Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Л. А. Розин

(Ленинград)

В предлагаемой работе, при помощи отделения независимых переменных, получены некоторые классы автомодельных движений несжимаемой жидкости в нестационарном ламинарном пограничном слое. Рассмотрены частные случаи, когда решение уравнений пограничного слоя сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для одного из таких случаев решение вычислено в эффективной форме.

§ 1. Уравнение для функции тока ψ плоского нестационарного ламинарного пограничного слоя при отсутствии объемных сил имеет вид[1]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{1.1}$$

Здесь $U(x, t)$ — заданная продольная скорость на внешней границе слоя, $\nu=\mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости, x, y — соответственно продольная и поперечная координаты, t — время. Искомое решение уравнения (1.1) должно удовлетворять граничным условиям

$$\psi(0, x, t)=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}(0, x, t)=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}(\infty, x, t)=U(x, t) \tag{1.2}$$

и начальному условию, которое сводится к заданию $\partial\psi(y, x, t_0)/\partial y$ в начальный момент времени t_0.

Будем искать такие распределения скоростей на внешней границе пограничного слоя $U(x, t)$ и отвечающие им классы решений, при которых число аргументов в математической формулировке поставленной задачи уменьшается. Для этого воспользуемся методом разделения переменных. Отделим переменное t, предполагая тем самым, что величины ψ и U можно представить в виде

$$\psi(y, x, t)=g_1(t)\,\varphi(\chi_1, \chi_2), \qquad U(x, t)=g_2(t)\,k(\chi_1) \tag{1.3}$$

где $\chi_1=h_1(t)\,x$, $\chi_2=h_2(t)\,y$. Подставляя (1.3) в уравнение (1.1), определим такой вид функций h_1, h_2, g_1, g_2, чтобы получающееся при этом соотношение представляло собой дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными χ_1, χ_2. Тогда обычным путем[2] можно показать, что h_1, h_2, g_1, g_2 должны выражаться следующим образом:

$$h_1=C_0\,[\beta(t-t_0)]^{-(m+1)}, \qquad h_2=C_1\,[\beta(t-t_0)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$g_1=C_2\,[\beta(t-t_0)]^{m+\frac{1}{2}}, \qquad g_3=C_3\,[\beta(t-t_0)]^{m} \tag{1.4}$$

где C_0, C_1, C_2, C_3, β, m — некоторые постоянные. Перейдем в выражениях (1.4) к безразмерным величинам, полагая

$$C_0 = \frac{a\tau}{U_0}, \quad C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a\tau}{\nu}}, \quad C_2 = 2U_0\sqrt{\frac{\nu}{a\tau}}, \quad C_3 = U_0, \quad \beta = \tau \tag{1.5}$$

Здесь U_0, τ^{-1} — постоянные, имеющие соответственно разномерности скорости и времени, а величина a — безразмерная. Тогда вместо χ_1, χ_2 появятся безразмерные независимые переменные η, ξ:

$$\eta = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{a}{\nu(t-t_0)}}, \quad \xi = x(t-t_0)^{-(m+1)}\frac{\tau^{-m}}{U_0}a \tag{1.6}$$

и искомое распределение скоростей на внешней границе пограничного слоя примет вид:

$$U = U_0 k(\xi)(t-t_0)^m \tau^m \tag{1.7}$$

Класс решений, отвечающий скорости внешнего потока (1.7) и допускающий уменьшение числа независимых переменных в (1.1), запишется следующим образом:

$$\psi = 2U_0\tau^m\sqrt{\frac{\nu(t-t_0)}{a}}(t-t_0)^m\Phi(\eta, \xi) \tag{1.8}$$

Остается получить дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $\Phi(\eta, \xi)$. Для этого подставим (1.7), (1.8) в (1.1) и, принимая во внимание (1.6), после несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} m\Phi_\eta' - \frac{1}{2}\eta\Phi_\eta'' - (m+1)\xi\Phi_{\eta\xi}'' + a(\Phi_\eta'\Phi_{\eta\xi}'' - \Phi_\xi'\Phi_\eta'') = \\ = \frac{1}{4}a\Phi_\eta''' + mk - (m+1)\xi k' + akk' \end{aligned} \tag{1.9}$$

Кроме того, как следует из (1.2), функция Φ должна также удовлетворять краевым условиям

$$\Phi(0, \xi) = 0, \quad \Phi_\eta'(0, \xi) = 0, \quad \Phi_\eta'(\infty, \xi) = k(\xi) \tag{1.10}$$

Что касается начального условия, то оно совпадает с последним равенством (1.10), так как $\eta \to \infty$ при $t = t_0$.

