

РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ ЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

П. И. Чушкин

(Москва)

В Вычислительном центре Академии наук СССР за последнее время при помощи одного численного метода, изложенного в докладе А. А. Дородницына^[1], было рассчитано несколько околосвуковых задач газовой динамики^[2]. При проведении вычислений на быстродействующих электронных счетных машинах данный метод оказывается достаточно эффективным. В настоящей статье этот приближенный метод применяется к задаче симметричного обтекания носовых частей эллипсов и эллипсоидов вращения звуковым потоком газа, а затем он распространяется также и на случай произвольного контура.

Проблема обтекания тел, движущихся со скоростью звука, рассматривалась в ряде работ. Первое исследование о плоских течениях такого типа провел Ф. И. Франкль^[3]. Задачу о клиновидном профиле в звуковом потоке газа решали Л. В. Овсянников^[4], С. Л. Юхвиц^[5] и др. Теорию движения плоских профилей и тел вращения со скоростью звука разрабатывали также Г. Гудерлей и Х. Иосихара^[6,7], К. Осватич, Т. Гульстренд^[8], Ф. Кейне^[9], Д. Майлс^[10] и др.

§ 1. Обтекание эллипсов. Пусть на эллипс вдоль его большой оси набегают равномерный поток газа, скорость которого на бесконечности равна скорости звука. Тогда, как известно, существуют две полубесконечные характеристики, исходящие от обтекаемого профиля и разделяющие все течение на две области. В области I, вверх по потоку от этих граничных характеристик, имеется смешанное потенциальное движение, которое может быть построено независимо от движения в области II. Наоборот, течение в области II определяется, если известны положение указанных граничных характеристик и значения вектора скорости на них.

Будем рассчитывать изоэнтропическое потенциальное течение в области I. Применим эллиптические координаты ξ, η . Кроме того, введем безразмерные величины, принимая за характерные половину фокусного расстояния, максимально возможную скорость в газе и плотность торможения. Для сокращения записи будем также пользоваться следующими функциями

$$\chi = H_{II} \rho u, \quad \omega = H_{II} \rho v, \quad \lambda = H_{II} v, \quad \mu = H_I u \quad (1.1)$$

где $H_I = H_{II} = H = \sqrt{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}$ — параметры Ламэ, u, v — составляющие скорости w вдоль гипербол $\eta = \text{const}$ и эллипсов $\xi = \text{const}$, ρ — плотность газа.

Рассчитываемое течение определяется уравнением неразрывности, уравнением отсутствия вихря и уравнением Бернулли

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0, \quad (1 - w^2)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (1.2)$$

где κ — показатель адиабаты, $w^2 = u^2 + v^2$.

Обратимся теперь к краевым условиям задачи. В силу симметрии достаточно рассматривать только часть области I, расположенную в верхней полуплоскости $0 \leq \eta \leq \pi$. Все функции на оси $\eta = 0$ будем отмечать индексом 0, на граничной характеристике индексом 1, а на некоторых линиях $\eta = \eta_n(\xi)$ индексом n . Обтекаемому эллипсу с относительной толщиной δ отвечает значение

$$\xi = \xi^0 = \operatorname{ar th} \delta \quad (1.3)$$

(для круга соответствующий радиус $r^0 = 1$). При $\xi = \xi^0$ условие обтекания дает $u_n = 0$; на оси симметрии $v_0 = 0$; на бесконечности для звукового потока должно быть

$$\eta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad u_n = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cos \eta_n, \quad v_n = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \sin \eta_n \quad (1.4)$$

Для граничной характеристики 1-го семейства $\eta = \eta_1(\xi)$ имеем

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} = \frac{u_1 + v_1 \operatorname{ctg} \alpha_1}{-v_1 + u_1 \operatorname{ctg} \alpha_1} \quad (1.5)$$

$$\frac{du_1}{d\xi} = \frac{1}{v_1 + u_1 \operatorname{ctg} \alpha_1} \left[(u_1 - v_1 \operatorname{ctg} \alpha_1) \frac{dv_1}{d\xi} + \frac{w_1^2}{2H_1^2} (\sin 2\eta_1 + \frac{d\eta_1}{d\xi} \operatorname{sh} 2\xi) \right] \quad (1.6)$$

где угол Маха

$$\alpha_1 = \operatorname{arc sin} \sqrt{\frac{x-1}{2} \frac{1-w_1^2}{w_1^2}} \quad (1.7)$$

Как известно, для плоских безвихревых течений уравнение (1.6) интегрируется и для граничной характеристики рассматриваемой задачи сведется к трансцендентному выражению

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{arc tg} \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \operatorname{ctg} \alpha_1 \right) + \alpha_1 - \frac{\pi}{2} \quad (1.8)$$

Здесь β_1 — угол наклона вектора скорости к оси Ox . На обтекаемом эллипсе

$$\operatorname{tg} \beta_1 = -\delta \operatorname{ctg} \eta_1 \quad (1.9)$$

Приближенное решение поставленной задачи можно вести с различной степенью точности. В N -м приближении в рассматриваемой части области I проведем N линий $\eta = \eta_n(\xi)$, включая характеристику $\eta = \eta_1(\xi)$, определяемых равенством

$$\eta_n(\xi) = \frac{N-n+1}{N} \eta_1(\xi) \quad (n=1, \dots, N) \quad (1.10)$$

Интегрируя первые два уравнения (1.2) от $\eta = 0$ до каждой из этих линий, получим $2N$ независимых интегральных соотношений

