

КОНИЧЕСКИЕ ОКОЛОЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В. Н. Жигулев

(Москва)

§ 1. Поставим себе задачей найти главный член всех конических безвихревых течений, начинающихся от звуковой плоскости (т. е. плоскости, на которой скорость потока равна скорости звука и направлена нормально к плоскости).

Очевидно, поставленная задача (в прямоугольных координатах x, y, z , если принять $x=0$ за звуковую плоскость), сводится к нахождению конических течений уравнения

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

где φ — потенциал возмущенной скорости, отнесенный к величине $a_0/(x+1)$, a_0 — скорость звука в плоскости $x=0$, κ — показатель адиабаты. Потенциал полной скорости

$$\Phi = \varphi + a_0 x$$

Если центром коничности является начало координат, то функция φ представима в виде

$$\varphi = x\psi(\eta, \theta), \quad \eta = \frac{x}{r}, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg \frac{z}{y} \quad (1.2)$$

Уравнение для определения ψ будет

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \left(\eta\psi + \eta^2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \eta^3 \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(2\psi + 2\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \eta^2 \right) - \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.3)$$

Исследуем далее производные функции $\psi(\eta\theta)$ по η на звуковой плоскости. По условию

$$\psi = \partial^2 \psi / \partial \theta^2 = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

Дифференцируя последовательно уравнение (1.3) по η и рассматривая результат в плоскости $\eta=0$, получаем для исследуемой нами главной части

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \omega'' = \omega^2 - 4, \quad \omega = 9 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} - 2 \\ \frac{\partial^n \psi}{\partial \eta^n} \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Таким образом, найдем

$$\varphi = \frac{x^3}{18r^2} [\omega(\theta) + 2] \quad (1.5)$$

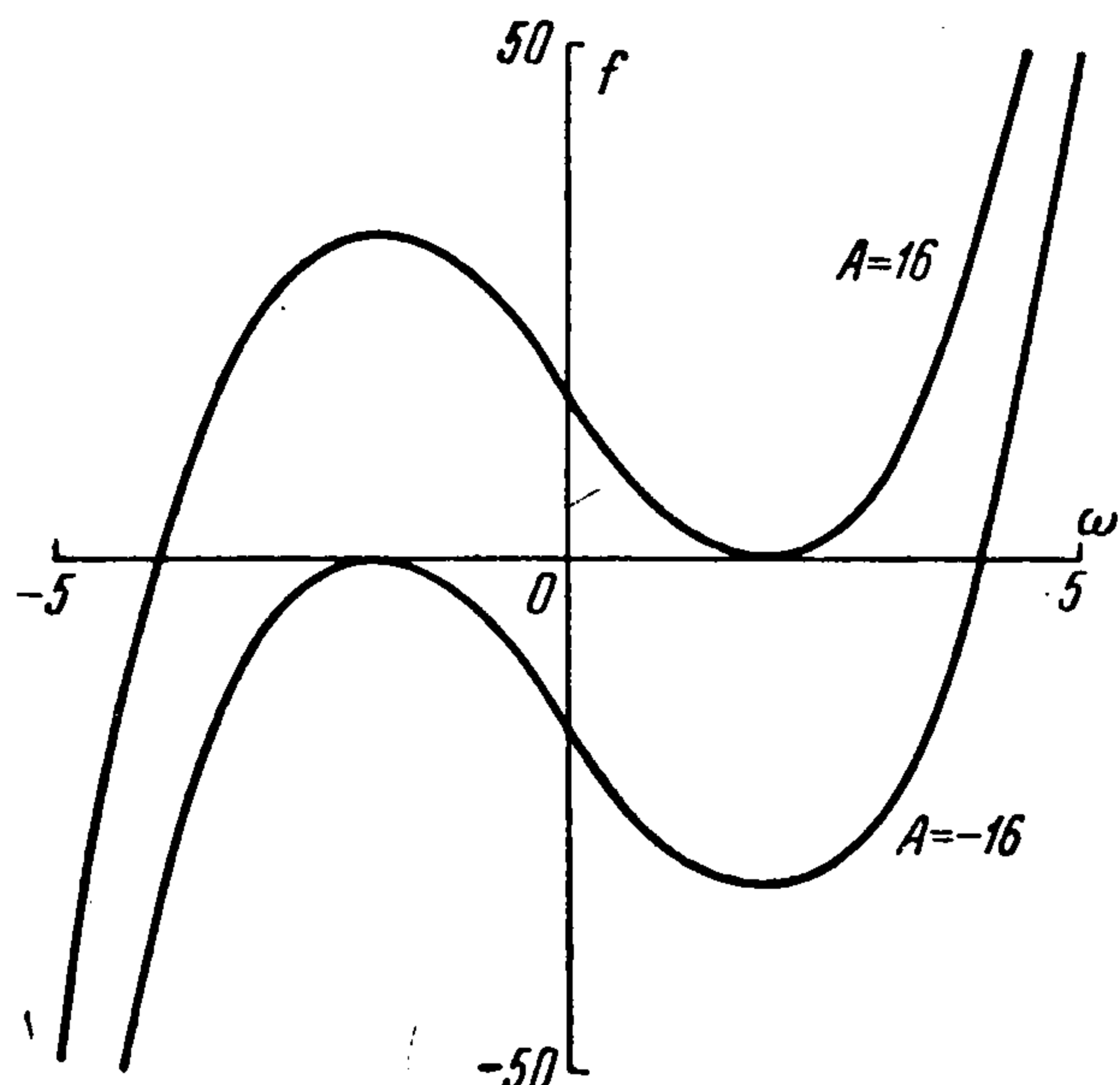
§ 2. Исследуем зависимость конических течений (1.5) от угла θ . Уравнение (1.4) для $\omega(\theta)$ может быть проинтегрировано:

$$\omega'^2 = \frac{2}{3} (\omega^3 - 12\omega + A), \quad \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^3 - 12\omega + A}} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} (\theta + B) \quad (2.1)$$

где A и B — произвольные действительные постоянные.

Рассмотрим уравнение

$$f(\omega) \equiv \omega^3 - 12\omega + A = 0 \quad (2.2)$$



Фиг. 1.

Функция $f(\omega)$ построена на фиг. 1. В случае $-16 < A < 16$ уравнение (2.2) имеет три действительных корня α, β, γ (в порядке возрастания). Если $A < -16$ или $A > 16$, уравнение (2.2) имеет лишь один действительный корень α .

В зависимости от значений постоянной A решение уравнения (1.4) может быть представлено в одном из следующих видов:

1. Случай $-16 < A < 16$.

(a) Если $\alpha \leq \omega \leq \beta$, то

$$\omega = \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \operatorname{am} \left[\frac{\sqrt{\gamma - \alpha} (\theta + B)}{\sqrt{6}}; k \right], \quad k^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \quad (2.3)$$

Здесь $\operatorname{am}(t; k)$ — обращение эллиптического интеграла 1-го рода в тригонометрической форме. Функция ω является ограниченной периодической функцией с периодом

$$\theta^* = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{\gamma - \alpha}} K(k) \quad (2.4)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем k .

(b) Если $\omega \geq \gamma$, то

$$\omega = \gamma + k_1 k_2 \operatorname{tg}^2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{am} \left[K(k) - \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{6}} (\theta + B); k \right] \right\} \quad (2.5)$$

$$k = (k_1 - k_2) / (k_1 + k_2), \quad k_1 = \sqrt{\gamma - \alpha}, \quad k_2 = \sqrt{\gamma - \beta}$$

т. е. ω также является периодической функцией с полупериодом

$$\theta^{**} = \frac{2\sqrt{6}}{k_1 + k_2} K(k) \quad (2.6)$$

Точки $\theta = (2j + 1)\theta^{**} - B$ являются полюсами второго порядка функции $\omega(\theta)$ ($j = 0, \pm 1; \pm 2; \dots$)