Г. И. Баренблатт указал [3], что всякий раз, когда существует решение вида (1.8) с произвольным показателем степени m, можно получить из (1.8) некоторые предельные решения путем соответствующего предельного перехода. В самом деле, если положить

$$a = m+1, \quad t_0 = -\frac{m+1}{\tau}, \quad U_0 = \frac{U_1}{(m+1)^m} \tag{1.11}$$

и устремить m к ∞, рассматривая при этом изменение времени в промежутке $(-\infty, t]$, то после раскрытия неопределенностей в (1.6), (1.8) можно получить

$$\frac{a}{t-t_0} = \frac{m+1}{t+\dfrac{m+1}{\tau}} \to \tau, \quad \left[\frac{(t-t_0)\tau}{m+1}\right]^{-(m+1)} \to e^{-\tau t}, \quad \left[\frac{(t-t_0)\tau}{m+1}\right]^m \to e^{\tau t} \tag{1.12}$$

Формулы (1.12) позволяют представить класс предельных решений уравнения (1.1) и переменные η, ξ следующим образом:

$$\psi = 2U_1\sqrt{\frac{\nu}{\tau}}e^{\tau t}\Phi(\eta, \xi), \quad \eta = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{\tau}{\nu}}, \quad \xi = xe^{-\tau t}\frac{\tau}{U_1} \tag{1.13}$$

Нетрудно убедиться в том, что решение (1.13) отвечает предельному распределению скоростей на внешней границе пограничного слоя вида

$U = U_1 k(\xi) e^{l\tau}$, а функция $\Phi(\eta, \xi)$ в этом случае должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi_\eta' - \xi\Phi_{\eta\xi}'' + (\Phi_\eta'\Phi_{\eta\xi}'' - \Phi_\xi'\Phi_\eta'') = \tfrac{1}{4}\Phi_\eta''' + k - \xi k' + kk' \tag{1.14}$$

и краевым условиям, получаемым в пределе из (1.10) при $m \to \infty$. Следует отметить, что полученные решения (1.8) инвариантны относительно непрерывной группы преобразований подобия и могут быть получены при помощи анализа размерностей. В то же время автомодельность решений (1.13) является следствием инвариантности поставленной задачи относительно группы преобразований переноса $t = t' + t_1$, где t_1 — некоторая произвольная константа. Известно, что структура решений типа (1.13) может быть получена, исходя из постановки задачи, если воспользоваться ее инвариантностью относительно указанной группы преобразований переноса [3].

Аналогично тому, как это было сделано при отделении переменной t, можно получить новые классы автомодельных движений путем отделения переменной x. В этих движениях функция тока ψ и скорость на внешней границе пограничного слоя выражаются следующим образом:

$$\psi = 2\sqrt{\frac{U_0\nu(x - x_0)^{m+1}\lambda^m}{a}}\,\Phi(\eta, \xi), \qquad U = U_0 k(\xi)(x - x_0)^m\lambda^m \tag{1.15}$$

где безразмерные переменные η, ξ имеют вид

$$\eta = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_0(x - x_0)^{m-1}\lambda^m a}{\nu}}, \qquad \xi = t(x - x_0)^{m-1}U_0\lambda^m \tag{1.16}$$

x_0 — связано с началом отсчета координаты x и λ^{-1} — постоянная, имеющая размерность продольной координаты. Подставляя (1.15) в (1.1) и переходя к новым переменным η, ξ по формулам (1.16), получим дифференциальное уравнение относительно $\Phi(\eta, \xi)$:

$$\begin{aligned}\Phi_{\eta\xi}''[a + (m-1)\xi\Phi_\eta'] - \Phi_\eta''\left[\tfrac{1}{2}(m+1)\Phi + (m-1)\xi\Phi_\xi'\right] + m\Phi_\eta'^2 = \\ = \tfrac{1}{4}a\Phi_\eta''' + ak' + mk^2 + (m-1)\xi kk'\end{aligned} \tag{1.17}$$

В данном случае функция Φ и ее производные должны удовлетворять краевым условиям, аналогичным (1.10), и условию при $\xi = 0$, если принять $t_0 = 0$.