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{\eta_n} \chi d\eta - \chi_n \frac{d\eta_n}{d\xi} + \omega_n = 0 \quad (n=1, \dots, N) \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{\eta_n} \lambda d\eta - \lambda_n \frac{d\eta_n}{d\xi} - \mu_n + \mu_0 = 0 \quad (n=1, \dots, N) \quad (1.12)$$

В N -м приближении подынтегральные функции χ и λ будем заменять интерполяционными тригонометрическими полиномами, которые строятся по значениям этих функций на линиях $\eta = \eta_m(\xi)$

$$\chi = \sum_{m=0}^N a_m \cos m \frac{\pi}{2} \frac{\eta}{\eta_1}, \quad \lambda = \sum_{m=1}^N b_m \sin m \frac{\pi}{2} \frac{\eta}{\eta_1} \quad (1.13)$$

Коэффициенты a_m, b_m при этом будут, очевидно, линейными функциями χ_n, λ_n , т. е.

$$a_m = \sum_{n=0}^N c_{mn} \chi_n, \quad b_m = \sum_{n=1}^N d_{mn} \lambda_n \quad (1.14)$$

где c_{mn}, d_{mn} — числовые коэффициенты, величины которых для $N=1, 2, 3$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

$N=2$		$(2 - \sqrt{2}) c_{mn}$			$\sqrt{2} d_{mn}$	
		$n=0$	1	2	1	2
m						
0	1	1	$-\sqrt{2}$	—	—	—
1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0
2	1	$\sqrt{2}-1$	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

$N=3$		$(9 - 5\sqrt{3}) c_{mn}$				$(-3 + 3\sqrt{3}) d_{mn}$		
		$n=0$	1	2	3	1	2	3
m								
0	$-2\sqrt{3}$	$3 - \sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	6	—	—	—	—
1	6	-2	6	-10	$2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
2	$-2\sqrt{3}$	$-6 + 4\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	6	$-2\sqrt{3}$	6	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$
3	$3 - \sqrt{3}$	$5 - 3\sqrt{3}$	$-6 + 4\sqrt{3}$	-2	$3 - \sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

Подставляя интерполяционные выражения (1.13) в интегральные соотношения (1.11)—(1.12), приходим к приближенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эту систему для N -го приближения можно представить в следующей форме

$$\frac{d\eta_1 \chi_n}{d\xi} = A_n \frac{d\eta_1 \chi_1}{d\xi} + \sum_{i=1}^N B_{ni} \left(\chi_i \frac{d\eta_i}{d\xi} - \omega_i \right) \quad (n=0, 2, 3, \dots, N) \quad (1.15)$$

$$\frac{d\eta_1 \lambda_n}{d\xi} = \sum_{i=1}^N C_{ni} \left(\lambda_i \frac{d\eta_i}{d\xi} + \mu_i - \mu_0 \right) \quad (n=1, 2, 3, \dots, N) \quad (1.16)$$

Входящие сюда числовые коэффициенты A_n, B_{ni}, C_{ni} даны для $N=1, 2, 3$ в табл. 2. Из формул (1.1) и уравнения Бернулли легко выразить $d\chi_n, d\lambda_n$ через $d\xi, d\eta_n, du_n, dv_n$.

Равенства (1.15) и (1.16) вместе с (1.5) и (1.6) представляют собой систему $2N + 2$ дифференциальных уравнений для определения в N -м при-

Таблица 2

$N=2$		B_{ni}		C_{ni}		
		$n=0$	2	1	2	
$N=1$	$A_0 = 1 - \frac{\pi}{2}$					
	$B_{01} = C_{11} = \frac{\pi}{2}$					
i						
1		-1.158380	1.814760	3.792238	0.460076	
2		3.859637	-0.995662	-7.584476	2.221441	
A_n		0.228561	-0.316929			

$N=3$		B_{ni}			C_{ni}		
		$n=0$	2	3	1	2	3
i							
1		0.657584	2.096236	-0.854200	6.526188	0.574951	-0.088945
2		-2.045869	-0.003188	3.050314	-14.866176	3.716544	0.995845
3		5.369973	-2.616153	-0.854200	18.493775	-8.008039	2.809644
A_n		-0.083663	-0.222059	0.105391			

ближении соответствующего числа искомых функций η_1, u_n, v_n . Для того чтобы иметь дело с конечной областью и избавиться от гиперболических функций, в этой системе целесообразно перейти к новой независимой переменной $t = e^{-\xi}$.

Полученная система дифференциальных уравнений интегрируется численным методом, идя от обтекаемого эллипса до $t = 0$. При этом имеет место краевая задача. Действительно, в N -м приближении здесь все $u_n = 0$, а N значений v_n (кроме $v_0 = 0$) подбираются по условиям (1.4) на бесконечности; начальное значение η_1 находится через v_1 при помощи выражений (1.7) — (1.9). Отметим, что при использованных нами аппроксимациях (1.13) получается такая приближенная система дифференциальных уравнений, которая имеет решение, точно удовлетворяющее всем краевым условиям задачи. Для этой системы, при выполнении на бесконечности N из условий (1.4), будут автоматически выполнены и остальные $N + 2$ из этих условий.

