

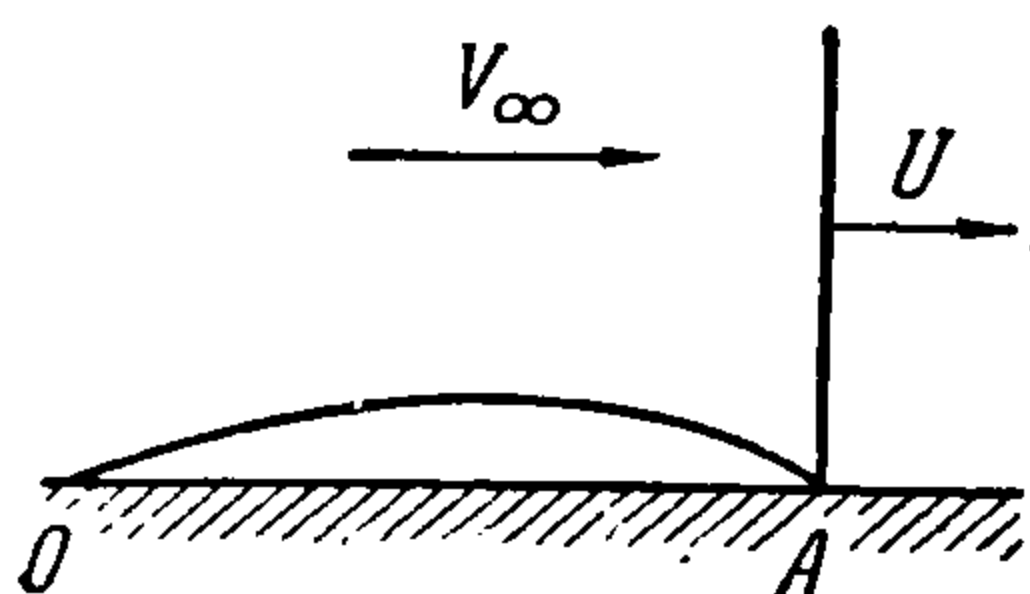
ФОРМИРОВАНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ С ДВИЖУЩИМСЯ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

Ю. А. Демьянов

(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Предположим, что в момент времени $t=0$ на полубесконечную пластину, находящуюся в покоящейся газе и имеющую начало в точке O , набегают скачок уплотнения со скоростью U , за которым возникает равномерный газовый поток.

Обозначим соответственно через V_∞ , ρ_∞ , p_∞ , H_∞ скорость, плотность, давление и энтальпию частиц в этом потоке. Предположим, что во все время движения потока по пластине его параметры вне пограничного слоя, а также скорость ударной волны остаются неизменными.



Фиг. 1.

Задача заключается в определении характеристик пограничного слоя, возникающего в этом случае на участке OA , от начала пластины до скачка уплотнения (фиг. 1).

Сформулированная задача, очевидно, описывается уравнениями неустановившегося пограничного слоя сжимаемого газа, которые запишем в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(H + \frac{1}{2} v_x^2 \right) + v_x \frac{\partial}{\partial x} \left(H + \frac{1}{2} v_x^2 \right) + v_y \frac{\partial}{\partial y} \left(H + \frac{1}{2} v_x^2 \right) \right] = \\ = \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь ρ — плотность, H — энтальпия, N_{Pr} — число Прандтля, μ — коэффициент вязкости, v_x и v_y — составляющие скорости в направлениях соответственно параллельном и перпендикулярном пластине.

Граничные условия для системы (1.1) — (1.3) следующие:

$$\begin{aligned} v_x = v_y = 0, \quad H = H_w(x, t) \quad \text{при } y = 0 \\ v_x = V_\infty, \quad H = H_\infty \quad \text{при } y = \infty \end{aligned} \quad (1.4)$$

(индексом w обозначаются параметры на пластине). Решение ищется в области $0 < x \leq U \cdot t$.