2. Случай $A > 16$, $A < -16$. Функция $f(\omega)$ может быть представлена $f(\omega) = (\omega - \alpha)(\omega^2 + p\omega + q)$, при этом

$$\omega = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q} \operatorname{tg}^2 \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{am} \left[\sqrt[4]{\frac{4}{9}(\alpha^2 + p\alpha + q)}(\theta + B); k \right] \right\}$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha + p/2}{\sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}} \right) \quad (2.7)$$

т. е. ω является периодической функцией с полупериодом

$$\vartheta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{\alpha^2 + p\alpha + q}} K(k) \quad (2.8)$$

причем точки $\theta = (2j + 1)\vartheta - B$ являются полюсами второго порядка функции ω ($j = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$)

3. Случай $A = 16$:

$$\text{либо а) } \omega = 6 \operatorname{th}^2(\theta + B) - 4, \quad \text{либо б) } \omega = 6 \frac{[\operatorname{ch} 2(\theta + B) + 1]^2}{\operatorname{sh}^2 2(\theta + B)} - 4 \quad (2.9)$$

И та и другая ветвь имеют своими асимптотами прямую $\omega = 2$.

4. Случай $A = -16$:

$$\omega = \frac{6}{\sin^2(\theta + B)} - 2 \quad (2.10)$$

5. Следует отметить особый случай:

$$\omega = 2 \quad (2.11)$$

§ 3. Исследуем полученные течения. Составляющие возмущенной скорости, отнесенные к величине $a_0/(x+1)$, вдоль осей x , r , θ соответственно будут

$$u_x = \frac{x^2}{6r^2} [\omega(\theta) + 2], \quad u_r = -\frac{x^3}{9r^3} [\omega(\theta) + 2], \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{x^3}{18r^3} \omega'(\theta) \quad (3.1)$$

1. Выберем в качестве решения для $\omega(\theta)$ формулу (2.3).

(а) В том случае, когда $2\pi/\theta^* = n$, где n — целое число, коническое течение представляет собой обтекание тела, цилиндрического при $-\infty \leq x \leq 0$, с образующей, параллельной Ox , и не являющегося цилиндром при $x > 0$. В частности, обтекаемое тело при $x \leq 0$ может быть круговым цилиндром с осью Ox . Тогда рассматриваемые решения будут описывать течения около хвостовых частей фюзеляжей. Таких течений будет три.

Первое, когда $n = 1$ ($A = 15.95175\dots$), является течением, у которого область $t < \theta + B < 2\pi - t$ | $t = 0.6631\dots$ | является сверхзвуковой и область $-t < \theta + B < t$ — дозвуковой.

Второе, когда $\omega + 2 \ll 1$ имеет число n , с большей степенью точности равное 2. Это течение является также смешанным и мало отличается от равномерного потока.

