Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ ВОЛНЫ КЕЛЬВИНА

В. В. Мусатов

(Москва)

Излагается специальный случай задачи теории приливов. Задача решается в рамках теории длинных волн без учета сил тяготения.

Для жидкости, находящейся в канале постоянной глубины, с учетом потенциала приливообразующих сил подобного рода задача решалась Томсоном [1] в 1879 г. Аналогичной задачей занимался Пуанкаре[2]. Случай малой угловой скорости вращения канала рассмотрен Рэлеем [3] в 1903 и 1909 гг., и заново задача была исследована Тэйлором [4] в 1921 г.

Ниже рассматривается случай свободной волны Кельвина в канале, дно которого имеет переменную глубину; канал вращается с постоянной угловой скоростью около вертикальной оси.

Методом асимптотического выражения найдено решение по собственным функциям; показано, что для больших значений последовательного ряда натуральных чисел может быть построена последовательность этих функций.

Предполагая, что глубина канала по ширине меняется по линейному закону, получена зависимость между частотой гармонического возмущения и волновым числом.

Автор пользуется случаем выразить благодарность Л. Н. Сретенскому за ценные советы при выполнении этой работы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим случай плоского горизонтального слоя однородной жидкости, плотности ρ; пусть этот слой в невозмущенном состоянии равномерно вращается около вертикальной оси с угловой скоростью ω.

Пусть плоский слой представляет канал постоянной ширины l, простирающийся в обе стороны до бесконечности. Предположим теперь, что в условиях отсутствия вращения и возмущающих сил свободный уровень жидкости располагается в плоскости Oxy, за ось z примем ось вращения канала, за ось абсцисс примем продольную ось симметрии канала и ось ординат выберем так, чтобы система координат была правой.

Обозначив через z_0 аппликату свободной поверхности при относительном равновесии жидкости, находящейся под действием силы тяжести, имеем

$$z_0 = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + \text{const} \tag{1.1}$$

Задача рассматривается в следующих предположениях [3].

1. Относительное движение принимается как бесконечно малое, так что конвективными членами уравнений гидродинамики можно пренебречь.

2. Наклон поверхности (1.1) всюду мал, т. е. величина $\omega^2 r/g$ мала, где r — наибольшее расстояние произвольной части слоя от оси вращения, g — ускорение силы тяжести.

3. Принимается обычное условие теории длинных волн; а именно, что вертикальное ускорение частицы жидкости мало сравнительно с g; тогда давление в произвольной точке (x, y, z) определяется как гидростатическое

$$p - p_0 = \rho g (z_0 + \zeta - z) \tag{1.2}$$

Здесь $z_0 + \zeta$ обозначает ординату возмущенной поверхности; функция $\zeta = \zeta(x, y, t)$ есть мера уклонения поверхности возмущенной жидкости от формы относительного равновесия.

4. Частица жидкости находится только в поле силы тяжести и силы Кориолиса.

При допущенных выше предположениях уравнения абсолютного движения частицы жидкости будут

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\omega v - g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -2\omega u - g\frac{\partial \zeta}{\partial y} \tag{1.3}$$

Если обозначить через $h(x, y)$ глубину рассматриваемого слоя, отсчитываемую от поверхности относительного равновесия, то уравнение неразрывности запишется так:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь u и v — эйлеровские координаты частицы. В качестве граничных условий используем условия непроницаемости

$$v = 0 \qquad \text{при } y = -\frac{1}{2}l, \quad y = \frac{1}{2}l \tag{1.5}$$

Получена замкнутая система уравнений (1.3), (1.4) для определения u, v, ζ при граничных условиях (1.5).

2. Преобразования уравнений (1.3) и (1.4). Рассмотрим задачу при наличии простого гармонического возмущения [5] с множителем $e^{i\sigma t}$. Положим, что

$$u(x, y, t) = u_1(x, y)e^{i\sigma t}, \qquad v(x, y, t) = v_1(x, y)e^{i\sigma t}$$

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_1(x, y)e^{i\sigma t} \tag{2.1}$$

Подставляя выражения u, v и ζ из (2.1) в (1.3) и (1.4), получим (индексы для простоты отброшены)

$$i\sigma u - 2\omega v = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad i\sigma v + 2\omega u = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} + i\sigma\zeta = 0 \tag{2.3}$$

Исключая из (2.2) u и v и подставляя их выражения в (2.3), получим уравнение для ζ — высоты поднятия поверхности [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \frac{\Delta}{g}\zeta = \frac{2\omega}{i\sigma}\frac{\partial(\zeta, h)}{\partial(x, y)} \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial(\zeta, h)}{\partial(x, y)} \text{ — якобиан,} \quad \Delta = \sigma^2 - 4\omega^2\right)$$

Граничные условия (1.5) переходят в такие:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{2\omega}{i\sigma}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } y = -\frac{1}{2}l, \quad y = \frac{1}{2}l \tag{2.5}$$

Задача свелась к решению уравнения (2.4) при краевых условиях (2.5).