Если провести анализ размерностей решения, аналогичный приводимому в книге^[1] (стр. 123) для случая установившегося пограничного слоя несжимаемого газа на плоской пластине, то можно установить, что при $H_w = H_w (x / V_\infty \cdot t)$ безразмерные функции скорости, плотности и энтальпии зависят лишь от двух безразмерных переменных

$$\frac{x}{V_\infty t}, \quad \frac{y}{\sqrt{v_\infty x} / V_\infty}$$

на что указано в работе^[2].

Согласно последней уравнения (1.1)—(1.3) при допущении $\mu\rho = \text{const}$ могут быть преобразованы к следующей форме:

$$\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{v_x}{2\xi} + \frac{\partial V_y}{\partial \eta} = 0 \quad (1.5)$$

$$(v_x - \xi) \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial \eta} = \frac{v_\infty}{\xi} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} (v_x - \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (H + 1/2 v_x^2) + V_y \frac{\partial}{\partial \eta} (H + 1/2 v_x^2) = \\ = \frac{v_\infty}{\xi N_{Pr}} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \frac{v_\infty}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_x = V_y = 0, \quad H = H_w(\xi) \quad \text{при } \eta = 0 \\ v_x = V_\infty, \quad H = H_\infty \quad \text{при } \eta = \infty \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{t}, \quad \eta = \int \frac{\rho}{\rho_\infty} d\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \quad \left(\chi = \frac{y}{\sqrt{x}}\right) \\ V_y = (v_x - \xi) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\rho}{\rho_\infty} \left(\frac{\sqrt{x} v_y}{\xi} - 1/2 \frac{y v_x}{\xi \sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

Уравнения (1.5)—(1.6) в переменных ξ , η могут быть решены независимо от уравнения (1.7).

Отметим, что указанный факт имеет место не только для автомодельных неустановившихся задач, но и для любых неустановившихся задач пограничного слоя без градиента давления по оси x .

Действительно, общие уравнения неустановившегося пограничного слоя сжимаемого газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho X + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (H + 1/2 v_x^2) + v_x \frac{\partial}{\partial x} (H + 1/2 v_x^2) + V_y \frac{\partial}{\partial y} (H + 1/2 v_x^2) \right] = \\ = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{N_{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

(X — составляющая внешних сил по оси x) в переменных

$$t, x, \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty} dy$$

при введении новой функции

$$V_y = \frac{\rho}{\rho^0} v_y + \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

преобразуются к виду

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial \eta} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu^0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu \rho}{\mu^0 \rho^0} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} (H + 1/2 v_x^2) + v_x \frac{\partial}{\partial x} (H + 1/2 v_x^2) + V_y \frac{\partial}{\partial \eta} (H + 1/2 v_x^2) &= \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \nu^0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu \rho}{\mu^0 \rho^0} N_{Pr} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) + \nu^0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu \rho}{\mu^0 \rho^0} v_x \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

Для случая $\mu \rho = \mu^0 \rho^0$ и $\partial p / \partial x = 0$ первые два из этих уравнений совпадают по форме с уравнениями неразрывности и количества движения несжимаемой жидкости и могут быть решены в переменных x, t, η отдельно от третьего.

§ 2. Определение профиля скоростей в пограничном слое. С этой целью проинтегрируем уравнение (1.6) по η от 0 до $\delta(\xi)$, где $\delta(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$v_x(\delta, \xi) = V_\infty, \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right)_{\eta=\delta(\xi)} = 0$$

В результате получим интегральное соотношение

$$\int_0^{\delta} \left[(2v_x - V_\infty - \xi) \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{v_x}{2\xi} (v_x - V_\infty) \right] d\eta = -\frac{v_\infty}{\xi} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \quad (2.1)$$

Используя метод Кармана, представим профиль скорости полиномом 3-й степени от η/δ

$$\frac{v_x}{V_\infty} = 3/2 \frac{\eta}{\delta} - 1/2 \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^3$$

удовлетворяющим следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2} = 0 & \quad \text{при } \eta = 0 \\ v_x = V_\infty, \quad \frac{\partial v_x}{\partial \eta} = 0 & \quad \text{при } \eta = \delta(\xi) \end{aligned}$$