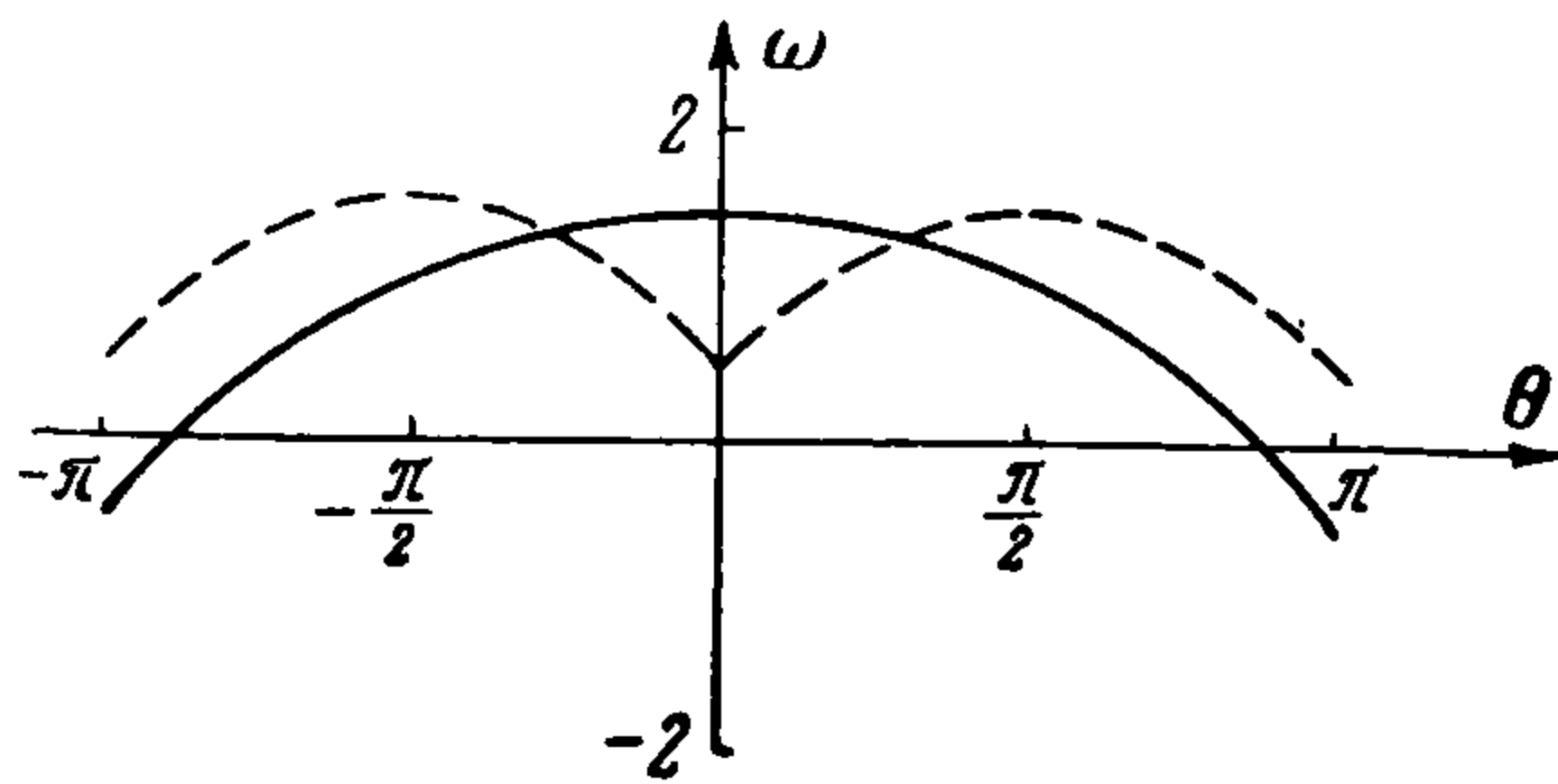
Третье [решение (2.11)] описывает течение около тела вращения такого же типа.

Уравнение для линии тока в окрестности $x=0$ в этом случае будет иметь вид:

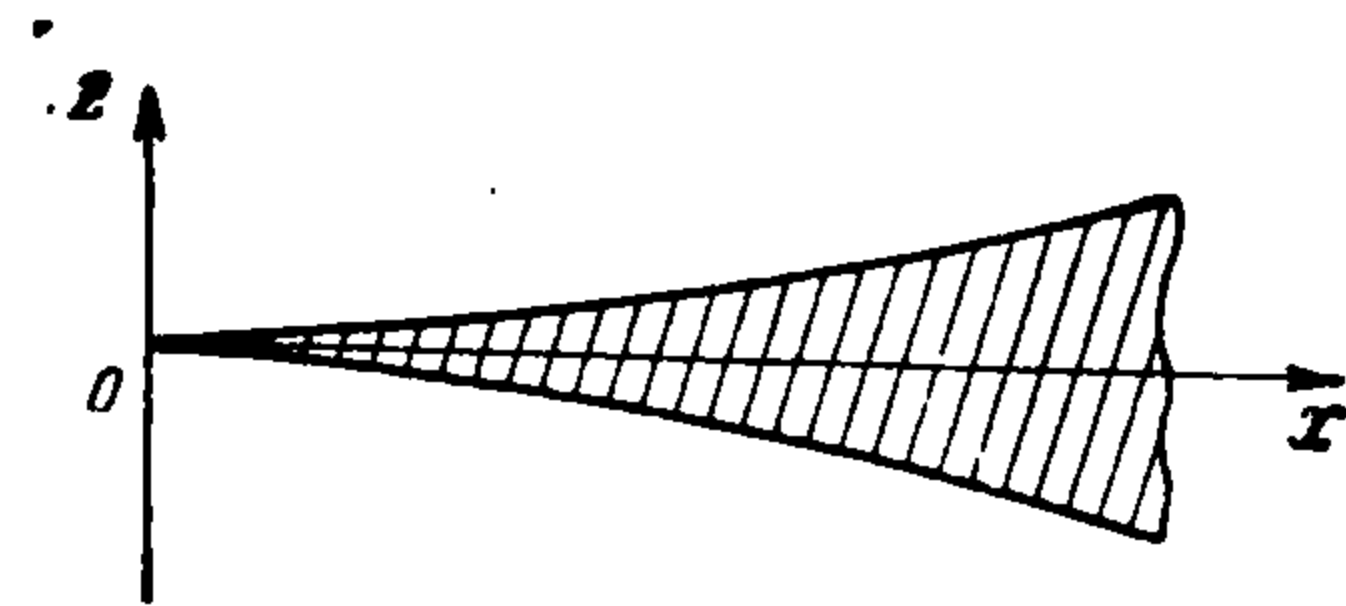
$$r = \left[r_0^4 - \frac{4}{9(x+1)} x^4 \right]^{1/4}$$

где r_0 — ордината рассматриваемой линии тока на звуковой плоскости. По-видимому, лишь последнее течение представляет практический интерес, так как является полностью сверхзвуковым.

(b) В случае, когда n не является целым числом (см. табл. 1), из решения (2.3) можно конструировать различные примеры интерференции тел, как в случае (a) с телами, напоминающими крылья и начинающимися от звуковой плоскости. Примеры: выбирая решение $\omega(\theta)$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

типа фиг. 2 (сплошная кривая), получим сверхзвуковое при $x > 0$ течение, являющееся обтеканием двух тел — первого, как в случае (a), и второго, расположенного в окрестности четверти плоскости $z=0$, $x > 0$, $y < 0$ и имеющего сечение $y = \text{const}$, как на фиг. 3; толщина тела при $x = \text{const} > 0$ убывает с увеличением y , как y^{-3} .

Таблица 1

А		А	$\theta^{*/2} = \theta^{**}$	А	$\theta^{*/2} = \theta^{**}$	А	ϑ
$-\infty$	0	-16	$\pi/2$	14	2.2184	17	4.7634
-1000	0.2997	-15	1.5777	15	2.3883	20	4.0455
-500	1.0353	-14	1.5849	15.5	2.5591	25	3.6321
-200	1.1863	-12	1.6000	15.6	2.6149	35	3.1606
-100	1.3037	-10	1.6164	15.7	2.6864	50	2.9562
-50	1.4171	-8	1.6341	15.8	2.7873	100	2.5331
-35	1.4727	-4	1.6747	15.9	2.9601	200	2.2081
-25	1.5172	4	1.7914	15.95	3.1326	500	1.8636
-20	1.5452	8	1.8858	15.95175...	π	1000	1.6375
-17	1.5641	12	2.0506	16	∞	∞	0

