**Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957**
**Институт механики Академии наук Союза ССР**

# МЕДЛЕННЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ

**Хуан Тун**

(Пекин)

В истории сотни раз отмечались появление длинных волн в океане, которые называются цунами [1]. В открытом океане цунами распространяются со скоростью порядка 0.2 *км/сек*; длина волн порядка 50—100—200 *км*. Цунами становятся очень высокими около берега и могут вызвать большую катастрофу.

Для прогноза цунами нужно выяснить механизм возникновения и распространения этих волн.

Классическая теория волновых движений тяжелой жидкости не может ответить на вопрос о том, как колеблется дно при движении в океане тяжелых волн (приливных или цунами), так как в ней дно считается неподвижным.

В данной работе дно океана принимается за упругое полупространство, а океан рассматривается как слой тяжелой жидкости. Показано, что в упругом полупространстве, покрытом слоем тяжелой жидкости, могут распространяться гармонические упругие поверхностные волны со скоростью от нуля до примерно $\sqrt{gH}$, где $g$ — ускорение силы тяжести, $H$ — глубина жидкости слоя.

Так как эта скорость меньше скорости распространения всех известных до настоящего времени упругих волн, мы назовем эти волны «медленными упругими волнами». Дана формула, определяющая отношение амплитуды медленных упругих волн к амплитуде волн на свободной поверхности. Дается также закон дисперсии. Показано, кроме того, что не существует волны, распространяющейся медленнее волн Стонлея [2] и быстрее медленных упругих волн, если пренебрегать сжимаемостью жидкого слоя.

**§ 1. Дифференциальные уравнения и граничные условия.** Рассмотрим плоскую задачу распространения волн в системе, состоящей из слоя невязкой жидкости и изотропной однородной упругой полуплоскости.

Неподвижную систему координат выберем так, чтобы в состоянии покоя жидкий слой находился в полосе $0 \leqslant y \leqslant H$, $-\infty < x < +\infty$, а упругая среда заполняла полуплоскость $y < 0$.

Для изучения волны на свободной поверхности жидкого слоя необходимо учесть силу тяжести, действующую на жидкий слой. Учитывается сжимаемость жидкости наряду с учетом упругости дна, так как модули упругости воды и дна океана соизмеримы. Вследствие малой сжимаемости и большой теплоемкости воды для упрощения задачи скорость звука $c$ в жидкости можно принять постоянной по времени и по координатам.

Для жидкого слоя плотность и компоненты скорости по осям обозначим через $\rho$, $u$, $v$. Еще предполагаем существование потенциала скоростей в жидкости $\varphi$, так что

$$u = \partial\varphi / \partial x, \qquad v = \partial\varphi / \partial y \tag{1.1}$$

причем $\varphi$ удовлетворяет уравнению[2, 3, 4]

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 t}+\frac{g}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

Отметим, что член $\partial\varphi/\partial y$ обусловлен изменением плотности сжимаемой воды по глубине вследствие силы тяжести. Для невесомой жидкости этот член обращается в нуль.

Из условия постоянства давления на свободной поверхности, состоящей из одних и тех же частиц, имеем уравнение для определения вида свободной поверхности

$$\eta=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=H} \tag{1.3}$$

и следующее граничное условие, приведенное к линейному виду и перенесенное на невозмущенную свободную поверхность $y=H$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad \text{при } y=H \tag{1.4}$$

Для потенциалов перемещений в упругой полуплоскости, характеризуемой двумя постоянными скоростями $1/a$, $1/b$ продольной и поперечной волн и постоянной плотностью $\rho_1$, имеем следующие дифференциальные уравнения[5]

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=b^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

Для сокращения в последующем будем рассматривать случай Пуассона, когда $b^2=3a^2$. Это ограничение не влияет на существо результата. Для компонент $U$, $V$ упругого перемещения по направлениям $x$, $y$ имеем

$$U=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad V=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{1.6}$$

На поверхности раздела $y=0$ имеем три условия сопряжения: $(i)$ — непрерывность нормальных напряжений, $(ii)$ — непрерывность нормальной составляющей скорости, $(iii)$ — обращение в нуль касательного напряжения в упругой среде на поверхности раздела, так как жидкость считается невязкой. Эти три условия после линеаризации примут вид:

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\lambda\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)-2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)=0 \qquad \text{при } y=0 \tag{1.7}$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial y}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial t}=0 \qquad \text{при } y=0 \tag{1.8}$$

$$2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=0 \qquad \text{при } y=0 \tag{1.9}$$

Итак, имеем три дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами (1.2), (1.5) при граничном условии на свободной поверхности (1.4) и три условия сопряжения (1.7) — (1.9).