3. Дифференциальное уравнение для одного случая плоского горизонтального слоя. Предположим, что глубина канала меняется только по ширине, т. е. $h = h(y)$. Тогда уравнение (2.4) упростится и будет таким:

$$h\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \frac{\Delta}{g}\zeta = \frac{2\omega}{i\sigma}\frac{dh}{dy}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \tag{3.1}$$

Полагая $h(y) = h_0 H(y)$, где h_0 — некоторый параметр, получим

$$H\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \varkappa^2\zeta = \frac{2\omega}{i\sigma}\frac{dH}{dy}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \qquad \left(\varkappa^2 = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh_0}\right) \tag{3.2}$$

где $\varkappa^2$ может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Предположим, что возвышение ζ меняется по такому закону:

$$\zeta(x, y) = e^{ikx}Y(y) \tag{3.3}$$

где $Y(y)$ — некоторая непрерывная функция, допускающая первую и вторую производные, а k — волновое число.

Подставляя (3.3) в уравнение (3.2), получим уравнение типа Штурм—Лиувилля

$$\frac{d}{dy}\left(H\frac{dY}{dy}\right) + \left(\varkappa^2 - k^2H - \frac{2\omega}{\sigma}k\frac{dH}{dy}\right)Y = 0 \tag{3.4}$$

При этом граничные условия (2.5) примут вид:

$$\frac{dY}{dy} - \frac{2\omega}{\sigma}kY = 0 \qquad \text{при } y = -\frac{1}{2}l, \ \ y = \frac{1}{2}l \tag{3.5}$$

Пусть глубина канала по ширине меняется по линейному закону, так что на границах $y = -{}^1\!/_2 l$, $y = {}^1\!/_2 l$ глубина канала равна соответственно h_1 и h_2.

Вместо переменной y введем новую переменную

$$\eta \equiv H(y) = \frac{y}{l} + \eta_0 \qquad \left(\eta_0 = \frac{h_1 + h_2}{2h_0}, \ \ h_0 = h_2 - h_1\right) \tag{3.6}$$

Тогда

$$\eta_1 = H\left(-\frac{1}{2}l\right) = h_1 / h_0, \qquad \eta_2 = H\left(\frac{1}{2}l\right) = h_2 / h_0 \tag{3.7}$$

Уравнение (3.4) можно представить в виде

$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dY}{d\eta}\right) + (\mu - k^2l^2\eta)Y = 0, \qquad \mu = \varkappa^2l^2 - \frac{2\omega}{\sigma}kl \tag{3.8}$$

Граничные условия (3.5) примут вид:

$$\frac{dY}{d\eta} - \frac{2\omega}{\sigma}klY = 0 \qquad \text{при } \eta = \eta_1, \ \eta = \eta_2 \tag{3.9}$$

при этом η_1 и η_2 определяются из (3.7).

4. Приведение уравнения (3.8) к нормальному виду. При помощи преобразований переменных

$$S(\tau) = Y(\eta)\eta^{1/4}, \qquad \tau = \frac{1}{K}\int_{\eta_1}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \tag{4.1}$$

основное уравнение (3.8) можно привести к нормальному виду

$$\frac{d^2S}{d\tau^2} + [K^2\mu - q(\tau)]S = 0 \tag{4.2}$$

с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} &\frac{dS}{d\tau} - k_1(\sigma, \omega) S = 0 \qquad \text{при } \tau = 0 \\ &\frac{dS}{d\tau} - k_2(\sigma, \omega) S = 0 \qquad \text{при } \tau = \pi \end{aligned} \tag{4.3}$$