Подставляя указанный профиль скорости в интегральное соотношение (2.1), приходим к дифференциальному уравнению

$$\xi \left(\frac{\xi}{8V_\infty} - \frac{13}{280} \right) \frac{dY}{d\xi} - \frac{13}{280} Y = -1 \quad \left(Y = \frac{V_\infty \delta^2}{\nu_\infty} \right) \quad (2.2)$$

Интегральные кривые этого уравнения суть

$$Y = \frac{C(\xi - 13/35 V_\infty) + 8V_\infty}{\xi}, \quad Y = \frac{280}{13}$$

Отметим, что все интегральные кривые проходят через точку

$$\xi = 13/35 V_\infty, \quad Y = 280/13$$

При $\xi \rightarrow 0$ (что соответствует бесконечному времени формирования пограничного слоя в точке x) решение нашей задачи должно стремиться к решению задачи об установившемся пограничном слое на полубесконечной пластине.

Поэтому в окрестности $\xi = 0$ в качестве решения уравнения (2.2) должна быть выбрана интегральная кривая

$$Y = 280/13$$

соответствующая толщине установившегося пограничного слоя на пластине.

С другой стороны, на ударной волне следует принять $Y = 0$, так как частицы газа за ней только что получили скорость и влияние вязкости здесь еще не успело сказаться.

В этом случае решением уравнения (2.2) будет кусочно-гладкая интегральная кривая

$$Y = 280/13 \quad \text{при} \quad \xi \leq 13/35 V_\infty$$

$$Y = \frac{8V_\infty(U - \xi)}{\xi(U - 13/35 V_\infty)} \quad ; \quad V_\infty \leq \xi \leq U$$

имеющая излом касательной в точке $\xi = 13/35 V_\infty$.

Легко видеть, что при таком приближенном решении профили скорости v_x и напряжения трения являются непрерывными в $\xi = 13/35 V_\infty$, а профили V_y , $\partial v_x / \partial \xi$ испытывают разрыв, что, однако, является несущественным для задач пограничного слоя.

Полученное приближенное решение может быть истолковано следующим образом.

В области $0 < \xi \leq 13/35 V_\infty$ в переменных ξ , η профиль скоростей такой же, как и в установившемся пограничном слое на пластине.

В области $13/35 V_\infty \leq \xi \leq U$ в тех же переменных профиль скорости v_x является установившимся в системе координат, связанной с ударной волной.

Последнее обстоятельство наводит на мысль искать точное решение уравнений (1.5) — (1.6), зависящее от переменной

$$\zeta = \sqrt{\frac{U}{v_\infty}} \frac{\eta}{\sqrt{U} - 1}$$

Полагая

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \psi = \sqrt{v_\infty U} \left(\frac{U}{\xi} - 1 \right) \Phi_0(\zeta), \quad V_y = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\psi}{2\xi} \right)$$

приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\Phi_0''' + \zeta\Phi_0'' - \Phi_0\Phi_0'' = 0 \quad (2.3)$$

с граничными условиями

$$\Phi_0(0) = \Phi_0'(0) = 0, \quad \Phi_0'(\infty) = \frac{V_\infty}{U}$$

Уравнение (2.3) может быть приведено к виду, рассмотренному Блязиусом, но с иным граничным условием для производной на стенке.

Уравнению (2.3) удовлетворяет распределение скоростей в пограничном слое на неограниченной в обе стороны пластине за движущимся с постоянной скоростью скачком уплотнения. Для рассматриваемой задачи такое распределение скоростей будет иметь место в окрестности ударной волны.