**§ 2. Прогрессивные волны. Закон дисперсии.** Ставятся такие вопросы: существуют ли прогрессивные волны в изучаемой системе, состоящей из слоя тяжелой жидкости и упругой полуплоскости? Если такие волны существуют, то каковы их характеристики? Каково отношение амплитуд волны на свободной поверхности и волны на поверхности раздела?

Пусть распростаняются прогрессивные гармонические волны со скоростью $\sigma / k$ в отрицательном направлении оси $x$ и с частотой $\sigma / 2\pi$, так что длина волн $\lambda$ равняется $2\pi / k$.

Вводим следующие безразмерные величины:
$m = a\sigma / k$ — скорость распространения прогрессивной гармонической волны, $n = kH = 2\pi H / \lambda$ — безразмерное волновое число, $\zeta = a^2 gH$ — малый параметр, $\xi = gH / c^2$ — малый параметр,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + n^2\left(1 - \frac{m^2}{a^2c^2}\right)}, \quad \text{если} \quad \frac{\xi^2}{4} + n^2\left(1 - \frac{m^2}{a^2c^2}\right) > 0$$
$$\alpha = i\sqrt{-n^2\left(1 - \frac{m^2}{a^2c^2}\right) - \frac{\xi^2}{4}}, \quad \text{если} \quad \frac{\xi^2}{4} + n^2\left(1 - \frac{m^2}{a^2c^2}\right) < 0 \tag{2.1}$$

Во всех практических случаях $\xi$, $\zeta$ являются малыми величинами. Например, для твердого дна океана $1 / a = 7$ *км/сек*. Если $H$ равняется 4 *км* (средняя глубина Тихого океана), то $\zeta$ равняется 0.0008. Если примем, что $c = {}^3/_2$ *км/сек*, то $\xi = 0.0168$.

Ищем потенциалы в следующем виде: (2.2)

$$\varphi = -\frac{A}{2}\exp\left[\frac{\xi}{2}\frac{y}{H} + in\frac{x}{H} + imn\left(\frac{t}{aH}\right)\right]\left[(1+W)\exp\frac{\alpha y}{H} + (1-W)\exp\frac{-\alpha H}{H}\right]$$
$$\Phi = B\exp\left[in\frac{x}{H} + imn\left(\frac{t}{aH}\right) + n\sqrt{1-m^2}\,\frac{y}{H}\right]$$
$$\Psi = L\exp\left[in\frac{x}{H} + imn\left(\frac{t}{aH}\right) + n\sqrt{1-3m^2}\,\frac{y}{H}\right]$$

где $A, B, L, W$ — постоянные относительно $x$, $y$, $t$ величины, подлежащие определению из граничных условий (1.4), (1.7), (1.8), (1.9); их можно трактовать как амплитуды.

Легко проверить, что уравнения (1.2) удовлетворены.

При $m^2 \leqslant {}^1/_3$ радикалы $\sqrt{1-m^2}$, $\sqrt{1-3m^2}$ являются положительными действительными числами. Условие ограниченности $\Phi$, $\Psi$ при стремлении $y$ к $-\infty$ приводит к требованию $n > 0$.

Итак, при $m^2 < {}^1/_3$ имеем в упругой полуплоскости только поверхностные упругие волны.

Из граничного условия (1.4) вытекает, что

$$-W = \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})(n^2m^2 - {}^1/_2\xi\zeta) - \zeta\alpha(e^\alpha - e^{-\alpha})}{(e^\alpha - e^{-\alpha})(n^2m^2 - {}^1/_2\xi\zeta) - \zeta\alpha(e^\alpha + e^{-\alpha})} \tag{2.3}$$

Из условий (1.7), (1.8), (1.9) имеем

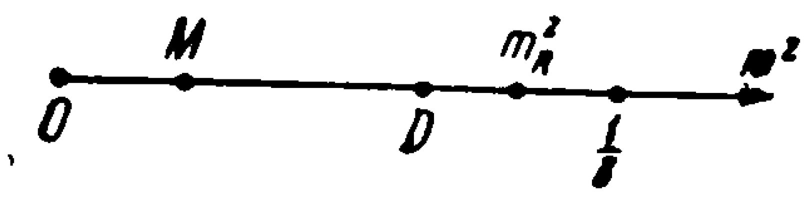
$$-i3m^2\frac{\rho}{\rho_1}\frac{1}{\sigma}A + (3m^2 - 2)B + 2i\sqrt{1-3m^2}\,L = 0$$
$$-\frac{i}{\sigma n}\left(\alpha W + \frac{\xi}{2}\right)A + \sqrt{1-m^2}\,B - iL = 0 \tag{2.4}$$
$$2i\sqrt{1-m^2}\,B + (2-3m^2)L = 0$$

Если изучаемые прогрессивные волны существуют, то амплитуды $A$, $B$, $L$ одновременно не обращаются в нуль. Значит, обращается в нуль детерминант системы (2.4).