Величины $q(\tau)$, k_1, k_2 и K определяются равенствами

$$\begin{aligned} &q(\tau) = \tfrac{1}{4} K^4 k^2 l^2 \left(\tau + \frac{2\sqrt{\eta_1}}{K}\right)^2 - \frac{1}{4\left(\tau + \frac{2\sqrt{\eta_1}}{K}\right)^2} \\ &k_1(\sigma, \omega) = K\left(\frac{1}{4\sqrt{\eta_1}} + \frac{2\omega}{\sigma} kl\sqrt{\eta_1}\right), \\ &k_2(\sigma, \omega) = K\left(\frac{1}{4\sqrt{\eta_2}} + \frac{2\omega}{\sigma} kl\sqrt{\eta_2}\right), \qquad K = \frac{1}{\pi}\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \end{aligned} \tag{4.4}$$

5. Асимптотическое решение уравнения (4.2). При достаточно больших значениях n собственные значения $K^2\mu$ будут положительны [7], и поэтому, положив

$$K^2\mu = \nu^2 \tag{5.1}$$

уравнение (4.2) можно записать в виде

$$\frac{d^2S}{d\tau^2} + [\nu^2 - q(\tau)]\, S = 0 \tag{5.2}$$

Общее решение уравнения (5.2) можно записать так:

$$S(\tau) = A\cos\nu\tau + B\sin\nu\tau + \frac{1}{\nu}\int_0^\tau \sin\nu(\tau - t)\, q(t)\, S(t)\, dt \tag{5.3}$$

Решение в теории длинных волн определяется с точностью до амплитуды, поэтому для определенности решения (5.3) первое граничное условие (4.3) должно быть заменено неоднородными условиями

$$S(0) = 1, \qquad S'(0) = k_1$$

Тогда постоянные A и B определяются единственным способом и интегральное уравнение (5.3) запишется так:

$$S(\tau) = \cos\nu\tau + \frac{k_1}{\nu}\sin\nu\tau + \frac{1}{\nu}\int_0^\tau \sin\nu(\tau - t)\, q(t)\, S(t)\, dt \tag{5.4}$$

Использование второго граничного условия (4.3) для отыскания ν дает трансцендентное уравнение.

Для отыскания собственных значений и соответствующих им функций воспользуемся асимптотическим представлением искомых характеристических чисел и функций [8].

Основная теорема существования показывает, что функция $S(\tau)$ по модулю ограничена в интервале $(0, \pi)$.

Пусть M будет верхней границей значений $S(\tau)$ в $(0, \pi)$. Так как выражение $|S(\tau)|$ непрерывно в замкнутом интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \pi$, то оно достигает своей верхней гриницы, следовательно,

$$M \leqslant \frac{1}{J}\sqrt{1 + \frac{k_1^2}{\nu^2}}, \qquad J = 1 - \frac{1}{\nu}\int_0^\pi |q(t)|\, dt \tag{5.5}$$

для всех значений ν, бо́льших фиксированного положительного числа.

Из неравенства (5.5) следует, что, начиная с некоторого момента, величина ν становится достаточно большой и тогда для положительного числа M будет иметь место неравенство

$$M \leqslant 1 + O(\nu^{-1}) \tag{5.6}$$

где символ $O(\nu^{-1})$ обозначает, что некоторая величина имеет порядок ν^{-1}.

Трансцендентное уравнение для характеристических чисел будет иметь вид:

$$\operatorname{tg} \pi\nu = \frac{T_1(\nu)}{\nu - T_2(\nu)} \tag{5.7}$$

где

$$T_1(\nu) = k_1 - k_2 + \int_0^\pi \left(\cos \nu t + \frac{k_2}{\nu} \sin \nu t\right) q(t)\, S(t)\, dt$$

$$T_2(\nu) = -\frac{k_1 k_2}{\nu} + \int_0^\pi \left(\sin \nu t - \frac{k_2}{\nu} \cos \nu t\right) q(t)\, S(t)\, dt$$

В силу неравенства (5.6) в интервале $(0, \pi)$ следует, что $|T_1(\nu)|$ и $|T_2(\nu)|$ оба меньше конечных чисел, не зависимых от ν.