Уравнение поверхности второго тела в окрестности $x=0$ будет

$$z(xy) = -\frac{\omega'(\pi)}{72(x+1)} \frac{x^4}{y^3}$$

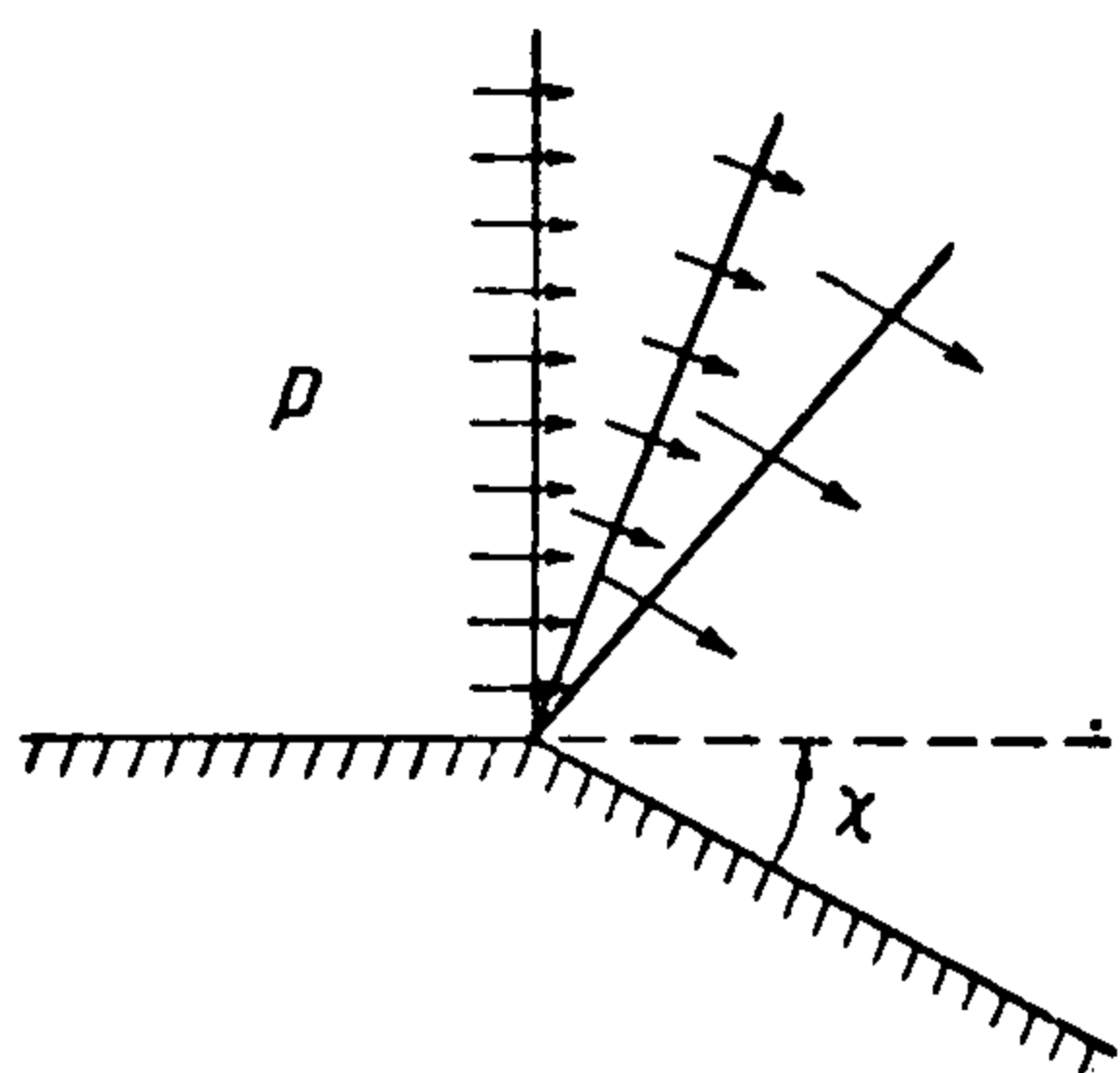
Выбирая далее $\omega(\theta)$ (как на фиг. 2 пунктирная кривая), получим обтекание тела, как в случае (a), и тела, начинающегося от линии $x=0$, $z=0$, расположенного в окрестности полуплоскости $z=0$, $x > 0$ и имеющего сечение $y = \text{const}$, как на фиг. 3. Нужно сказать, что в зависимости от параметра A толщина второго тела может изменяться в широких пределах.

К этому же классу течений относится и решение (2.9) (a).