Из (1.15) можно получить предельные решения типа (1.13). Действительно, если положить в выражениях (1.15), (1.16)

$$a = m + 1, \qquad x_0 = -\frac{m+1}{\lambda}, \qquad U_0 = \frac{U_1}{(m+1)^m}$$

и устремить m к ∞, то будем иметь

$$\psi = 2\sqrt{\frac{U_1 e^{\lambda x}\nu}{\lambda}}\,\Phi(\eta, \xi), \qquad U = U_1 k(\xi) e^{\lambda x} \tag{1.18}$$

где

$$\eta = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_1 e^{\lambda x}\lambda}{\nu}}, \qquad \xi = te^{\lambda x}U_1\lambda$$

а дифференциальное уравнение для $\Phi(\eta, \xi)$ запишется так:

$$\Phi_{\eta\xi}''(1 + \xi\Phi_\eta') - \Phi_\eta''\left(\tfrac{1}{2}\Phi + \xi\Phi_\eta'\right) + \Phi_\eta'^2 = \tfrac{1}{4}\Phi_\eta''' + k' + k^2 + \xi kk' \tag{1.19}$$

Полученные выше классы движений охватывают довольно большое количество задач, имеющих практический интерес. Так, например, случай $m=0$, $k=1$ в формулах (1.7), (1.15) отвечает развитию пограничного слоя на плоской пластинке, начавшей двигаться в начальный момент времени параллельно самой себе с постоянной скоростью. При $m=1$ выражения (1.15) будут описывать неустановившееся движение жидкости в пограничном слое вблизи передней части тупого препятствия. Кроме того, как следует из приведенных формул, можно подобрать такие m и $k(\xi)$, которые соответствовали бы не только ускоренным, но и замедленным течениям во внешнем потоке. Это может оказаться важным в связи с изучением отрыва нестационарного пограничного слоя.

Следует отметить, что, так же как и выше, могут быть получены уравнения для Φ в пограничном слое на теле вращения, если скорость на внешней границе задана в виде (1.15) или (1.18). При этом необходимо, чтобы радиус любой из параллелей на обтекаемом контуре был $R=D(x-x_0)^n\lambda^n$ $(D=\text{const})$ и соответственно в предельном случае $R=De^{n\lambda x}$.

§ 2. Для изучения развития пограничного слоя в начале движения обычно прибегают к интегрированию уравнения (1.1) путем представления решения в виде ряда по степеням t. При этом коэффициенты такого ряда должны, вообще говоря, удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных. В некоторых случаях[4], когда распределение скоростей на внешней границе пограничного слоя имеет вид: $U=t^nk(x)$ $(t>0)$ или $U=e^{ct}k(x)$ $(c>0,\ t>-\infty)$, эта система переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Покажем, что при определеных $k(\xi)$ решение полученных выше уравнений также можно искать в виде ряда по степеням ξ и получить для коэффициентов этого ряда систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение (1.9), и пусть скорость на внешней границе пограничного слоя такова, что

$$k(\xi)=\xi^\sigma\sum_i a_i\xi^i \qquad \begin{cases}\sigma\geqslant 1 & (i=0,\ 1,\dots,\ \infty)\\ \sigma\leqslant 1 & (i=0,\ -1,\dots,\ -\infty)\end{cases} \tag{2.1}$$

где σ — целое число. Принимая во внимание (2.1), будем искать решение уравнения (1.9) в виде ряда

$$\Phi=\xi^\gamma\sum_i f_i(\eta)\,\xi^i \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в (1.9), получим

$$\begin{gathered}\sum_i\left\{[m-(m+1)(\gamma+i)]f_i'-\tfrac{1}{2}\eta f_i''\right\}\xi^{\gamma+i}+a\sum_i\sum_k(\gamma+k)\\ (f_i'f_k'-f_i''f_k)\,\xi^{2\gamma+i+k-1}=\sum_i\left\{\tfrac{1}{4}af_i'''\xi^{\gamma+i}+[m-(m+1)(\sigma+i)]\,a_i\xi^{\sigma+i}\right\}+\\ +a\sum_i\sum_k a_ia_k(\sigma+k)\,\xi^{2\sigma+i+k-1}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Далее приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Тогда, если положить в формуле (2.2) $\gamma=\sigma$, то, как следует из уравнения