После определения решения по аппроксимациям (1.13) рассчитывается поле скоростей и, в частности, звуковая линия $\eta = \eta_*(\xi)$. Для звуковой линии имеем

$$\lambda_*^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} \chi_*^2 = (\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta_*) \frac{x-1}{x+1}$$

Если подставить сюда (1.13) — (1.14), то после преобразований для расчета звуковой линии в N -м приближении можно найти такое тригонометрическое уравнение

$$\sin^2 \eta_* + \sum_{m=0}^{2N} e_m \cos m \frac{\pi}{2} \frac{\eta_*}{\eta_1} = 0$$

где коэффициенты e_m зависят от ξ, u_n, v_n, x .

Система (1.15) — (1.16) сохраняется и для круга, в ней только ξ , η заменяются соответственно на r , θ ; кроме того, для этого случая, рассматривая u , v как составляющие скорости в полярных координатах, надо в (1.1) принимать $H_I = 1$, $H_{II} = r$. Уравнения характеристик в полярных координатах получаются из (1.5) и (1.6), если заменить в них η на θ , $d\xi$ на dr/r и положить далее $\xi \rightarrow \infty$.

§ 2. Обтекание эллипсоидов. Совершенно аналогично, используя интегральные соотношения, можно решать задачу обтекания эллипсоидов вращения звуковым потоком газа, набегающим вдоль оси вращения. Из-за осевой симметрии здесь следует рассматривать какую-либо одну меридиональную плоскость. Как и в случае эллипсов, будем рассчитывать смешанное потенциальное течение в аналогичной области I. Уравнения задачи и все краевые условия, кроме уравнения неразрывности и уравнения характеристики (1.6), останутся при этом теми же, что в плоском движении. Уравнение неразрывности теперь будет

$$\frac{\partial X \sin \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega \sin \eta}{\partial \eta} = 0 \quad (X = H \rho u \operatorname{sh} \xi, \quad \Omega = H \rho v \operatorname{sh} \xi) \quad (2.1)$$

В правую же часть уравнения (1.6) войдет новое слагаемое

$$-\frac{1 - u^2 - v^2}{1 - [(x+1)/(x-1)]u^2 - v^2} (u \operatorname{cth} \xi + v \operatorname{ctg} \eta) \quad (2.2)$$

Применяя интегральные соотношения, как и в § 1, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, причем равенства (1.16), следующие из уравнения отсутствия вихря, для случая эллипсоидов не изменяются.

Интегральные соотношения, получаемые по уравнению неразрывности (2.1)

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{\eta_n} X \sin \eta d\eta - \left(X_n \frac{d\eta_n}{d\xi} - \Omega_n \right) \sin \eta_n = 0 \quad (n = 1, \dots, N)$$

после аппроксимирования подынтегральной функции X интерполяционным тригонометрическим полиномом, подобным первому из (1.13), сведутся в N -м приближении к следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{d\xi} \sum_{i=0}^N X_i \varphi_{ni} - \left(X_n \frac{d\eta_n}{d\xi} - \Omega_n \right) \sin \eta_n = 0 \quad (n = 1, \dots, N) \quad (2.3)$$

Входящие сюда функции φ_{ni} зависят от η_n , а именно

$$\varphi_{ni} = \sum_{m=0}^N c_{mi} f_{nm}$$

причем c_{mi} — числовые коэффициенты из (1.14), только роль индекса n теперь играет i , а

$$f_{nm} = \frac{1 - \cos \eta_n \cos k\eta_n - k \sin \eta_n \sin k\eta_n}{1 - k^2} \quad \left(k = \frac{m\pi}{2\eta_1} \right)$$

Уравнения (2.3) можно преобразовать к такой форме

$$\frac{dX_n}{d\xi} = \frac{1}{D_1} \left[D_n \frac{dX_1}{d\xi} + \sum_{i=0}^N \left(E_{ni} X_i \frac{d\eta_1}{d\xi} + i G_{ni} \Omega_i \right) \right] \quad (n = 0, 2, 3, \dots, N)$$

Последние уравнения соответствуют равенствам (1.15) для плоского случая, но коэффициенты D_n , E_{ni} , G_{ni} не являются числами, а выражаются через f_{nm} или φ_{ni} , т. е. представляют собой функции η_n .

Для $N=1$ эти коэффициенты будут

$$D_0 = f_{11} - f_{10}, \quad D_1 = f_{11}, \quad E_{01} = -E_{00} = \frac{df_{11}}{d\eta_1},$$

$$G_{00} = 0, \quad G_{01} = \sin \eta_1$$

Для $N=2$ имеем

$$D_0 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{20} & \varphi_{22} \\ \varphi_{10} & \varphi_{12} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{10} & \varphi_{11} \\ \varphi_{20} & \varphi_{21} \end{vmatrix}$$

$$E_{ni} = (1-n) \left(\varphi_{2,2-n} \frac{d\varphi_{1i}}{d\eta_1} - \varphi_{1,2-n} \frac{d\varphi_{2i}}{d\eta_1} \right) + G_{ni}$$

$$G_{ni} = (-1)^i \frac{1-n}{i} \varphi_{3-i,2-n} \sin \eta_i, \quad G_{n0} = 0 \quad \begin{pmatrix} n=0, 2 \\ i=0, 1, 2 \end{pmatrix}$$

Неопределенность выражений f_{11} и f_{21} при $\eta_1 \rightarrow 1/2\pi$ легко раскрыть.

