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,\Gamma(x_k)\,\frac{\sin(n+1)\vartheta\sin\vartheta_k}{\cos\vartheta-\cos\vartheta_k} =$$
$$= \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\Gamma(x_k)\sum_{m=1}^{n}\sin m\vartheta_k\sin m\vartheta \tag{3.5}$$
$$x=\cos\vartheta, \qquad x_k=\cos\vartheta_k, \qquad \vartheta_k=\frac{k\pi}{n+1} \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant\pi;\ k=1,\ldots,n)$$

и после применения некоторой квадратурной формулы к особому интегралу в левой части (3.4) это уравнение заменяется системой линейных уравнений относительно приближенных значений $\overline{\Gamma}_k$ искомой функции в заданных (чебышевских) узлах x_k. Эта система имеет вид:

$$\left(\frac{1}{B_m} + b_{mm}\right)\overline{\Gamma}_m = f_m + \sum_{k=1}^{n}{}' \, b_{mk}\overline{\Gamma}_k \qquad (m=1,\ldots,n) \tag{3.6}$$

где $B_m = B(x_m), f_m = f(x_m)$; b_{mk} — известные также величины, причем $b_{mk}=0$ при $|m-k| = 2,4,\ldots$ Подставляя решение этой системы в правую часть (3.5) на место Γ_k, получим приближенное решение уравнения (3.4).

В названной работе Мультоппа [1] доказано, что метод последовательных приближений для (3.6) при неотрицательных $B(x)$ всегда сходится [1]. При отрицательных $B(x)$, встречающихся, как видно на примере уравнения (3.2), в приложениях к теории упругости, метод итерации применительно к системе (3.6) дает также сходящийся процесс, если только $B(x)$ удовлетворяет условию [2]

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{B(x)}\right| < \frac{1}{\pi} \tag{3.7}$$

---

[1] В применении к теории крыла функции $B(x)$ бывают исключительно такими.

[2] Обоснование метода Мультоппа и его применение в задачах рассматриваемого здесь вида содержатся в диссертации автора (Некоторые смешанные задачи теории упругости, Математический институт им. Стеклова АН СССР, 1955).

Указанный метод мы будем применять к решению полученных здесь уравнений.

Решая совместно (3.2) и (3.3), найдем согласно (3.5) приближенное решение уравнения (3.2) в виде

$$N(x)=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{n+1}\sum_{m=1}^{n}a_m U_{m-1}(x) \quad a_m=\sum_{k=1}^{n}\overline{N}_k\sin m\vartheta_k$$
$$U_{m-1}(x)=\frac{\sin m\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{3.8}$$

Функция $U_{m-1}(x)$ представляет собой полином от x порядка $m-1$ (полином Чебышева второго рода).

Для вычисления искомых величин задачи удобно перейти от физической плоскости переменной ζ к плоскости переменной $z=x+iy$ соотношением

$$\zeta=i\frac{z-i\beta}{z+i\beta} \qquad \left(\beta=\frac{\cos\alpha_*}{1+\sin\alpha_*}\right) \tag{3.9}$$

осуществляющим конформное отображение круга $|\zeta|<1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$. После преобразований находим формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{N(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{N(x)\,dx}{x-z}+\frac{\beta}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{N(x)\,dx}{x^2+\beta^2} \tag{3.10}$$

Но интеграл типа Коши в правой части (3.10) вычисляется в конечном виде, если $N(x)$ имеет вид (3.8). Следовательно, после решения способом Мультоппа уравнения контактной задачи, соответствующие функции напряжения определяются в замкнутом виде.

Примеры. 1. *Абсолютно жесткая круглая шайба, прижатая к отверстию в упругой пластинке* (внешняя задача). Уравнение задачи мы получим из (1.14) подстановкой (3.1) или же предельным переходом в (3.2) при $E_0\to\infty$. Уравнение это запишем в виде

$$\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{\beta}{x^2+\beta^2}N(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{N'(t)\,dt}{t-x}=\frac{\beta^2 q}{x^2+\beta^2}+\frac{2\varkappa\beta P}{\pi(1+\varkappa)}\frac{x^2-\beta^2}{(x^2+\beta^2)^2} \tag{3.11}$$

где

$$q=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{N(t)\,dt}{t^2+\beta^2} \tag{3.12}$$

Напомним, что параметр β, входящий в (3.11) и характеризирующий размер участка контакта, неизвестен и, кроме того, уравнение содержит в правой части не определенную пока постоянную q в виде функционала (3.12). В остальном (3.11) совпадает с (3.4), причем здесь $B(x)>0$ на $[-1,1]$.