Таблица 1

Значения функции $\Phi_0'(\zeta)$

$\Phi_0''(0)$ ζ	0.1	0.2	0.3	0.4	$\Phi_0''(0)$ ζ	0.1	0.2	0.3	0.4
0	0	0	0	0	3.8	0.1827	0.3780	0.5886	0.8259
0.1	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	3.9	0.1830	0.3790	0.5909	0.8306
0.2	0.0199	0.0399	0.0598	0.0797	4.0	0.1833	0.3799	0.5929	0.8349
0.3	0.0298	0.0596	0.0894	0.1192	4.1	0.1836	0.3806	0.5947	0.8389
0.4	0.0395	0.0791	0.1186	0.1581	4.2	0.1838	0.3813	0.5963	0.8425
0.5	0.0490	0.0982	0.1473	0.1963	4.3	0.1840	0.3818	0.5976	0.8458
0.6	0.0583	0.1169	0.1753	0.2337	4.4	0.1841	0.3824	0.5989	0.8488
0.7	0.0675	0.1351	0.2027	0.2702	4.5	0.1842	0.3827	0.6000	0.8515
0.8	0.0763	0.1527	0.2292	0.3056	4.6	0.1843	0.3831	0.6009	0.8540
0.9	0.0847	0.1696	0.2547	0.3398	4.7	0.1844	0.3834	0.6017	0.8563
1.0	0.0928	0.1859	0.2793	0.3728	4.8	0.1845	0.3836	0.6024	0.8584
1.1	0.1005	0.2016	0.3030	0.4046	4.9	0.1845	0.3838	0.6031	0.8602
1.2	0.1079	0.2164	0.3255	0.4350	5.0	0.1845	0.3840	0.6036	0.8619
1.3	0.1148	0.2305	0.3469	0.4641	5.1	0.1846	0.3842	0.6041	0.8635
1.4	0.1213	0.2438	0.3673	0.4918	5.2	0.1846	0.3843	0.6045	0.8648
1.5	0.1275	0.2563	0.3865	0.5180	5.3	0.1846	0.3844	0.6049	0.8661
1.6	0.1332	0.2680	0.4046	0.5429	5.4	0.1846	0.3845	0.6052	0.8672
1.7	0.1385	0.2790	0.4217	0.5665	5.5	0.1847	0.3845	0.6055	0.8683
1.8	0.1434	0.2892	0.4377	0.5886	5.6	0.1847	0.3846	0.6057	0.8692
1.9	0.1479	0.2987	0.4525	0.6095	5.7	0.1847	0.3847	0.6059	0.8700
2.0	0.1520	0.3075	0.4664	0.6292	5.8	0.1847	0.3847	0.6061	0.8708
2.1	0.1558	0.3155	0.4793	0.6481	5.9	0.1847	0.3847	0.6062	0.8715
2.2	0.1592	0.3229	0.4913	0.6657	6.0	0.1847	0.3847	0.6063	0.8721
2.3	0.1623	0.3297	0.5023	0.6821	6.2	0.1847	0.3847	0.6065	0.8732
2.4	0.1651	0.3358	0.5125	0.6975	6.4	0.1847	0.3848	0.6067	0.8740
2.5	0.1677	0.3414	0.5219	0.7117	6.6	0.1847	0.3848	0.6068	0.8747
2.6	0.1699	0.3464	0.5305	0.7250	6.8	0.1847	0.3848	0.6068	0.8753
2.7	0.1719	0.3510	0.5383	0.7373	7.0	0.1847	0.3848	0.6069	0.8757
2.8	0.1737	0.3552	0.5455	0.7487	7.2	0.1847	0.3848	0.6069	0.8761
2.9	0.1752	0.3590	0.5520	0.7593	7.4	0.1847	0.3848	0.6069	0.8764
3.0	0.1766	0.3622	0.5579	0.7694	7.6				0.8766
3.1	0.1778	0.3651	0.5633	0.7786	7.8				0.8768
3.2	0.1788	0.3677	0.5681	0.7872	8.0				0.8769
3.3	0.1797	0.3700	0.5725	0.7951	8.4	0.1847	0.3848	0.6069	0.8771
3.4	0.1805	0.3721	0.5765	0.8023	8.8				0.8772
3.5	0.1812	0.3739	0.5800	0.8090	9.2				0.8773
3.6	0.1818	0.3754	0.5832	0.8151	9.6				0.8774
3.7	0.1823	0.3768	0.5860	0.8207					

В табл. 1 приведены результаты численного интегрирования уравнения (2.3) для значений $\Phi_0''(0) = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

Имея теперь точное решение уравнений (1.5), (1.6) в окрестности ударной волны, целесообразно проверить возможность распространения этого решения до некоторого $\xi = \text{const}$, начиная с которого оно мало отличалось бы от точного решения задачи об установившемся пограничном слое на пластине.