Таким образом, получаем уравнение для определения частоты:

$$-9nm^4 \frac{\rho}{\rho_1} \sqrt{1-m^2} + \left(\alpha W + \frac{\xi}{2}\right)\left[(2-3m^2)^2 - 4\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-3m^2}\right] = 0 \quad (2.5)$$

При $\rho = 0$ получаем отсюда скорость поверхностной волны Рэлея для упругого полупространства со свободной поверхностью, квадрат которой для случая Пуассона равняется




Фиг. 1

$$m_R^2 = \frac{4}{3} \frac{1}{(3+\sqrt{3})} = 0.2817664 \quad (2.6)$$

Стонлей[2] в 1926 г. изучал уравнение (2.5) приближенно в предположении, что $m$ близко к $m_R$, и обнаружил волны, носящие теперь его имя.

Д. И. Шерман[6] и Н. В. Зволинский[7] изучали уравнение (2.5) в предположении, что жидкость невесома, т. е. $g = 0$, $\xi = 0$, $\zeta = 0$.

Н. В. Зволинский[7] установил, что существует одна точка $D$ на оси $m^2$ (фиг. 1) правее начала координат и $\sqrt{D}$ является минимальной скоростью поверхностных волн (волн Стонлея) в упругом полупространстве, покрытом слоем сжимаемой, но невесомой жидкости.

Если положим $c^{-1} = 0$, $a = 0$ в (2.5), то вернемся к случаю, изучаемому в классической теории волновых движений в слое тяжелой несжимаемой жидкости, лежащем на жестком дне, т. е. $W = 0$ или

$$\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 = \frac{g}{k} \operatorname{th} kH < gH \quad (2.7)$$

Такие волны в океане с глубиной 4 *км* могут распространяться с безразмерной скоростью от нуля до $\sqrt{\zeta}$, что соответствует размерной скорости от нуля до 0.2 *км/сек*$^{-1}$.

Отметим, что по наблюдению опасные для населения побережья Тихого океана цунами распространяются со скоростью именно порядка 0.2 *км/сек* при длине волны порядка 100 *км*, т. е. $m^2$ близко к $\zeta$, а $n$ близко к $^1/_3$ для $H = 4$ *км*.

Уравнение (2.7) наводит на мысль, что полное уравнение (2.5) определяет некоторую непрерывную функцию $m^2$ от $n$, т. е.

$$m^2 = m^2(n) \quad (2.8)$$

в некотором интервале $0 < m^2 < M$ (фиг. 1).

Считаем (2.7) нулевым приближением функции (2.8).

Первое приближение ищем в следующем виде:

$$m^2 = \frac{\zeta}{n} \operatorname{th} n \left[1 - \zeta a_1 - \xi b_1 + O(\xi^2)\right] \quad (2.9)$$

где $O(\xi^2)$ — член порядка $\xi^2$ или $\zeta\xi$ или $\zeta^2$. Нужно определить $a_1$, $b_1$. Здесь пренебрегаем кривизной земли, следовательно рассматриваются волны с длиной не больше, скажем, 400 *км*. Примем следующее ограничение:

$$n > 3.6\,\xi \tag{2.10}$$

Это значит, $\lambda < 400$ *км*, если скорость звука в жидкости равна 1.5 *км/сек*.