Равенство (3.3) перепишем так:

$$c(\beta)\equiv\frac{2\beta}{P}\int_{-1}^{1}\frac{t^2-\beta^2}{(t^2+\beta^2)^2}N(t)\,dt=1 \tag{3.13}$$

В нашем (симметрическом) случае уравнения (3.11) система (3.6) при нечетных n будет иметь вид:

$$\left[\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{\beta}{\cos^2\vartheta_m+\beta^2}+b_{mm}\right]\overline{N}_m= \tag{3.14}$$
$$=\sum_{k=1}^{^1/_2(n+1)}B_{mk}\overline{N}_k+\frac{\beta^2 q}{\cos^2\vartheta_m+\beta^2}+\frac{2\varkappa P\beta}{\pi(1+\varkappa)}\frac{\cos^2\vartheta_m-\beta^2}{(\cos^2\vartheta_m+\beta^2)}2$$

где

$$\overline{\Gamma}_k=\overline{\Gamma}_{n+1-k} \qquad (m=1,2,\ldots,{}^1/_2(n+1))$$
$$B_{mk}=b_{mk}+b_{m,\,n+1-k} \quad (k=1,\ldots,{}^1/_2(n-1)),\ B_{m,\,^1/_2(n+1)}=b_{m,\,^1/_2(n+1)} \tag{3.15}$$

Решая эту систему при некотором определенном значении параметра β (например, при $\beta=1$), найдем неизвестные $\overline{N}_k$ в виде

$$\overline{N}_k = N_k^{(0)} q + N_k^{(1)} \qquad (k=1, \ldots, n) \tag{3.16}$$

причем $N_k^{(0)}$, $N_k^{(1)}$ будут известными числами. Соответствующее приближенное решение $\overline{N}(x)$ будет, очевидно, содержать постоянную q, определяемую впоследствии из (3.12). Затем после определения $\overline{N}(x)$ вычисляется левая часть равенства (3.13). При этом для определения q и $c(\beta)$ используется квадратурная формула типа Гаусса (например, [9], стр. 617)

$$q = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \vartheta_k \overline{N}_k}{\cos^2 \vartheta_k + \beta^2}$$

$$c(\beta) \equiv \frac{2\beta\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \vartheta_k (\cos^2 \vartheta_k - \beta^2)}{(\cos^2 \vartheta_k + \beta^2)^2} \frac{\overline{N}_k}{P} = 1 \tag{3.17}$$

Взятое нами значение β и соответствующее ему $N(x)$ не будут, вообще говоря, удовлетворять равенству (3.13). Поэтому, подбирая новые β, мы будем повторять наши вычисления до тех пор, пока указанное равенство не будет удовлетворяться с нужной точностью. В результате будем иметь некоторые приближенные значения β и $N(x)$ для данного n. Затем берутся другие n и указанные вычисления повторяются.

В системе (3.14) положим сначала $n=7$ и примем для дальнейших вычислений коэффициент Пуассона равным $1/3$. В развернутом виде полученная система представится так[1]:

$$\left[\frac{\beta}{4(\cos^2\vartheta_1+\beta^2)} + 5.2262\right]\overline{N}_1 =$$
$$= 1.9142\,\overline{N}_2 + 0.1464\overline{N}_4 + \frac{q\beta^2}{\cos^2\vartheta_1+\beta^2} + \frac{5}{4}\beta\frac{\cos^2\vartheta_1-\beta^2}{(\cos^2\vartheta_1+\beta^2)^2}\frac{P}{\pi}$$

$$\left[\frac{\beta}{4(\cos^2\vartheta_3+\beta^2)} + 2.1648\right]\overline{N}_3 =$$
$$= 0.9142\,\overline{N}_2 + 0.8536\,\overline{N}_4 + \frac{q\beta^2}{\cos^2\vartheta_3+\beta^2} + \frac{5}{4}\beta\frac{\cos^2\vartheta_3-\beta^2}{(\cos^2\vartheta_3+\beta^2)^2}\frac{P}{\pi}$$