Краевая задача для приближенной системы дифференциальных уравнений решается для эллипсоидов так же, как для эллипсов. Но равенство (1.8) для осесимметричных течений места не имеет, поэтому начальное значение η_1 приходится подбирать. Преобразование уравнений при $\delta=1$ (сфера) происходит подобно плоскому случаю.

§ 3. Обтекание произвольного контура. Рассмотрим плоское обтекание. Пусть уравнение профиля в полярных координатах имеет вид $r = F(\theta)$. Для расчета области I достаточно знать уравнение профиля только в носовой части до миделя.

Решение задачи целесообразно вести в некоторых новых ортогональных координатах, которые по-прежнему будем обозначать ξ , η . Эти координаты определим следующим образом

$$\xi = r - F(\theta), \quad \int \frac{d\eta}{F'_\eta} = -\frac{1}{r} + \int \frac{d\theta}{F'_\theta} \quad (3.1)$$

Линия $\xi=0$ представляет собой обтекаемый профиль. На бесконечности эти координаты переходят в полярные.

Параметры Ламэ для координат ξ , η получим в виде

$$H_I = r \sqrt{\varphi}, \quad H_{II} = \frac{r^2 F'_\theta \sqrt{\varphi}}{F'_\eta} \quad \left(\varphi = \frac{1}{r^2 + F_\theta'^2} \right) \quad (3.2)$$

Отсюда найдем следующие производные:

$$\frac{\partial H_I}{\partial \xi} = r F_\theta'^2 \varphi^{5/2} (r + F''_{\theta\theta}), \quad \frac{\partial H_I}{\partial \eta} = \frac{r^2 F_\theta'^2 \varphi^{5/2}}{F'_\eta} (-r F''_{\theta\theta} + F'_\theta)$$

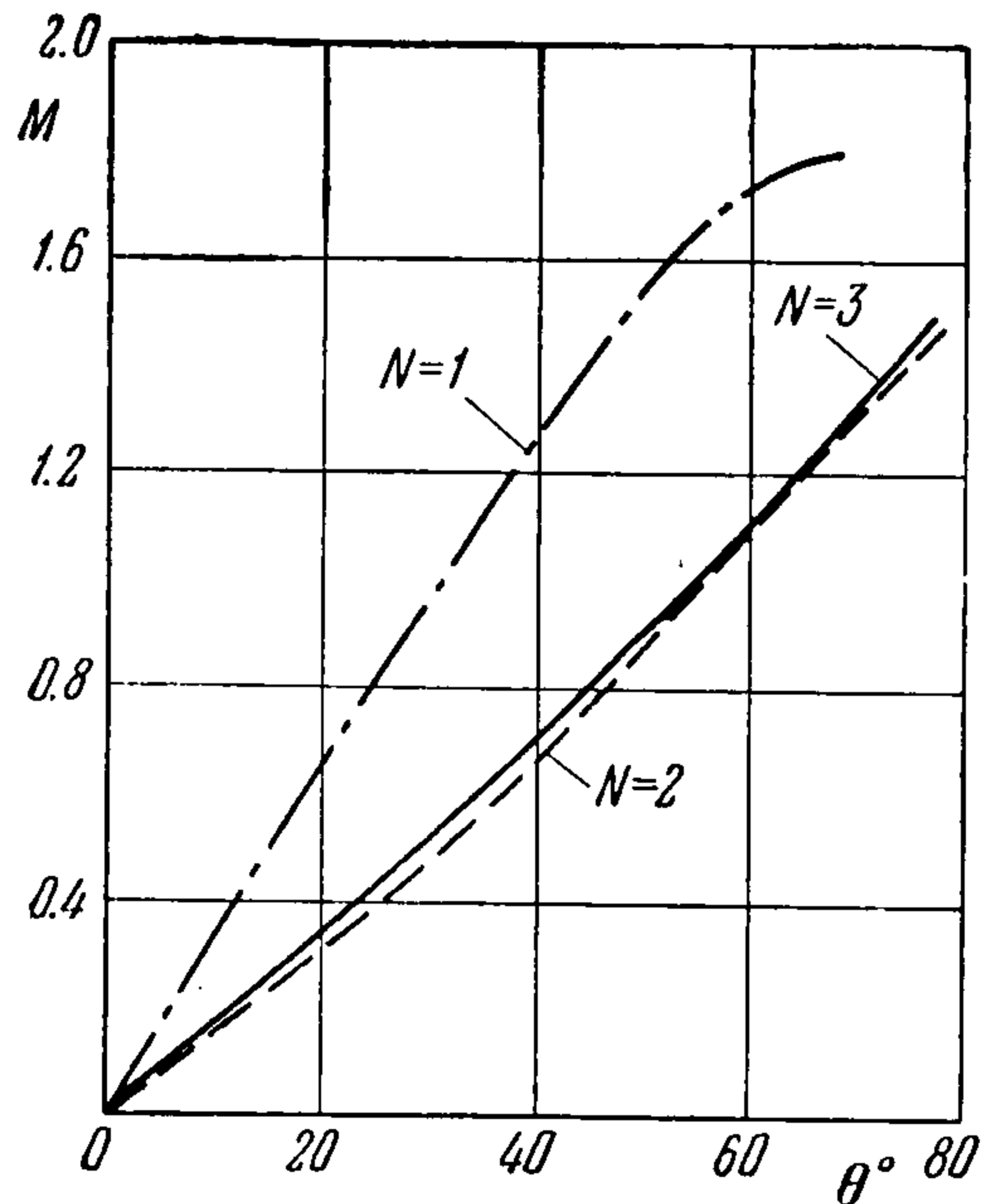
$$\frac{\partial H_{II}}{\partial \xi} = \frac{r^3 F'_\theta \varphi^{5/2}}{F'_\eta} (r^2 - r F''_{\theta\theta} + 2F'^2)$$