(2.3), до значения $i=\sigma-1$ нужно приравнивать только члены, стоящие при $\xi^{\gamma+i}$. Так,

$$af_i''' + 2\eta f_i'' - 4[m-(m+1)(\sigma+i)]f_i' = -4a_i[m-(m+1)(\sigma+i)] \tag{2.4}$$
$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \sigma-2 \quad \text{или} \quad i=0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ \sigma)$$

Начиная с $i=\sigma-1$, в уравнения для коэффициентов f_i входят также члены (2.3), стоящие под знаком двойной суммы:

$$af_i''' + 2\eta f_i'' - 4[m-(m+1)(\sigma+i)]f_i' = -4a_i[m-(m+1)(\sigma+i)] +$$
$$+ 4a(\sigma+l)(f_j'f_l' - f_j''f_l - a_j a_l) \tag{2.5}$$
$$(i=\sigma-1,\ \sigma,\sigma+1,\ldots;\quad j+l=0,\ 1,\ 2,\ldots) \quad \text{или}$$
$$(i=\sigma-1;\quad \sigma-2,\ \sigma-3,\ldots;\ j+l=0,\ -1,\ -2,\ldots)$$

Здесь произведения с индексами j, l означают сумму этих произведений при всех возможных комбинациях целых j, $l\geqslant 0$, таких, что сумма $j+l$ остается постоянной для данного уравнения. Кроме (2.4), (2.5), искомые функции f_i должны удовлетворять граничным условиям

$$f_i(0)=f_i'(0)=0, \qquad f_i'(\infty)=a_i \tag{2.6}$$

При $\sigma\neq 1$ уравнения (2.4), (2,5) представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Причем определение f_i вплоть до $i=\sigma-1$ в этом случае сводится к интегрированию уравнений (2.4), общий интеграл которых может быть представлен в виде

$$f_i' = a_i\left[1 - A\frac{\eta}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{\eta^2}{a}\right){}_1F_1\left(\omega+1,\ \frac{3}{2},\ \frac{\eta^2}{a}\right) + \right.$$
$$\left. + B\exp\left(-\frac{\eta^2}{a}\right){}_1F_1\left(\omega+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\eta^2}{a}\right)\right] \tag{2.7}$$

где A и B — постоянные интегрирования, ${}_1F_1$ — символ [5] вырожденной гипергеометрической функции, $\omega=[m-(m+1)(\sigma+i)]$. Для определения произвольных постоянных в (2.7) необходимо воспользоваться условиями (2.6)], второе из которых сразу дает $B=1$. Относительно третьего условия (2.6) заметим, что оно определяет A только тогда, когда $\omega\geqslant 0$. Действительно, как следует из асимптотического разложения для вырожденной гипергеометрической функции [5], при $\eta\to\infty$ оба последних члена (2.7) имеют порядок $\eta^{2\omega}$ и, если $\omega<0$, третье условие (2.6) выполняется при любом A. В том случае, когда $\omega\geqslant 0$, постоянная A будет определяться при помощи последнего условия (2.6):

$$A = -\sqrt[4]{a}\,\frac{2\omega!}{(\omega-{}^1\!/_2)!}$$

Посмотрим, какое ограничение заключает в себе требование $\omega\geqslant 0$. Для этого представим условие $\omega\geqslant 0$ в виде $m(\sigma-1+i)\leqslant-(\sigma+i)$. Отсюда вытекает следующее:

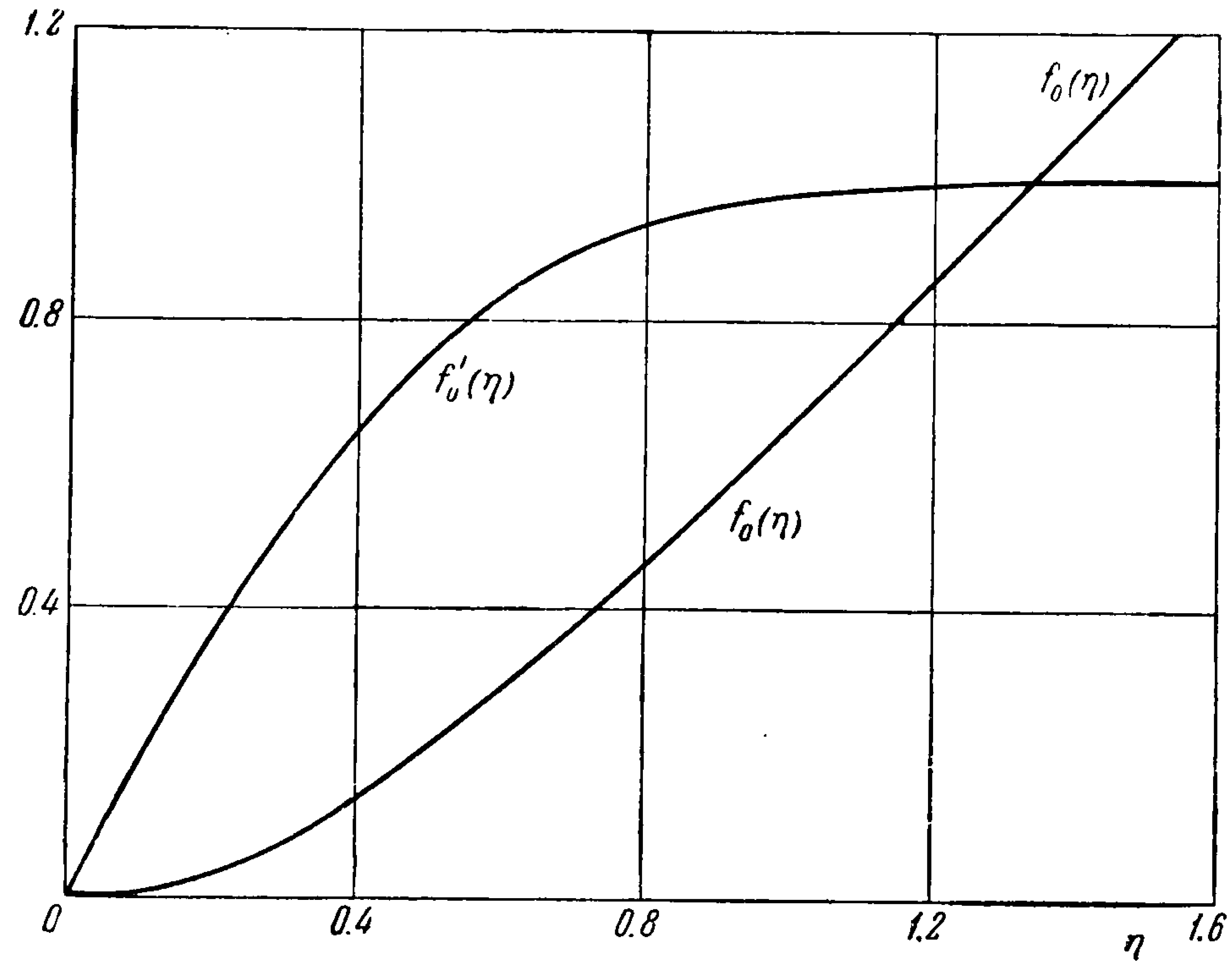
$$m\leqslant-\frac{\sigma+i}{\sigma-1+i}\quad\begin{pmatrix}\sigma>1\\ i\geqslant 0\end{pmatrix},\qquad m\geqslant-\frac{\sigma+i}{\sigma-1+i}\quad\begin{pmatrix}\sigma<1\\ i\leqslant 0\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Легко видеть, что требование (2.8) при $i=0$ состоит в том, чтобы члены рядов, представляющих собой разложения по ξ скорости внешнего потока (1.7) и продольной составляющей скорости в сечениях пограничного слоя, содержали t в положительной степени. Это условие также непосредственно следует из характера решения задачи в виде ряда по степеням t, которое имеет смысл при достаточно малых t. Все предыдущее относилось к $\sigma \neq 1$. Если принять $\sigma = 1$, то нахождение коэффициентов f_i сведется к решению системы (2.5), в которой первое уравнение относительно f_0 будет нелинейным.