$$\left[\frac{\beta}{4(\cos^2\vartheta_2+\beta^2)} + 2.8284\right]\overline{N}_2 =$$
$$= 1.0360\,\overline{N}_1 + 1.1944\,\overline{N}_3 + \frac{q\beta^2}{\cos^2\vartheta_2+\beta^2} + \frac{5}{4}\beta\frac{\cos^2\vartheta_2-\beta^2}{(\cos^2\vartheta_2+\beta^2)^2}\frac{P}{\pi}$$

$$\left[\frac{\beta}{4(\cos^2\vartheta_4+\beta^2)} + 2.0000\right]\overline{N}_4 =$$
$$= 0.1121\,\overline{N}_1 + 1.5774\,\overline{N}_3 + \frac{q\beta^2}{\cos^2\vartheta_4+\beta^2} + \frac{5}{4}\beta\frac{\cos^2\vartheta_4-\beta^2}{(\cos^2\vartheta_4+\beta^2)^2}\frac{P}{\pi}$$

$$\vartheta_k = \frac{k\pi}{8}, \qquad k=1, 2, 3, 4 \tag{3.18}$$

Решая эту систему совместно с (3.17), будем иметь (значения для q и $N_k^{[1]}$ в (3.16), а также $\overline{N}_k$ даются в P/π)[2]

$$\beta = 1.20886, \quad q = -0.52422 \tag{3.19}$$

$$\overline{N}_1 = 0.48035\,q - 0.29067 = -0.54248,\ \overline{N}_2 = 0.91050\,q - 0.63176 = -1.10906$$
$$\overline{N}_3 = 1.23317\,q - 1.00926 = -1.65571,\ \overline{N}_4 = 1.35900\,q - 1.20474 = -1.91715 \tag{3.20}$$

[1] В работе [1] имеются таблицы для численных значений коэффициентов b_{mk} при $n=7.15.31$.

[2] Здесь и в дальнейшем будем требовать, чтобы относительная погрешность в (3.17) не превосходила 0.1%.

Найденному β соответствует значение полярного угла

$$\alpha_* = -10^\circ 48' 12'' \tag{3.21}$$

чем и определяется дуга контакта L_2. При этих значениях неизвестных левая часть (3.17) равна

$$c(\beta) = 0.99947$$

Для максимального давления при нашем приближении[1] согласно (3.20) будем иметь

$$N|_{x=0} \approx \overline{N}_4 = -0.61025\, P \tag{3.22}$$

Далее в (3.14) возьмем $n = 15$. Эту систему из восьми уравнений (с пятью разделенными неизвестными в каждом из них) мы будем решать методом последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения для $\overline{N}_2$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_6$, $\overline{N}_8$ используем соответственно значения (3.20) с неизвестным q.

Решая эту систему при найденном β совместно с (3.17), получим (второе приближенное по Мультоппу)

$$q = -0.52418 \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} &\overline{N}_1 = 0.24397\, q - 0.14220 = -0.27008, && \overline{N}_2 = 0.48054\, q - 0.29080 = -0.54269 \\ &\overline{N}_3 = 0.70465\, q - 0.45269 = -0.82206, && \overline{N}_4 = 0.91061\, q - 0.63180 = -1.10913 \\ &\overline{N}_5 = 1.09038\, q - 0.82382 = -1.39537, && \overline{N}_6 = 1.23312\, q - 1.00927 = -1.65565 \\ &\overline{N}_7 = 1.32624\, q - 1.15058 = -1.84577, && \overline{N}_8 = 1.35877\, q - 1.20437 = -1.91663 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Для этих значений β и $\overline{N}_k$ $(k = 1, \ldots, 8)$ левая часть (3.17) дает

$$c(\beta) = 0.99933$$

Для максимального напряжения имеем

$$N|_{x=0} \simeq \overline{N}_8 = -0.61008\, P \tag{3.25}$$

Как видно из приведенного выше, искомые величины в первом и во втором приближениях мало отличаются друг от друга.

2. *Круглая упругая шайба, прижатая к отверстию в жесткой пластинке* (внутренняя задача). Соответствующее уравнение получится из (2.11), если внести туда (3.1). Оно имеет вид:

$$-\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{\beta}{x^2 + \beta^2} N(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{N'(t)\, dt}{t - x} = \frac{2\beta P}{\pi(1 + \varkappa)} \frac{x^2 - \beta^2}{(x^2 + \beta^2)^2} \tag{3.26}$$

Это уравнение (со сделанной выше оговоркой относительно β) также совпадает с (3.4), причем на этот раз $B(x) < 0$ на $[-1,1]$.