$$\frac{\partial H_{II}}{\partial \eta} = \frac{r^2 F'_\theta \varphi^{5/2}}{F_\eta'^2} (r^4 F''_{\theta\theta} + r^3 F_\theta'^2 + 2r F_\theta'^4 - \varphi^2 F''_{\eta\eta})$$

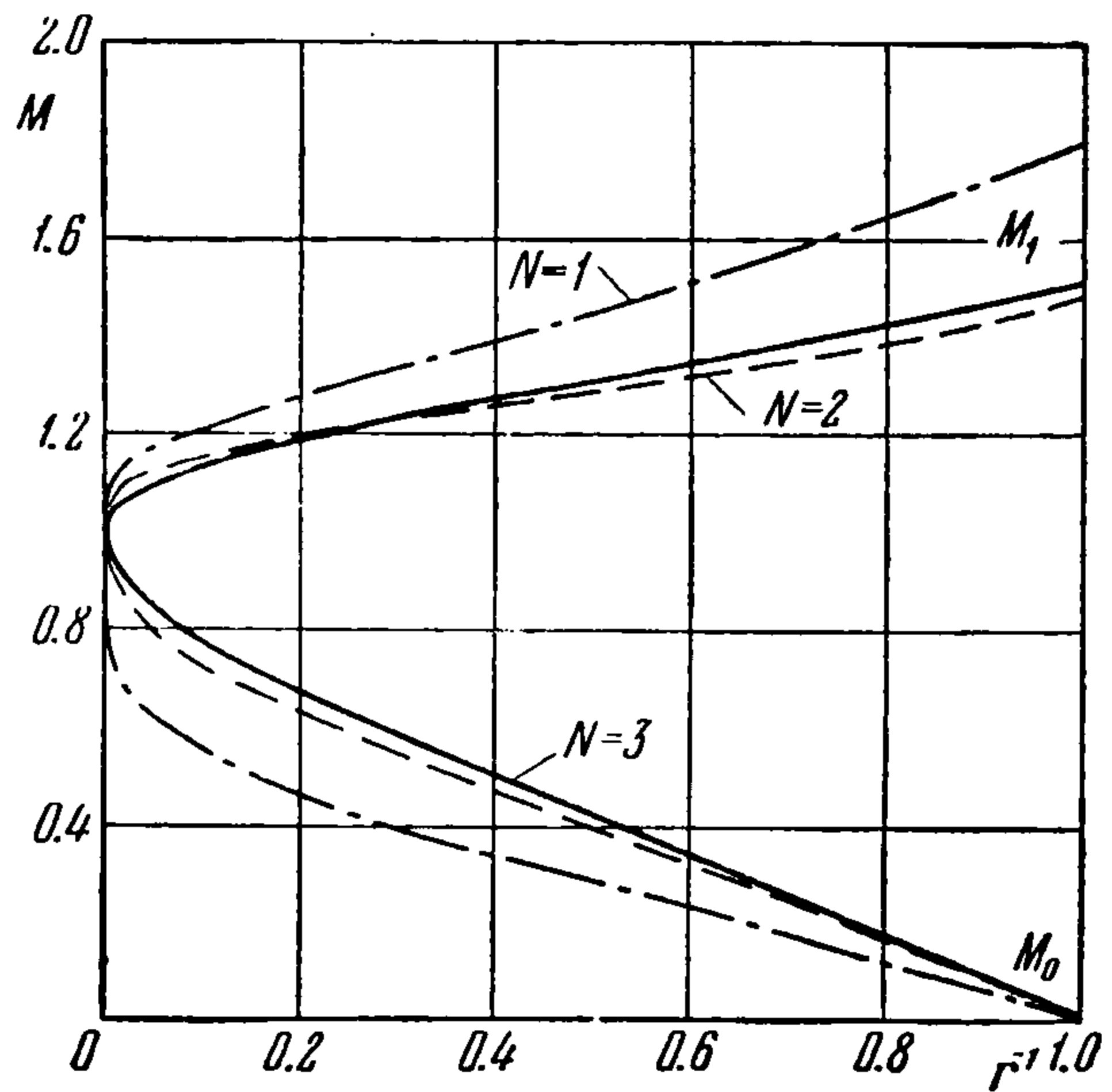
Из формул (3.1), вообще говоря, можно выразить r , θ через ξ , η явным или неявным образом. Эта связь используется при определении параметров Ламэ (3.2). Кроме того, по (3.1) имеем также

$$dr = r^2 \varphi d\xi + \frac{r^2 F_\theta'^2 \varphi}{F'_\eta} d\eta, \quad d\theta = -F_\theta' \varphi d\xi + \frac{r^2 F_\theta' \varphi}{F'_\eta} d\eta$$

