Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

К УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В. В. Румянцев

(Москва)

В работе [1] построением функций Ляпунова в виде связки известных интегралов уравнений возмущенного движения тяжелого твердого тела получены достаточные условия устойчивости перманентных вращений тела с одной неподвижной точкой. Эти условия позволили указать области устойчивых перманентных осей как в общем случае произвольного распределения масс тела, так и в ряде частных случаев, когда центр тяжести тела расположен в одной из главных плоскостей инерции, или на одной из главных осей инерции тела для его неподвижной точки, или когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения.

Недавно Н. Г. Четаев [2] построил знакоопределенный квадратичный первый интеграл уравнений в вариациях для лапласовой задачи трех тел, благодаря чему удалось решить вопрос о гироскопической стабилизации в этой задаче. В данной работе аналогичный интеграл строится и для уравнений в вариациях в задаче о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, исследуется устойчивость перманентных вращений в некоторых частных случаях распределения масс твердого тела и в окрестности устойчивого перманентного вращения находятся, следуя Ляпунову [3], траектории периодических возмущенных движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой.

1. Случай Лагранжа. Рассмотрим сначала устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела, распределение масс которого удовлетворяет условиям Лагранжа

$$A = B \neq C, \quad x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 > 0$$

Здесь, как обычно, A, B, C обозначают главные моменты инерции тела для его неподвижной точки O; x_0, y_0, z_0 — координаты его центра тяжести в системе осей координат, совмещенных с главными осями инерции тела для точки O; вес тела обозначим через P. Положение тела в пространстве можно определить углами Эйлера $\theta = q_1$, $\varphi = q_2$, $\psi = q_3$. Уравнения движения тела запишем в канонической форме

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где $p_i\,(i = 1, 2, 3)$ обозначают обобщенные импульсы, соответствующие углам Эйлера $q_i\,(i = 1, 2, 3)$, а функция Гамильтона

$$H = T - U =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{A}p_1^2 + \left(\frac{1}{C} + \frac{\cos^2\theta}{A\sin^2\theta}\right)p_2^2 - \frac{2\cos\theta}{A\sin^2\theta}p_2p_3 + \frac{1}{A\sin^2\theta}p_3^2\right\} + Pz_0\cos\theta \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) допускают интеграл энергии $H = \text{const}$, а также интегралы $p_2 = \text{const}$, $p_3 = \text{const}$, отвечающие циклическим координатам φ и ψ. Если в уравнения (1.1) вместо p_2 и p_3 подставить произвольные постоянные, то задача сведется к решению двух первых ($i=1$) уравнений системы (1.1), после интегрирования которых циклические координаты найдутся квадратурами

$$\varphi = \int \frac{\partial H}{\partial p_2} dt, \qquad \psi = \int \frac{\partial H}{\partial p_3} dt \tag{1.3}$$

Для отыскания перманентных вращений в указанных уравнениях следует положить $\theta=\theta_0$, $\theta'=0$, $p_1'=0$, в результате чего они примут вид:

$$p_1 = 0, \qquad \frac{1}{A\sin^3\theta_0}(p_{20}\cos\theta_0 - p_{30})(p_{20} - p_{30}\cos\theta_0) = -Pz_0\sin\theta_0 \tag{1.4}$$

причем $\theta_0 \neq 0, \pi$. Вводя обозначения

$$\alpha = \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \qquad \beta = \sin\theta_0\cos\varphi_0, \qquad \gamma = \cos\theta_0 \tag{1.5}$$

и учитывая, что величины обобщенных импульсов p_2 и p_3 для рассматриваемого движения суть

$$p_{20} = C\omega\gamma, \qquad p_{30} = [A(\alpha^2+\beta^2) + C\gamma^2]\,\omega \tag{1.6}$$

где ω — постоянная угловая скорость вращения вокруг вертикальной перманентной оси, второе из уравнений (1.4) можно переписать в виде

$$(C-A)\,\omega^2\gamma = Pz_0 \tag{1.7}$$

Таким образом очевидно, что в случае Лагранжа перманентной осью может служить любая прямая, проходящая в теле через неподвижную точку и поставленная вертикально, для которой косинус угла нутации $\gamma > 0$ в случае $C > A$ или $\gamma < 0$ в случае $A > C$; соответствующая угловая скорость ω определяется при этом из уравнения (1.7). Известно также, что ось Oz может быть перманентной осью при любом значении угловой скорости вращения.