Аналогичные рассуждения позволяют получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений и для коэффициентов ряда, представляющего автомодельные решения (1.15), если

$$k(\xi) = \xi^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i$$

($\sigma \geqslant -1$). Что касается предельных решений, то все они могут быть рассмотрены путем соответствующих предельных переходов.



Фиг. 1.

В одном частном случае, который можно получить как из формул (1.7), (1.8), так из (1.15), решение задачи особенно упрощается и сводится к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения. Действительно, полагая в уравнениях (2.5) $\sigma = 1$, $a = 1$, $a_0 = 1$ и $a_i = 0$ при $i \neq 0$, что отвечает скорости на границе пограничного слоя $U = x/t$, придем к следующему уравнению для f_0

$$f_0''' + 2(\eta + 2f_0) f_0'' + 4f_0'(1 - f_0') = 0 \tag{2.9}$$

При этом граничные условия (2.6) для f_0 имеют вид:

$$f_0(0) = f_0'(0) = 0, \qquad f_0'(\infty) = 1 \tag{2.10}$$

Так как $a_i \neq 0$ только при $i = 0$, то все остальные уравнения (2.5), будучи линейными и однородными, при нулевых граничных условиях дают тривиальные решения — нуль.

Трудность численного интегрирования уравнения (2.9) при условиях (2.10) заключается в необходимости предварительно определить значение $f_0''(0)$, при котором будет удовлетворяться асимптотическое условие на бесконечности. Вследствие того, что определение указанной величины осуществляется подбором, удобно до некоторого значения η

представить решение в виде степенного ряда, зависящего от параметра $f_0''(0)$. Принимая во внимание первое условие (2.10), положим

$$f_0 = b_2\eta^2 + b_3\eta^3 + b_4\eta^4 + \ldots \qquad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (2.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях η, получим выражения для b_i $(i = 3, 4, 5, \ldots)$ через основной коэффициент $b_2 = f_0''(0)$. Были вычислены значения b_i до двадцатого включительно. Затем при $\eta = 0.5$ и при выбранном значении параметра b_2 определялись $f_0(0.5)$, $f_0'(0.5)$, $f''(0.5)$. Начиная с $\eta = 0.5$ в каждом отдельном случае проводилось численное интегрирование уравнения (2.9) от точки к точке и проверялось выполнение последнего условия (2.10).

Результаты окончательного расчета даны в таблице.

Таблица 1

η	$f_0(\eta)$	$f_0'(\eta)$	$f_0''(\eta)$	η	$f_0(\eta)$	$f_0'(\eta)$	$f_0''(\eta)$
0	0	0	1.846	0.8	0.4642	0.9336	0.340
0.1	0.0092	0.1668	1.793	0.9	0.5530	0.9612	0.218
0.2	0.0362	0.3556	1.649	1.0	0.6561	0.9785	0.132
0.3	0.0797	0.5105	1.440	1.10	0.7545	0.9887	0.076
0.4	0.1375	0.6424	1.135	1.20	0.8536	0.9945	0.041
0.5	0.2073	0.7492	0.942	1.30	0.9532	0.9975	0.021
0.6	0.2865	0.8315	0.707	1.40	1.0531	0.9990	0.010
0.7	0.3728	0.8917	0.503	1.50	1.1530	0.9998	0.005

На фиг. 1 представлены зависимости $u/U = f_0'(\eta)$ (u — продольная составляющая скорости в пограничном слое) и

$$\frac{\psi}{2x\sqrt{\nu/t}} = f_0(\eta)$$

которые являются примером точного решения уравнений нестационарного ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Полученное решение позволяет вычислить напряжение трения на поверхности обтекаемого тела

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.923\,U\sqrt{\frac{\mu\rho}{t}}$$

и толщину пограничного слоя, которую можно считать равной $2.8\sqrt{\nu t}$.

Поступила 25 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. ГИТТЛ, М.— Л., 1941, стр. 61.
2. Биркгоф Г. Гидродинамика. ИЛ, М.—Л., 1953.
3. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
4. Watson E. J. Boundary-layer growth. Proceedings of the Royal Society, vol. 231 A, № 1184, 1955.
5. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 373.