С этой целью в табл. 2 приведен рассчитанный на основании (2.3) безразмерный профиль v_x / V_∞ в зависимости от переменной ζ во всем диапазоне изменения $\Phi_0''(0)$ и соответствующий профиль скорости при

Т а б л и ц а 2

Профиль Блявиуса		$\Phi_0''(0) = 0.1$ $\xi_0 = 0.381$		$\Phi_0''(0) = 0.2$ $\xi_0 = 0.382$		$\Phi_0''(0) = 0.3$ $\xi_0 = 0.382$		$\Phi_0''(0) = 0.4$ $\xi_0 = 0.400$	
η°	$\Phi'(\eta^{\circ})$	ζ	$\Phi'(\zeta)$	ζ	$\Phi'(\zeta)$	ζ	$\Phi'(\zeta)$	ζ	$\Phi'(\zeta)$
0.0	0.0000	0.000	0.0000	0.000	0.0000	0.000	0.0000	0.000	0.0000
0.2	0.0664	0.128	0.0692	0.134	0.06965	0.141	0.0695	0.157	0.0714
0.4	0.1328	0.256	0.1379	0.268	0.1385	0.282	0.1385	0.314	0.1420
0.6	0.1990	0.384	0.2056	0.402	0.2066	0.423	0.2062	0.471	0.2113
0.8	0.2647	0.512	0.2719	0.536	0.2729	0.564	0.2715	0.628	0.2782
1.0	0.3298	0.640	0.3360	0.670	0.3370	0.705	0.3361	0.785	0.3424
1.2	0.3938	0.768	0.3974	0.804	0.3986	0.846	0.3971	0.942	0.4033
1.4	0.4563	0.896	0.4568	0.938	0.4550	0.987	0.4550	1.099	0.4609
1.6	0.5168	1.024	0.5127	1.072	0.5125	1.128	0.5096	1.256	0.5147
1.8	0.5747	1.152	0.5651	1.206	0.5646	1.269	0.5608	1.413	0.5645
2.0	0.6298	1.280	0.6143	1.340	0.6128	1.410	0.6085	1.570	0.6112
2.2	0.6813	1.408	0.6600	1.474	0.6577	1.551	0.6524	1.727	0.6528
2.4	0.7290	1.536	0.7015	1.608	0.6991	1.692	0.6925	1.884	0.6911
2.6	0.7725	1.664	0.7396	1.742	0.7366	1.833	0.7292	2.041	0.7263
2.8	0.8115	1.792	0.7742	1.876	0.7707	1.974	0.7627	2.198	0.7584
3.0	0.8461	1.920	0.8054	2.010	0.8012	2.115	0.7928	2.355	0.7873
3.2	0.8761	2.048	0.8332	2.144	0.8287	2.256	0.8199	2.512	0.8132
3.4	0.9018	2.176	0.8579	2.278	0.8529	2.397	0.8439	2.669	0.8363
3.6	0.9233	2.304	0.8796	2.412	0.8745	2.538	0.8660	2.826	0.8568
3.8	0.9411	2.432	0.8986	2.546	0.8935	2.679	0.8843	2.983	0.8736
4.0	0.9555	2.560	0.9153	2.680	0.9100	2.820	0.9004	3.140	0.8909
4.2	0.9670	2.688	0.9296	2.814	0.9246	2.961	0.9154	3.297	0.9053
4.4	0.9759	2.816	0.9418	2.948	0.9372	3.102	0.9284	3.454	0.9179
4.6	0.9827	2.944	0.9522	3.082	0.9476	3.243	0.9393	3.611	0.9291
4.8	0.9878	3.072	0.9609	3.216	0.9569	3.384	0.9487	3.768	0.9387
5.0	0.9916	3.200	0.9683	3.350	0.9644	3.525	0.9559	3.925	0.9500
5.2	0.9943	3.328	0.9745	3.484	0.9710	3.666	0.9640	4.082	0.9550
5.4	0.9962	3.456	0.9795	3.618	0.9764	3.807	0.9700	4.239	0.9609
5.6	0.9975	3.584	0.9837	3.752	0.9808	3.948	0.9752	4.396	0.9665
5.8	0.9984	3.712	0.9872	3.886	0.9845	4.089	0.9795	4.553	0.9714
6.0	0.9990	3.840	0.9899	4.020	0.9877	4.230	0.9831	4.710	0.9761