Примем вращение вокруг некоторой перманентной оси, для которой $\theta = \theta_0\ (\theta_0 \neq 0, \pi)$, за невозмущенное движение тела, полагая в возмущенном движении $\theta = \theta_0 + \xi$, $p_1 = \eta$, $p_2 = p_{20}$, $p_3 = p_{30}$. Уравнения возмущенного движения тела допускают, как легко видеть, интеграл

$$H - H_0 = \frac{1}{2A}\eta^2 + \frac{1}{2}\Big[\frac{1+2\cos^2\theta_0}{A\sin^4\theta_0}p_{20}^2 - (5+\cos^2\theta_0)\frac{\cos\theta_0}{A\sin^4\theta_0}p_{20}p_{30} + \\ + \frac{1+2\cos^2\theta_0}{A\sin^4\theta_0}p_{30}^2 - Pz_0\cos\theta_0\Big]\xi^2 + \ldots = \mathrm{const} \tag{1.8}$$

Используя равенства (1.6) и (1.7), коэффициент при ξ^2 в выражении (1.8) можно представить в виде

$$\tfrac{1}{2}\,\omega^2\,[A^2\sin^2\theta_0 + (C-2A)^2\cos^2\theta_0]$$

Очевидно, функция $H - H_0$ является определенно-положительной функцией переменных ξ и η, и согласно теореме Рауса [4] рассматриваемое невозмущенное движение устойчиво по отношению к углу нутации θ и обобщенному импульсу p_1 при условии, что постоянные p_{20} и p_{30} не возмущаются. Последнее условие, однако, здесь не существенно: еще Ляпунов [5] показал, что при условии непрерывности интегралов уравнений возмущенного движения теорема Рауса дает достаточные условия безусловной устойчивости. В этом нетрудно убедиться, если построить для уравнений возмущенного движения функцию Ляпунова в форме связки интегралов, соответствующих циклическим переменным, и интеграла энергии.

Итак, показано, что в случае Лагранжа перманентное вращение вокруг любой допустимой оси ($\theta_0 \neq 0, \pi$) устойчиво по отношению к переменным θ, p_1, p_2, p_3, но неустойчиво по отношению к углу прецессии ψ, — последнее очевидно на основании второго из уравнений (1.3), так как значение производной $(\partial H/\partial p_3)_0 \neq 0$.

Что же касается перманентного вращения твердого тела вокруг оси Oz, то, как известно[4], необходимым и достаточным условием устойчивости такого вращения является неравенство Майевского

$$C^2\omega^2 - 4APz_0 > 0$$

Необходимость этого условия обычно устанавливается рассмотрением соответствующего характеристического уравнения. Но это легко сделать и прямым методом. С этой целью, сохраняя обозначения работы[1], рассмотрим функцию

$$V = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \tag{1.9}$$

и найдем производную по времени от нее в силу уравнений возмущенного движения (2.3)—(2.4) работы[1], в которых надо положить $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$. С точностью до членов второго порядка малости будем иметь

$$V' = \xi_1^2 - \frac{C}{A}\omega\xi_1\eta_1 + \frac{Pz_0}{A}\eta_1^2 + \xi_2^2 - \frac{C}{A}\omega\xi_2\eta_2 + \frac{Pz_0}{A}\eta_2^2 + \ldots$$

При условии

$$C^2\omega^2 - 4APz_0 < 0 \tag{1.10}$$

функция V' будет определенно-положительной по отношению к переменным ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, в то время как функция V может принимать положительные значения. Согласно теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости при выполнении условия (1.10) невозмущенное перманентное вращение вокруг оси Oz с угловой скоростью ω неустойчиво по отношению к переменным p, q, γ_1, γ_2.

Отметим, что условия знакоопределенности функции Гамильтона могут служить достаточными условиями устойчивости перманентных вращений твердого тела и в общем случае произвольного распределения масс в теле.