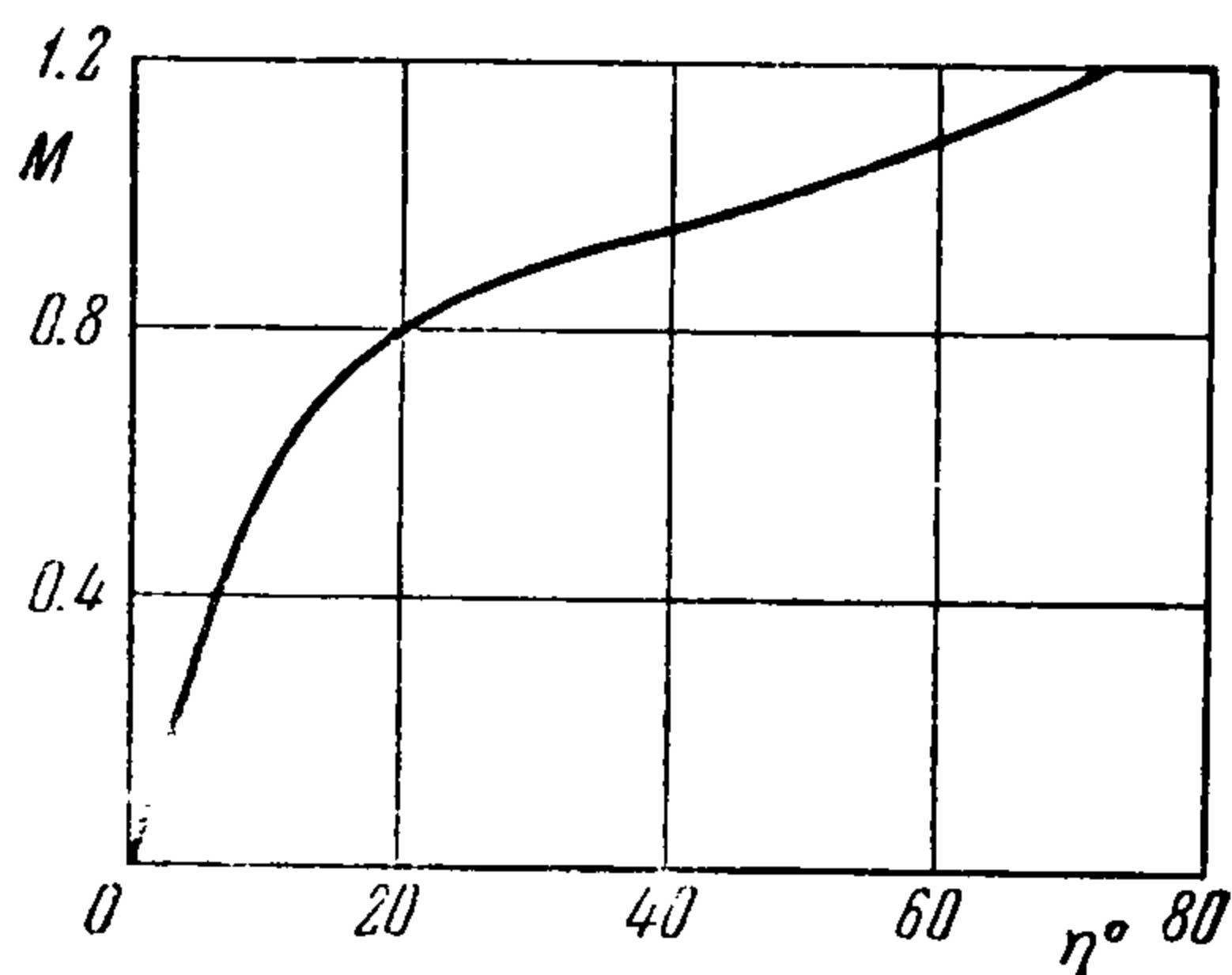
Уравнения неразрывности и отсутствия вихря для данного случая по-прежнему можно представить в форме (1.2). Вид функций (1.1) сохраняется, но на этот раз под u, v подразумеваются составляющие скорости вдоль введенных ортогональных линий $\eta = \text{const}$ и $\xi = \text{const}$ соответственно; плотность ρ снова выражается уравнением Бернулли (1.2).