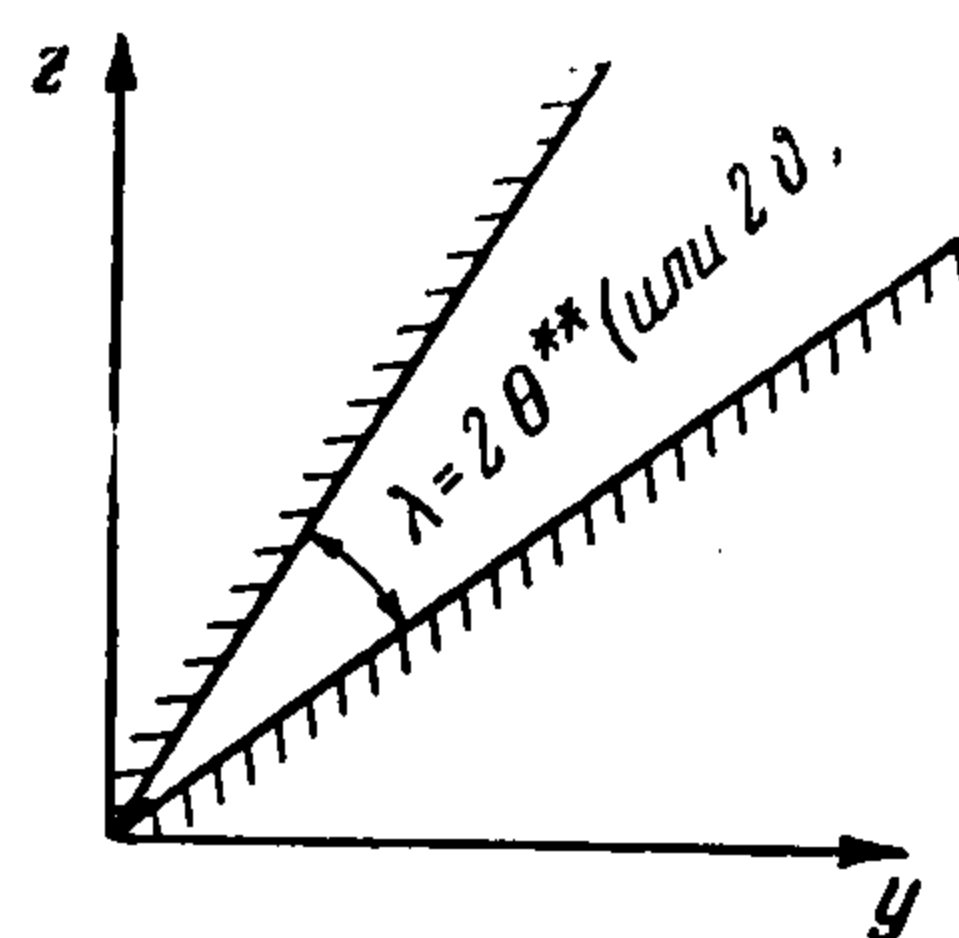
2. Рассмотрим теперь все решения $\omega(\theta)$, имеющие в какой-либо точке полюс второго порядка. Очевидно, что без ограничения общности этой точкой может быть точка $\theta=0$. В окрестности $\theta=0$ составляющие возмущенной скорости будут иметь порядок

$$u_x \sim \frac{x^2}{r^{2\theta^2}}, \quad u_r \sim \frac{x^3}{r^{3\theta^2}}, \quad u_\theta \sim \frac{x^3}{r^{3\theta^3}} \quad (3.2)$$

т. е. в зависимости от того, по какому направлению мы приближаемся к лучу: $x=0, z=0, y>0$, в точках луча получаются те или иные значения скоростей u_x и u_θ . Компонента u_r в точках $r \neq 0$ луча обращается в нуль. Следовательно, течение локально в окрестности рассматриваемого луча имеет характер, как на фиг. 4, где изображена плоскость P , нормальная к лучу. Пусть теперь величина полупериодов



Фиг. 4.



Фиг. 5.