2. Случай С. В. Ковалевской. Предположим, что $A = B = 2C$, $x_0 > 0$, $y_0 = z_0 = 0$, и построим функцию Лагранжа

$$L = T + U = \tfrac{1}{2}C\left[2(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) + (\varphi' + \psi'\cos\theta)^2\right] - Px_0\sin\theta\sin\varphi \tag{2.1}$$

Циклической координате ψ отвечает первый интеграл уравнений движения в форме Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \psi'} \equiv C\left[(1 + \sin^2\theta)\psi' + \varphi'\cos\theta\right] = C\beta_1 = \text{const}$$

Отсюда

$$\psi' = \frac{\beta_1 - \varphi'\cos\theta}{1 + \sin^2\theta}$$

Игнорируя циклическую координату, находим функцию Рауса

$$R = L - C\beta_1\psi' =$$

$$= \frac{C}{2}\left[2\theta'^2 + \frac{2\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}\varphi'^2 + \frac{2\beta_1\varphi'\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\right] - \left(Px_0\sin\theta\sin\varphi + \frac{C\beta_1^2}{2(1+\sin^2\theta)}\right) \quad (2.2)$$

Уравнения движения тяжелого твердого тела в случае Ковалевской допускают при некоторых значениях постоянной β_1 частное решение

$$\theta = \theta_0, \qquad \varphi = \varphi_0, \qquad \theta' = \varphi' = 0 \quad (2.3)$$

описывающее перманентное вращение вокруг вертикали. Постоянные θ_0, φ_0 находятся из уравнений

$$Px_0\cos\theta_0\sin\varphi_0 - C\beta_1^2\frac{\sin\theta_0\cos\theta_0}{(1+\sin^2\theta_0)^2} = 0, \qquad Px_0\sin\theta_0\cos\varphi_0 = 0 \quad (2.4)$$

Перманентной осью, таким образом, может быть любая прямая, проходящая через неподвижную точку в плоскости Oxz $(\beta = 0,\ \varphi_0 = {}^1/_2\pi)$, для которой $\alpha = \sin\theta_0 > 0$. Если величину β_1 выразить через постоянную угловую скорость вращения ω:

$$\beta_1 = (1+\sin^2\theta_0)\,\omega$$

то соответствующая угловая скорость вращения ω определяется первым из уравнений (2.4), принимающим вид:

$$C\omega^2\alpha = Px_0 \quad (2.5)$$

Исследуем устойчивость перманентного вращения (2.3), полагая в возмущенном движении

$$\theta = \theta_0 + x_1, \qquad \varphi = {}^1/_2\pi + x_2, \qquad \theta' = x_1', \qquad \varphi' = x_2'$$

Разлагая функцию R в ряд Тейлора в окрестности невозмущенного движения (2.3), будем иметь с точностью до членов второго порядка малости

$$R = R_0 + \frac{1}{2}C\left\{2x_1'^2 + \frac{2\sin^2\theta_0}{1+\sin^2\theta_0}x_2'^2 + 2\omega\cos\theta_0 x_2' - \right.$$

$$\left. - 2\omega\frac{(2+\cos^2\theta_0)\sin\theta_0}{1+\sin^2\theta_0}x_1x_2' + \frac{C\omega^2\cos^2\theta_0}{1+\sin^2\theta_0}(1-3\sin^2\theta_0)x_1^2 + \omega^2\sin^2\theta_0 x_2^2\right\} + \ldots$$

Уравнения в вариациях для возмущенного движения имеют вид:

$$2x_1'' + kx_2' - ax_1 = 0, \qquad 2cx_2'' - kx_1' - bx_2 = 0 \quad (2.6)$$

Здесь

$$a = \frac{1-3\sin^2\theta_0}{1+\sin^2\theta_0}\omega^2\cos^2\theta_0, \qquad b = \omega^2\sin^2\theta_0$$

$$c = \frac{\sin^2\theta_0}{1+\sin^2\theta_0}, \qquad k = \frac{2+\cos^2\theta_0}{1+\sin^2\theta_0}\omega\sin\theta_0 \quad (2.7)$$