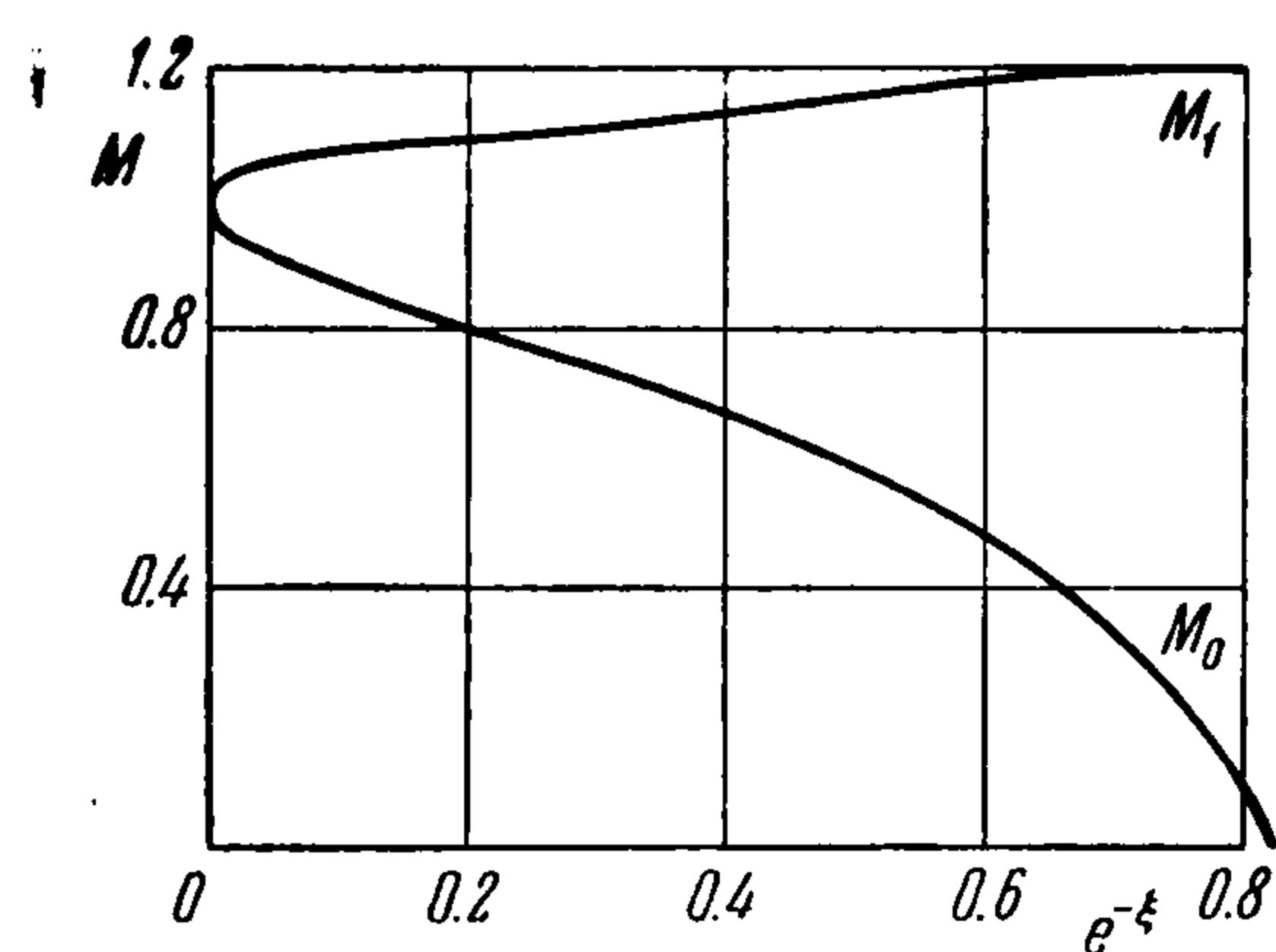
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Уравнения характеристик теперь будут

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{H_I}{H_{II}} \frac{u \pm v \operatorname{ctg} \alpha}{-v \pm u \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{v \pm u \operatorname{ctg} \alpha} \left[(u \mp v \operatorname{ctg} \alpha) \frac{dv}{d\xi} + w^2 \left(\frac{1}{H_{II}} \frac{\partial H_I}{\partial \eta} + \frac{1}{H_I} \frac{\partial H_{II}}{\partial \xi} \frac{d\eta}{d\xi} \right) \right]$$

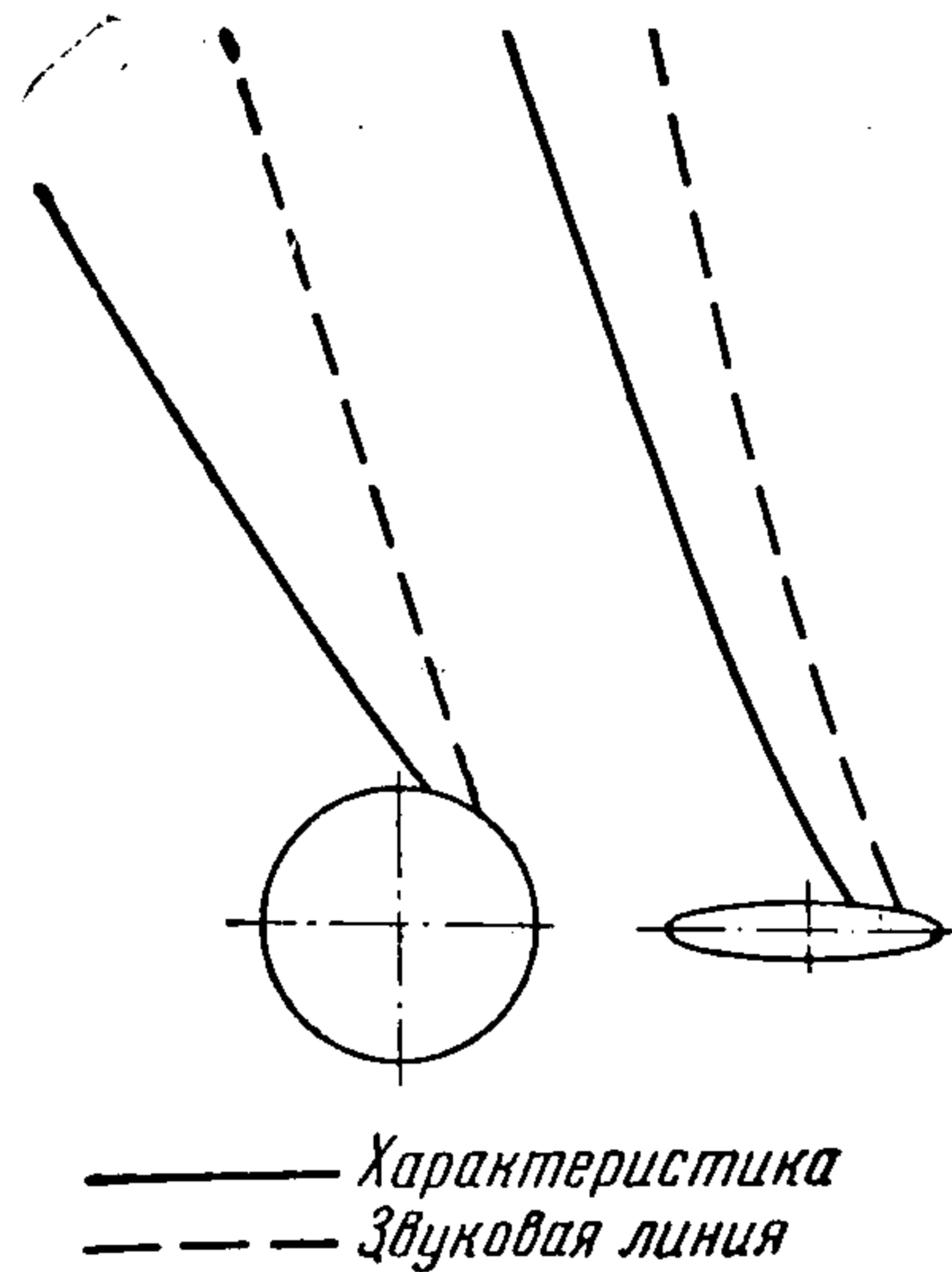
причем верхний знак относится к характеристикам 1-го семейства.