Система (3.6) для уравнения (3.26) внешне мало чем отличается от системы (3.14). Она имеет вид:

$$\left[-\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{\beta}{\cos^2 \vartheta_m + \beta^2} + b_{mm}\right] \overline{N}_m = \sum_{k=1}^{{}^1/_2(n+1)} B_{mk} \overline{N}_k + \frac{2\beta P}{\pi(1 + x)} \frac{\cos^2 \vartheta_m - \beta^2}{(\cos^2 \vartheta_m + \beta^2)^2} \tag{3.27}$$

$$(m = 1, \ldots, {}^1/_2\,(n + 1))$$

Эту систему следует решать, как и раньше, удовлетворяя равенству (3.17) и тем самым определяя параметр β. При $n = 7$ мы будем иметь следующие значения для искомых ($\overline{N}_k$ даются в P / π):

$$\beta = 0.91612 \tag{3.28}$$

$$\overline{N}_1 = -0.37480, \quad \overline{N}_2 = -0.85751, \quad \overline{N}_3 = -1.47396, \quad \overline{N}_4 = -1.84453 \tag{3.29}$$

При этих значениях $c(\beta) = 1.00034$.

---

[1] Решение $\overline{N(x)}$, соответствующее $n = 7$, принято считать по Мультоппу первым приближением.

Отсюда для искомого значения угла α, соответствующего концу дуги контакта, получается

$$\alpha_* = 5^\circ\, 00'\, 46'' \tag{3.30}$$

а максимальное давление будет равно

$$N\,|_{x=0} \simeq \bar{N}_4 = -0.58713P \tag{3.31}$$

В (3.27) положим далее $n = 15$. Решая эту систему при (3.28), получим [1]

$$\bar{N}_1 = -0.17990,\quad \bar{N}_2 = -0.37458,\quad \bar{N}_5 = -1.15746,\quad \bar{N}_6 = -1.47378$$

$$\bar{N}_3 = -0.59686,\quad \bar{N}_4 = -0.85727,\quad \bar{N}_7 = -1.73637,\quad \bar{N}_8 = -1.84215 \tag{3.32}$$

При этом $c(\beta) = 0.99905$. В частности, для максимального нормального напряжения во втором приближении будем иметь

$$N\,|_{x=0} \simeq \overline{N_8} = -0.58638P$$

По найденным $\bar{N}(x)$ и β можно, как это указано выше, вычислить все другие искомые соответствующей контактной задачи. В частности, нетрудно подсчитать нормальные смещения, которые будут удовлетворять контурному условию задачи с некоторой погрешностью [2].

В заключение отмечу, что указанние вычисления проводились в Вычислительном центре АН СССР. Пользуясь случаем, выражаю признательность дирекции Вычислительного центра за оказанную помощь, а также сотрудникам вычислительного отдела Е. С. Богомоловой и Т. М. Копыловой за быструю и четкую работу.

Поступила 12 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Multhopp H. Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln. Luftfahrtforschung, Bd. XV, 1938.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 3-е изд. Изд. АН СССР, М. — Л., 1949.
3. Панасюк В. В. Контактная задача для кругового отверстия. Научн. зап. ин-та машиноведения и автоматики АН УССР, т. III, серия машиноведения вып. 2, 1954.
4. Шереметьев М. П. Упругое равновесие бесконечной пластинки с вложенной абсолютно жесткой или упругой шайбой. ПММ, т. XVI, вып. 4, 1952.
5. Народецкий М. З. Об одной контактной задаче. ДАН СССР. т. XLI, № 6, 1943.
6. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат. М.—Л., 1946.
8. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
9. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, Л.—М., 1949.

---

[1] При нашем β и принятом выше значении коэффициента Пуассона функция $B(x)$ в (3.26) удовлетворяет условию (3.7). Однако нужно сказать, что метод последовательных приближений в этом случае сходится значительно медленнее, чем в предыдущем. По этой причине названный метод применительно к системе (3.6) при отрицательных $B(x)$ [даже при наличии (3.7)] не всегда может оказаться предпочтительным.

[2] Например абсолютная погрешность для величины $\mu / P\,(v_\rho + d^2 v_\rho / d\alpha^2)$ в случае внешней задачи не превосходит 0.0072.