Умножая уравнения (2.6) на x_1', x_2' соответственно и складывая их, получим в результате интегрирования первое приближение интеграла энергии для полных уравнений возмущенного движения:

$$H - H_0 = \frac{1}{2}C\left\{2x_1'^2 + 2cx_2'^2 - ax_1^2 - bx_2^2\right\} = \mathrm{const} \quad (2.8)$$

Этот интеграл не является знакоопределенным по отношению к рассматриваемым переменным, ввиду чего теорема Рауса здесь неприменима. Более того, так как отсутствие максимума силовой функции

$$U = \tfrac{1}{2} C(ax_1^2 + bx_2^2) + \ldots \tag{2.9}$$

при $x_1 = x_2 = 0$ обнаруживается членами второго порядка без необходимости рассматривать члены высших порядков, то согласно данному Ляпуновым обращению теоремы Лагранжа перманентные вращения в рассматриваемом случае не имеют вековой устойчивости. При $a < 0$, или, что то же, при

$$\alpha^2 = \sin^2 \theta_0 > \tfrac{1}{3}$$

степень неустойчивости равна единице и согласно теореме Кельвина[4] гироскопическая стабилизация в этом случае невозможна[1]. При

$$\sin^2 \theta_0 < \tfrac{1}{3} \tag{2.10}$$

коэффициент $a > 0$, степень неустойчивости становится четной и появляется возможность гироскопической стабилизации. Если таковая в действительности имеет место, то согласно фундаментальной теореме Н. Г. Четаева[4] уравнения в вариациях (2.6) имеют знакоопределенный квадратичный интеграл. Последний можно найти в связке первых интегралов. В самом деле, легко видеть, что уравнения (2.6) допускают первый интеграл

$$\begin{aligned}\Gamma = 4(bx_1'x_2 - acx_1x_2') + k(ax_1^2 + bx_2^2) + \\ + \frac{b - ac}{k}(2x_1'^2 - 2cx_2'^2 + bx_2^2 - ax_1^2) = \text{const}\end{aligned} \tag{2.11}$$

аналогичный интегралу Н. Г. Четаева в задаче трех тел[2].

Составим квадратичный интеграл уравнений в вариациях (2.6) в форме связки интегралов (2.8) и (2.11):

$$\begin{aligned}V = \frac{k}{C}(H - H_0) + \Gamma = \frac{k^2 + 2(b - ac)}{k} x_1'^2 + 4bx_1'x_2 + \frac{k^2 + 2(b - ac)}{2k} bx_2^2 + \\ + \frac{k^2 - 2(b - ac)}{k} cx_2'^2 - 4acx_1x_2' + \frac{k^2 - 2(b - ac)}{2k} ax_1^2\end{aligned} \tag{2.12}$$

Этот интеграл будет определенно-положительным при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned}&1)\quad k^2 + 2(b - ac) > 0, \qquad &&2)\quad k^2 - 2(b - ac) > 0 \\ &3)\quad [k^2 - 2(b + ac)]^2 - 16abc > 0, \qquad &&4)\quad a > 0\end{aligned} \tag{2.13}$$

Выписывая эти неравенства в явном виде с учетом обозначений (2.7), можно убедиться, что первое и третье из них выполняются при любых возможных значениях $\sin^2 \theta_0$, в то время как второе и четвертое из условий (2.13) выполняются при $\sin^2 \theta_0 < {}^3/_5$ и $\sin^2 \theta_0 < {}^1/_3$ соответственно.

Таким образом, неравенство (2.10) является условием гироскопической устойчивости перманентных вращений в случае С. В. Ковалевской.

Любопытно, что характеристическое уравнение для системы (2.6)

$$\Delta(\sigma) = 4c\sigma^4 - 2\left(b + ac - \tfrac{1}{2}k^2\right)\sigma^2 + ab = 0 \tag{2.14}$$

имеет чисто мнимые корни $\pm \sigma_i \sqrt{-1}$ $(i = 1, 2)$ лишь при выполнении условия (2.10), которое является, следовательно, и необходимым условием устойчивости перманентных вращений.