Учитывая (2.9), (2.10), а также малость значения $m^2$ в интервале $(0, M)$, имеем

$$\alpha = n - \tfrac{1}{2}\xi\,\mathrm{th}\,n\,[1 + O(\xi)] \tag{2.11}$$

$$W = \tfrac{1}{2}\xi\left(\mathrm{th}\,n - \frac{1}{n}\right) - \frac{\mathrm{th}\,n}{1-\mathrm{th}^2 n}(\zeta a_1 + \xi b_1) + O(\xi^2) \tag{2.12}$$

$$F(m^2) = -\frac{9\rho}{\rho_1}m^4\frac{\sqrt{1-m^2}}{(2-3m^2)^2 - 4\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-3m^2}} = \frac{9\rho}{4\rho_1}m^2 + O(\zeta^2) \tag{2.13}$$

Подставляя (2.9), (2.11) — (2.13) в (2.5) и собирая все малые члены в $O(\xi^2)$, получаем

$$\frac{9\rho}{2\rho_1}\frac{\zeta}{n} + \xi - 2\mathrm{ch}^2 n\,(\zeta a_1 + \xi b_1) + O(\xi^2) = 0$$

Следовательно,

$$a_1 = \frac{9\rho}{4\rho_1}\frac{1}{n\,\mathrm{ch}^2 n}, \qquad b_1 = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2 n} \tag{2.14}$$

$$(n > 3.6\,\xi)$$

$$m^2 = \frac{\zeta}{n}\mathrm{th}\,n\left[1 - \zeta\frac{9\rho}{4\rho_1 n\,\mathrm{ch}^2 n} - \xi\frac{1}{2\mathrm{ch}^2 n} + O(\xi^2)\right] \tag{2.15}$$

Формула (2.15) есть не что иное, как приближенный закон дисперсии изучаемой системы волн (2.2) при $0 < m^2 < M$, $n > 3.6\,\xi$. В упругой полуплоскости распространяются прогрессивные гармонические поверхностные волны. Скорость их мала по сравнению со скоростью волны Рэлея $m_R$, поэтому эти волны будем называть медленными упругими волнами.

**§ 3. Амплитуды волн.** Из уравнений (2.4) можно определить отношение амплитуд, например

$$A = \frac{3}{2}m^2\sigma\left(-\frac{n}{\alpha W + {}^1/_2\xi}\right)L, \qquad B = \frac{i(2-3m^2)}{2\sqrt{1-m^2}}L \tag{3.1}$$

По формулам (2.4), (2.5), (1.3), (1.6) можно получить отношение амплитуды колебания свободной поверхности к амплитуде колебания поверхности раздела $V_{y=0}$:

$$\begin{gathered}\eta = \frac{3m^2\sigma^2}{2gF}i\left[\mathrm{ch}\,\alpha + W\,\mathrm{sh}\,\alpha\right]Le^{i\sigma t + ikx} \\ V_{y=0} = -i\frac{3}{2}m^2kLe^{i\sigma t+ikx} \\ \frac{\eta}{V_{y=0}} = -\frac{m^2 n}{\zeta F}\left[\mathrm{ch}\,\alpha - \left(\frac{nF}{\alpha} + \frac{\xi}{2\alpha}\right)\mathrm{sh}\,\alpha\right]e^{{}^1/_2\xi}\end{gathered} \tag{3.2}$$

После некоторого алгебраического преобразования имеем

$$\frac{\eta}{V_{y=0}} = e^{1/2\xi}\left\{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha\left[\frac{\zeta}{\alpha m^2} - \frac{\xi}{2\alpha}\right]\right\}^{-1} \tag{3.3}$$

Отметим, что формула (3.3) получена из (2.4), (2.5) точно, и применима для $0 < m < 1/3$ и $0 < n < \infty$. Следовательно, (3.3) тоже применима для выяснения отношения амплитуды волн Стонлея.

Для волн, подчиняющихся закону дисперсии (2.15), имеем

$$\frac{\eta}{V_{y=0}} = e^{1/2\xi}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\xi \operatorname{th}^2 n\right)\operatorname{ch} n - \left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)\operatorname{ch} n\,(1 + \zeta a_1 + \xi b_1)\right]^{-1} =$$

$$= e^{1/2\xi}\frac{\operatorname{ch} n}{-9/4\,(\rho/\rho_1)(\zeta/n) + O(\xi^2)} \qquad (n > 3.6\,\xi) \tag{3.4}$$

Величину $-9/4\,(\rho/\rho_1)(\zeta/n)$ можно трактовать как понижение дна вследствие сжатия упругого полупространства. Знаменатель не содержит члена с множителем $\xi$ в первой степени. Это означает, что можно пренебречь сжимаемостью жидкости при выяснении отношения амплитуд в первом приближении.