установившемся обтекании полубесконечной пластины, зависящей от переменной

$$\eta^{\circ} = \sqrt{\frac{V_{\infty}}{\nu_{\infty}}} \eta$$

Как видно из этой таблицы, при значении $\xi^{\circ} = \text{const}$, определяемом условиями

$$\frac{v_x}{V_{\infty}}(\zeta) = \frac{v_x}{V_{\infty}}(\eta^{\circ}), \quad \frac{\zeta}{\eta^{\circ}} = \sqrt{\frac{U/V_{\infty}}{U/\xi^{\circ} - 1}}$$

профили отличаются друг от друга не более чем на 8%.₀

Значения ξ° для различных $\Phi_0''(0)$ приведены в табл. 2 и мало отличаются от значения $\xi^{\circ} = \sqrt[13]{35} V_{\infty} = 0.371 V_{\infty}$, полученного при решении задачи при помощи интегрального соотношения.

Улучшение найденного профиля скорости может быть достигнуто путем линеаризации около него уравнений (1.5), (1.6) и определения из последних соответствующих поправок.

§ 3. Определение профиля энтальпий в пограничном слое при произвольном распределении температуры по поверхности пластины. При доказательстве автомодельности рассматриваемой задачи нами было предположено, что $H_w = H_w(x/V_\infty t)$.

Однако это предположение может быть снято при рассмотрении уравнений для профиля скоростей в переменных ζ , η в силу независимости уравнений и граничных условий от H .

Поэтому найденный в § 2 профиль скоростей в переменных ζ , η может быть использован для определения профиля энтальпий при любом распределении температуры по поверхности пластины.

Уравнение для профиля энтальпий

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + V_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + V_y \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{v_\infty}{N_{Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + v_\infty \left(1 - \frac{1}{N_{Pr}}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right) \quad (3.1)$$

$$(\theta = H + 1/2 v_x^2)$$

после подстановки профиля скоростей становится неоднородным линейным уравнением в частных производных второго порядка с граничными условиями

$$\theta(t, x, 0) = H_w(t, x), \quad \theta(t, x, \infty) = H_0$$

Общее решение уравнения (3.1) ищем в виде

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

где θ_1 — частное решение неоднородного уравнения с условиями

$$\theta_1 = H_{w0} = \text{const}, \quad \text{при } \eta = 0, \quad \theta_1 = H_0 \quad \text{при } \eta = \infty$$

а θ_2 — общее решение однородного уравнения с граничными условиями

$$\theta_2 = H_w(t, x) - H_{w0} \quad \text{при } \eta = 0, \quad \theta_2 = 0 \quad \text{при } \eta = \infty$$

При $N_{Pr} = 1$ имеет место интеграл

$$\theta_1 = \frac{H_0 - H_{w0}}{V_\infty} v_x + H_{w0}$$

(в случае $N_{Pr} \neq 1$ можно приближенно определить θ_1 , применяя интегральное соотношение).

Определение θ_2 может быть выполнено одним из общепринятых методов (например, методом Фурье, вариационным, методом интегральных соотношений). Решение соответствующей осесимметрической задачи может быть проведено аналогично изложенному выше.

Задача легко обобщается на случай течения в пограничном слое с поверхностью раздела, причем возможно использовать ряд результатов работы [4].

Поступила 17 IV 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеоретиздат, М., 1954, изд. 3.
2. Демьянов Ю. А. Автомодельные задачи неустановившегося пограничного слоя сжимаемого газа. ПММ, т. XIX, вып. 6, 1955
3. Chapman and Rubesin. Temperature and Velocity Profiles in the Compressible Laminar Boundary Layer with Arbitrary Distribution of Surface Temperatures, vol. 16, No 9, 1949.
4. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью раздела, Известия АН СССР, ОТН, № 12, 1954.