θ^{**} и ϑ меньше π (см. табл. 1). Тогда соответствующее течение представляет собой часть истечения из углового выреза в звуковой плоскости в зону пониженного давления (фиг. 5) в том случае, когда мы ограничиваемся областью, заключенной между характеристическими поверхностями, на границе которой при подходе к особым лучам со стороны $x > 0$ давление имеет заданную величину. При этом на основании (3.2) угол поворота потока в нормальных к лучам плоскостях постоянен вдоль особых лучей.

Рассматриваемые решения описывают также часть течения, у которого угол поворота потока χ вдоль особых лучей является произвольной положительной функцией координат, изменяющихся вдоль этих лучей (считается, что χ положителен, если поведение потока в окрестности луча в плоскости, нормальной к лучу, таково, как на фиг. 4).

Из табл. 1 и фиг. 1 видно, что каждому значению угла λ (фиг. 5) соответствуют два течения: одно — полностью сверхзвуковое (при $x > 0$), а другое — смешанное: сверхзвуковое в окрестности особых лучей и дозвуковое в остальной части рассматриваемой области.

На базе рассмотренных решений, а также решений, имеющих значение θ^{**} или ϑ , большее π , можно строить течения, являющиеся обтеканиями поверхностей не имеющих излома образующей в точках пересечения их со звуковой плоскостью.

Течение, где в качестве $\omega(\theta)$ взято решение (2.10), имеющее конечный угол поворота потока постоянным вдоль особого луча, является плоским течением Прандтля-Мейера, записанным в наших координатах.

Течения п. 2 настоящего параграфа являются обобщением течений п. «с» § 5 работы [1] ($A = \pm \infty$).

§ 4. К нахождению рассмотренных, а также и некоторых новых течений можно подойти и иначе.

Пусть φ представима в виде $\varphi = \varphi_1(x) \varphi_2(yz)$. Тогда уравнениями для определения функций φ_1 и φ_2 будут

$$\varphi_2' \varphi_1'' = k_3 \varphi_1, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = k_3 \varphi_2^2 \quad (4.1)$$

где k_3 — произвольная постоянная величина. Замена переменных

$$\varphi_1 = k_3 \varphi_1^*, \quad \varphi_2 = \varphi_2^* / k_3$$

приводит (4.1) к уравнениям

$$\varphi_1^* \varphi_1^{*''} = \varphi_1^*, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^*}{\partial z^2} = \varphi_2^{*2}, \quad \varphi = \varphi_1^* \varphi_2^* \quad (4.2)$$

Таким образом, случай любого $k_3 \neq 0$ сводится к случаю $k_3 = 1$. Поэтому в дальнейшем будем полагать $k_3 = 1$.

Уравнение $\varphi_1' \varphi_1'' = \varphi_1$ встречалось нам еще в работе [1], где было получено его решение.

Ищем далее функцию $\varphi_2(y, z)$ в виде

$$\varphi_2(r, \theta) = \varphi_3(r) \varphi_4(\theta) \quad (4.3)$$

Для определения функций φ_3 и φ_4 имеем уравнение

$$\frac{\varphi_3''}{\varphi_3^2} + \frac{\varphi_3'}{r \varphi_3^2} + \frac{1}{r^2 \varphi_3} \frac{\varphi_4''}{\varphi_4} - \varphi_4 = 0 \quad (4.4)$$

Могут представиться только два случая:

$$(a) \text{ либо } \varphi_4 = \text{const} = c, \quad \varphi_3'' + \varphi_3' / r = c \varphi_3^2$$

$$(b) \text{ либо } \varphi_3 = \frac{\text{const}}{r^2} = \frac{c_1}{r^2}, \quad \frac{4}{c_1} + \frac{1}{c_1} \frac{\varphi_4''}{\varphi_4} - \varphi_4 = 0$$

Случай (a) разобран в работе [1], случай (b) исследован выше.

Если в качестве $\varphi_1(x)$ взять решение

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{18} x^3 \quad (4.5)$$

то мы приходим к разобранному виду (1.5).

Поступила 7 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Об одном классе плоских и осесимметричных околосвуковых течений. ПММ, т. XX, вып. 5, 1956.