*Пример.* Если принять, что

$$H = 4\ \textit{км},\quad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{1}{4},\quad n = kH = \frac{2\pi H}{\lambda} = \frac{1}{4},\quad a = \frac{1}{7}\,\frac{\textit{сек}}{\textit{км}},\quad c = 1.5\,\frac{\textit{км}}{\textit{сек}}$$

то

$$\xi = 0.0168,\quad \zeta = 0.0008,\quad \sqrt{gH} = 0.2\,\frac{\textit{км}}{\textit{сек}}$$

$$\frac{\eta}{V_{y=0}} = e^{0.0084}\,\frac{2\times 1.031}{-0.0036 + O(\xi^2)} = 570$$

Значит, длинные волны ($\lambda \sim 32\pi$ *км*) сопровождаются медленными упругими волнами в дне с амплитудой в 570 раз меньше.

Если после землетрясения в дне океана возникают упругие волны, состоящие из агрегата медленных упругих прогрессивных гармонических волн с заметной амплитудой, то надо ожидать, что на поверхности океана будут распространяться большие длинные поверхностные волны.

**§ 4. Существуют ли другие волны?** Строго говоря, (2.15) еще не подтверждает существования (2.8) в интервале $0 < m^2 < M$. Кроме того, интересно еще выяснить, существуют ли какие-нибудь другие волны, которые распространяются быстрее медленных упругих волн и медленнее волн Стонлея в изучаемой системе.

Для выяснения этих вопросов делаем одно упрощение: будем пренебрегать сжимаемостью жидкости. В этом предположении $\zeta \neq 0$, $\xi = 0$ и уравнение (2.5) принимает вид:

$$F(m^2) = -W\ (m^2, n) \tag{4.1}$$

где

$$F(m^2) = -\frac{9\rho/\rho_1 m^4\sqrt{1-m^2}}{(2-3m^2)^2 - 4\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-3m^2}}$$

$$-W = \frac{1}{\operatorname{th} n}\,\frac{\Gamma}{M},\qquad \Gamma = m^2 - \frac{\zeta}{n}\operatorname{th} n,\qquad M = m^2 - \frac{\zeta}{n\operatorname{th} n}$$

Легко показать монотонность функции $F(m^2)$ при $m^2 < 1/3$. $F(m^2)$ зависит от трех параметров: $m^2$, $\rho/\rho_1$, $a/b$. Топологически структура функции $F(m^2)$ сильно не меняется при изменении $\rho/\rho_1$, $a/b$. Для конкретности примем

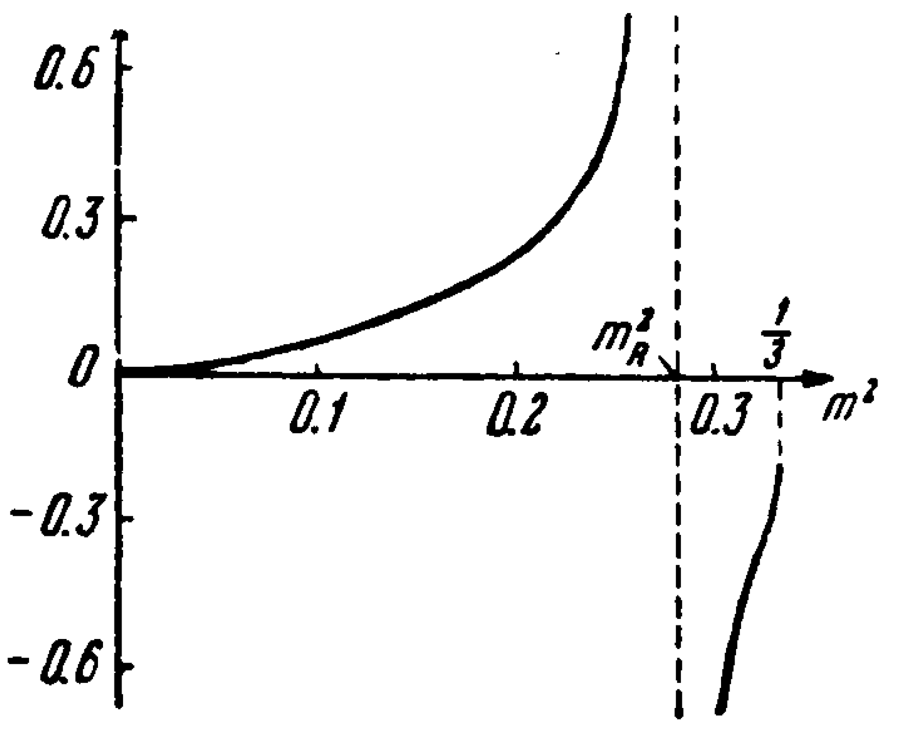
$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{1}{4.3},\qquad \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Приводим значения $F$ для некоторых значений $m^2$:

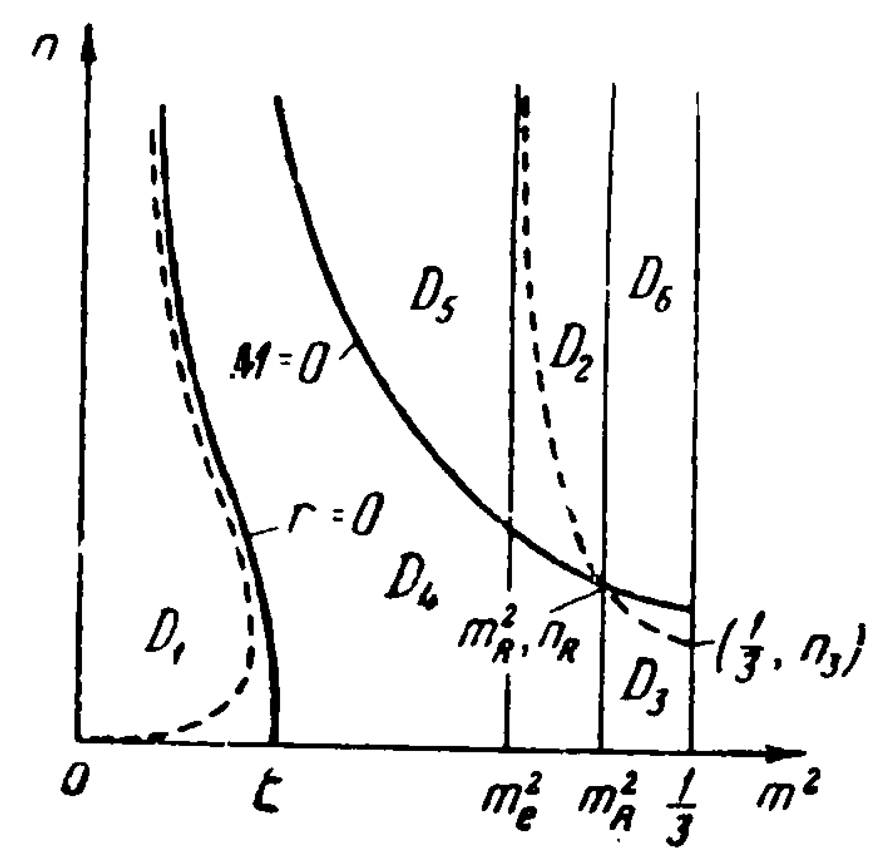
| $m^2$ | $F$ | $m^2$ | $F$ | $m^2$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.260 | 0.9695 | 0.290 | —2.4058 |
| 0.04 | 0.0232 | 0.2606765 | 1.000000 | 0.30 | —1.0389 |
| 0.10 | 0.070 | 0.2750 | 3.052 | 0.3010 | —0.9843 |
| 0.20 | 0.247 | 0.2817664 | $\infty$ | 0.320 | —0.422 |
| 0.24 | 0.521 | | | $^1/_3$ | —0.19 |

На фиг. 2 изображена функция $F = F(m^2)$.

Если уравнение частот (4.1) определяет непрерывную функцию $m^2 = m^2(n)$, то в плоскости $(m^2, n)$ (фиг. 3) оно изображается непрерывной кривой. Выясним сначала, в какой части полуполосы $0 < m^2 < {}^1/_3$, $0 < n < \infty$ кривая $m^2 = m^2(n)$ не может существовать.