Так как $|S(\tau)| \leqslant M$, а $M \leqslant 1 + O(\nu^{-1})$, для функции $S(\tau)$ можно получить выражение

$$S(\tau) = \cos \nu\tau \{1 + O(\nu^{-2})\} + \sin \nu\tau \{\nu^{-1} Q(\tau) + O(\nu^{-2})\} \tag{5.8}$$

Можно показать, что характеристическое уравнение будет

$$\operatorname{tg} \pi\nu = \frac{k_0 + k_1 - k_2 + O(\nu^{-1})}{\nu + O(\nu^{-1})} \tag{5.9}$$

где

$$k_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t)\, dt, \qquad Q(\tau) = k_1 + \frac{1}{2} \int_0^\tau q(t)\, dt$$

Следовательно, для достаточно больших значений ν имеем

$$\nu = n + \frac{L}{2\nu} + O(\nu^{-2}) \quad \text{или} \quad \nu_n = n + \frac{L}{2n} + O(n^{-2}) \quad \left(L = \frac{2}{\pi}(k_0 + k_1 - k_2)\right)$$

Пренебрегая в последнем соотношении величинами порядка n^{-2} и выше, для собственных значений ν_n получим формулу

$$\nu_n = n + \frac{L}{2n} \tag{5.10}$$

Здесь L непосредственно не зависит от n.

6. Определение частоты. Заменяя в формуле (5.8) собственные значения ν_n их асимптотическими выражениями (5.10), получим с учетом членов до порядка n^{-1}

$$S_n(\tau) = \cos n\tau + \frac{R_n(\tau)}{n} \sin n\tau \tag{6.1}$$

где

$$R_n(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\tau q(t)\, dt + k_1 - \frac{1}{2} L\tau \tag{6.2}$$

Учитывая группу формул (4.4), найдем

$$L = K^2\left[\frac{1}{3}\frac{k^2l^2}{h_0}(h_1+\sqrt{h_1h_2}+h_2)-\frac{2\omega}{\sigma}kl+\frac{3h_0}{16\sqrt{h_1h_2}}\right] \tag{6.3}$$

Используя равенство (5.10), найдем

$$\nu^2 = n^2 + L + O(n^{-1}) \tag{6.4}$$

или [с учетом (6.3)] получим

$$\nu^2 = n^2 + K^2\left[\frac{1}{3}\frac{k^2l^2}{h_0}(h_1+\sqrt{h_1h_2}+h_2)-\frac{2\omega}{\sigma}kl+\frac{3h_0}{16\sqrt{h_1h_2}}\right]+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6.5}$$

Из (5.1) определим μ:

$$\mu = \frac{n^2}{K^2}+\frac{k^2l^2}{3h_0}(h_1+\sqrt{h_1h_2}+h_2)-\frac{2\omega}{\sigma}kl+\frac{3h_0}{16\sqrt{h_1h_2}}+\frac{1}{K^2}O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6.6}$$

Подставляя в это равенство выражение (3.8) для μ и (3.2) для $\varkappa^2$, найдем

$$\sigma^2 = 4\omega^2 + gk^2\frac{h_1+\sqrt{h_1h_2}+h_2}{3}+\frac{3g(h_2-h_1)^2}{16l^2\sqrt{h_1h_2}}+$$
$$+\frac{\pi^2 g}{l^2}\left(\frac{\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}}{2}\right)^2(n^2+O(n^{-1})) \tag{6.7}$$

Асимптотическое выражение собственных чисел ν_n позволило получить результат (6.7), дающий представление о целом спектре частот σ_n, соответствующих значениям n, начиная с достаточно большого.

Из соотношения (6.7) легко видеть, что период действия гармонического возмущения с частотой σ_n на плоский горизонтальный слой меньше полусуточного.

Теперь для каждой гармоники с частотой σ_n можно выписать величину амплитуды A_n и фазу ψ_n.

Амплитуда A_n и фаза ψ_n определятся так:

$$A_n(\tau) = \sqrt{1+\frac{R_n^2(\tau)}{n^2}}, \qquad \operatorname{tg}\psi_n = \frac{R_n(\tau)}{n}$$

Формула (6.7) является некоторым обобщением известной из теории длинных волн формулы Лагранжа.

Представим, что канал неподвижен, расстояние между стенками канала l беспредельно увеличивается и глубины у обоих берегов h_1 и h_2 выравнялись и составляют общую глубину h, тогда формула (6.7) превратится в такую:

$$\sigma^2 = ghk^2$$

что является формулой Лагранжа.

Поступила 5 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomson W. On Gravitational Oscillations of Rotating Water. Proc. Roy. Soc., X, 92, 1879 (Papers, IV, 141).
2. Poincaré H. Leçons de Mécanique céleste, T. III, Paris, 1910.
3. Rayleigh, Lord. On Waves. Phil. Mag., (6), 18, 1909.
4. Taylor D. J. Bristol Channel. Camb. Proc., XX, 1921.
5. Ламб Г. Гидродинамика. ГИТТЛ, 1947.
6. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ, 1936.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. М.— Л., 1951.
8. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ГОНТИ, 1939.