Рассматривая симметричный профиль на нулевом угле атаки, составим, как и раньше, интегральные соотношения (1.11) и (1.12). Аппроксимируя в них подынтегральные функции по формулам (1.13), получим в N -м приближении опять ту же систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.15) — (1.16). Решение этой системы ищется при краевых условиях, подобных условиям § 1.

Таким же образом можно рассмотреть обтекание осесимметричного тела произвольной формы.

§ 4. Результаты расчетов. Приводим результаты вычислений обтекания звуковым потоком газа круга и эллипса с относительной толщиной $\delta = 0.2$. Расчеты для круга были сделаны по трем приближениям ($N=1, 2, 3$). На фиг. 1 дано распределение числа Маха на обтекаемом круге, а на фиг. 2 — изменение числа Маха вдоль оси (M_0) и характеристики (M_1). Эти графики иллюстрируют сходимость метода и достаточную точность третьего приближения в рассматриваемом случае.

Для тонких эллипсов, когда поток на большей части контура близок к звуковому, следует ожидать более низкой точности метода.



Фиг. 5.

Поэтому эллипс с $\delta = 0.2$ был рассчитан в третьем приближении. На фиг. 3 показано, как на этом эллипсе меняется число Маха по углу η , на фиг. 4 приведена соответствующая зависимость числа Маха по координате $t = e^{-\xi}$ вдоль оси и характеристики. На фиг. 5 построены в физической плоскости начальные участки граничной характеристики и звуковой линии для круга и эллипса $\delta = 0.2$.

Все вычисления по этой работе были выполнены на быстродействующей электронной счетной машине БЭСМ Академии наук СССР. Надо отметить, что численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, к которому сведена решаемая задача, проводится на электронных счетных машинах особенно просто. Кроме того, программа работы машины была составлена так, что удовлетворение краевых условий путем подбора осуществлялось частично самой машиной при помощи интерполяций.

Поступила 21 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Труды III Всесоюзного математического съезда, т. II, 1956.
2. Кацкова О. Н., Чушкин П. И., Шмыглевский Ю. Д. Некоторые задачи газовой динамики. Конференция «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения», доклад 37, 1956.
3. Франкль Ф. И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. ДАН СССР, т. LVII, № 7, 1947.
4. Овсянников Л. В. О движении клиновидного профиля со скоростью звука. Труды ЛКВВИА, вып. 33, 1950.
5. Юхвиц С. Л. Движение ромба со скоростью, равной скорости звука. Сборник статей, № 9, «Теоретическая гидромеханика». Оборонгиз, 1952.
6. Гудерлей Г. и Иосихара Х. Плоский несимметричный поток при $M=1$. Сб. «Механика», вып. 6. ИЛ, 1954.
7. Гудерлей Г. и Иосихара Х. Осесимметричные трансзвуковые течения. Сб. «Механика», вып. 2. ИЛ, 1953.
8. Gullstrand T. Transonic Flow Past Two-Dimensional Airfoils. Z. f. Flugwissenschaften, vol. 1, № 2, 1953.
9. Keune F. Über den Kompressibilitätseinfluß bei und nahe Machzahl Eins für Körper kleiner Streckung und schlanke Rotationskörper. Z. f. Flugwissenschaften, vol. 4, № 1/2, 1956.
10. Miles J. W. On the Sonic Drag of a Slender Body. JAS, vol. 23, № 2, 1956.