Фиг. 2



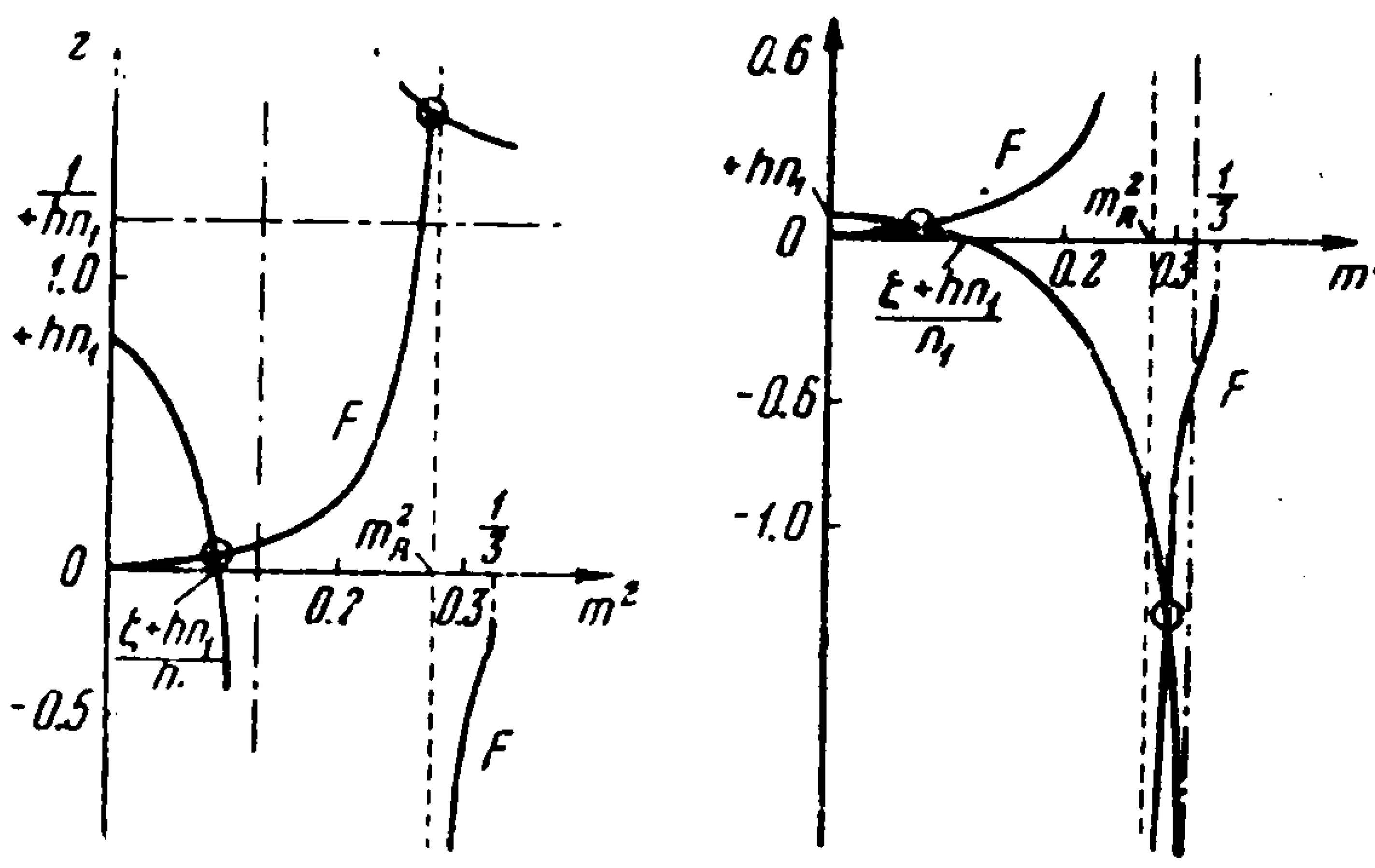

Фиг. 3

Разбиваем полуполосу на части при помощи линий $\Gamma = 0$, $M = 0$, $m = m_e$, $m = m_R$, где $m_e$ определяется из соотношения $F(m_e^2) = 1$.

Легко видеть, что в областях $D_5$, $D_2$, $D_6$ (фиг. 3) имеем $M > 0$, а $-W > 1$, а в других областях $M < 0$. В области $D_1$ имеем $\Gamma < 0$, а в других областях $\Gamma > 0$.

Из сравнения $F$ и $-W$ получаем, что кривая $m^2 = m^2(n)$, если она существует, может проходить только через области $D_1$, $D_2$, $D_3$ и не может проходить через области $D_4$, $D_5$, $D_6$. В самом деле, в области $D_4$ имеется противоречие $F > 0$, $-W < 0$; в области $D_5$ имеем $F < 1$, $-W > 1$; наконец, в области $D_6$ имеем противоречие $-W > 1$, $F < 0$.

Докажем, что внутри области $D_1$ уравнение частот (4.1) определяет единственную непрерывно дифференцируемую функцию $m^2 = m^2(n)$.




$m^2 < m_R^2$ $m^2 > m_R^2$

Фиг. 4

Для наглядности рассуждения изображаем левую и правую части уравнения (4.1) для произвольного волнового числа $n_1$ из интервала $0 < n < \infty$ на фиг. 4. Ось абсцисс — $m^2$, ось ординат — $z$, значение функции — $W$ или $F$; функция — $W$ представляет собой гиперболу с асимптотами

$$m^2 = \frac{\zeta}{n_1 \,\mathrm{th}\, n_1}, \qquad z = \frac{1}{\mathrm{th}\, n_1}$$

При изменении $m^2$ от нуля до $\zeta n_1^{-1} \,\mathrm{th}\, n_1$ функция — $W$ монотонно убывает и принимает всевозможные действительные значения между $\mathrm{th}\, n_1 > 0$ и 0, а функция $F$

монотонно растет, принимая всевозможные значения от 0 до $F(\zeta n_1^{-1} \operatorname{th} n_1) > 0$. Следовательно, внутри интервала $0 < m^2 < \zeta n_1^{-1} \operatorname{th} n_1$ существует одно и только одно значение $m_1 > 0$, при котором уравнение (4.1) удовлетворяется, т. е.

$$F(m_1^2) = -W(m_1, n)$$

Так как число $n_1$ является произвольным из интервала $0 < n < \infty$, то уже доказано существование однозначной функции $m^2 = m^2(n)$ внутри области $D_1$. Осталось доказать, что эта функция имеет непрерывную производную.

Уравнение (4.1) в области $D_1$ равносильно

$$\Omega = F\left(\frac{m^2 n}{\zeta} \operatorname{th} n - 1\right) - \frac{m^2 n}{\zeta} + \operatorname{th} n = 0$$

Вычислим две частные производные:

$$\frac{d\Omega}{d(m^2)} = \frac{n}{\zeta}\left\{-1 + \operatorname{th} n\left[F + m^2 \frac{dF}{d(m^2)}\right]\right\} - \frac{dF}{d(m^2)}$$

$$\frac{d\Omega}{dn} = \frac{m^2}{\zeta}\left(-1 + F \operatorname{th} n + \frac{Fn}{\operatorname{ch}^2 n}\right) + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 n}$$

Легко видеть непрерывность $\Omega$ и ее двух частных производных в области $D_1$. Далее в области $D_1$

$$0 < m^2 < \zeta, \qquad F(m^2) = \frac{9\rho}{4\rho_1} m^2 + O(\zeta^2), \qquad \frac{d\Omega}{d(m^2)} < 0$$

Из теоремы о неявной функции следует непрерывная дифференцируемость функции $m_e^2 = m^2(n)$.

Также можно показать, что в полуполосе $m_e^2 < m^2 < {}^1/_3$, $n > n_3$, где $n_3$ определяется из соотношения $F({}^1/_{3^2}) = -W(\sqrt{{}^1/_{3^2}}, n_3)$, уравнение частот (4.1) определяет однозначную непрерывно дифференцируемую функцию $m^2 = m^2(n)$.

В плоскости $(m^2, n)$ эта функция выражает кривую, выходящую из точки $({}^1/_3, n_3)$, проходящую из области $D_3$ через точку $(m_k^2, n_k)$ в область $D_2$ и имеющую вертикальную асимптоту $m^2 = m_e^2$; функция $m^2 = m^2(n)$ изображена на фиг. 3 пунктирной линией. Пунктирная кривая в области $D_1$ соответствует формуле (2.15), а пунктирная линия в областях $D_2$, $D_3$ соответствует волнам Стонлея.

Итак, доказано, что в системе, состоящей из слоя тяжелой, но несжимаемой жидкости и упругой полуплоскости, существуют медленные упругие волны и волны Стонлея и не существует других волн. Максимальная безразмерная скорость медленных упругих волн меньше $\sqrt{\zeta}$, а минимальная скорость волн Стонлея равняется $m_e$, если считать жидкость несжимаемой.

Автор выражает искреннюю благодарность Л. Н. Сретенскому и В. С. Ленскому за руководство и постоянное внимание.

Поступила 23 X 1956

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бюллетень совета по сейсмологии № 2 АН СССР. Сборник статей по цунами, II, 1956.
2. Stoneley R. The Effect of the Ocean on Rayleigh Waves, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Geophy. suppl. I, 349—356, 1926.
3. Pidduck F. B. The Wave Problem of Caushy and Poisson for Finite Depth and Slightly Compressible Fluid. Proc. Roy. Soc., London, ser. A, 395—405, 1912.
4. Bondi H. Waves on the Surface of a Compessible Fluid. Proc. of Camb. Phil. Soc., vol 43, part I, 75—95, 1947.
5. Lamb H. On the Propagation of Tremors over the surface of an Elastic solid. Phil. Trans. of Roy. Soc., London, ser. A, vol. 203, 1904.
6. Шерман Д. И. О распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, § 115, 1949.