Ляпунов показал, что если характеристическое уравнение для канонической системы имеет только чисто мнимые корни $\pm \sigma_j \sqrt{-1}$ $(j=1, \ldots k)$, то всякий раз, когда числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ таковы, что ни одно из отношений, которые можно из них составить, комбинируя их по два, не представляет целого числа, для канонической системы найдется k периодических решений, содержащих по две произвольные постоянные каждое [3]. Предполагая в рассматриваемой задаче выполненными указанные условия, названные периодические решения можно найти, следуя Ляпунову, интегрированием уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=f(x_1,\ x_2), \qquad \frac{dx_2}{dt}=\varphi(x_1,\ x_2) \tag{2.15}$$

правые части которых определяются как голоморфные функции переменных x_1 и x_2, удовлетворяющие системе уравнений

$$2\left(f\frac{\partial f}{\partial x_1}+\varphi\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)+k\varphi+\ldots=\frac{\partial U}{\partial x_1},\ 2c\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)-kf+\ldots=\frac{\partial U}{\partial x_2}$$

при двух условиях: чтобы эти функции уничтожались при $x_1=x_2=0$ и чтобы в членах первого измерения их разложений

$$f=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots, \qquad \varphi=\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\ldots \tag{2.16}$$

для коэффициентов α_1 и γ_2 выполнялось соотношение $\alpha_1+\gamma_2=0$.

Для вычисления коэффициентов α_i, γ_i $(i=1,\ 2)$ получаем систему

$$\begin{aligned} &2(\alpha_1^2+\gamma_1\alpha_2)+k\gamma_1=a, && 2c(\alpha_1\gamma_1+\gamma_1\gamma_2)-k\alpha_1=0\\ &2(\alpha_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_2)+k\gamma_2=0, && 2c(\alpha_2\gamma_1+\gamma_2^2)-k\alpha_2=b \end{aligned} \tag{2.17}$$

которая будет обладать двумя решениями, удовлетворяющими условию $\alpha_1+\gamma_2=0$. Эти решения найдем по формулам

$$\alpha_1=0, \qquad \alpha_2=-\frac{\lambda^2c+b}{k} \qquad \gamma_1=\frac{\lambda^2+a}{k} \qquad \gamma_2=0 \tag{2.18}$$

заменяя λ^2 последовательно каждым из корней λ_1^2 и λ_2^2 уравнения

$$c\lambda^4+\lambda^2\left(ac+b-\tfrac{1}{2}k^2\right)+ab=0 \tag{2.19}$$

Очевидно, при условиях (2.13) λ_1^2 и λ_2^2 положительны. Каждому из этих решений будет соответствовать по одной паре функций f и φ и, следовательно, по одному периодическому решению уравнений возмущенного движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой.

Если переменные x_1 и x_2 рассматривать как координаты точки, движущейся в плоскости, то получим два периодических движения, траектория в каждом из которых определяется уравнением

$$C(f^2+c\varphi^2)-U+\ldots=\text{const} \tag{2.20}$$

3. Устойчивость вращения тела вокруг одной из главных осей инерции, проходящей через центр тяжести тела. Такая ось, будучи вертикальной, может быть перманентной осью при произвольной постоянной угловой скорости вращения ω. Для определенности предположим, что $x_0\neq0$, $y_0=z_0=0$, причем $A\neq B\neq C\neq A$.

Пусть в возмущенном движении

$$\theta=\tfrac{1}{2}\pi+x_1, \qquad \varphi=\tfrac{1}{2}\pi+x_2, \qquad \theta'=x_1', \qquad \varphi'=x_2'$$

Тогда уравнения в вариациях, как легко видеть, имеют вид:

$$Bx_1'' + kx_2' - ax_1 = 0, \qquad Cx_2'' - kx_1' - bx_2 = 0 \tag{3.1}$$

Здесь

$$a = Px_0 - (A - C)\omega^2, \quad b = Px_0 - (A - B)\omega^2, \quad k = (B + C - A)\omega \tag{3.2}$$

Умножая уравнения (3.1) на x_1', x_2' соответственно и складывая их, получаем после интегрирования первое приближение интеграла энергии

$$H - H_0 = \tfrac{1}{2}(Bx_1'^2 + Cx_2'^2 - ax_1^2 - bx_2^2) = \text{const} \tag{3.3}$$

В случае $a < 0$ и $b < 0$, или, иначе, при

$$(A - C)\omega^2 > Px_0, \qquad (A - B)\omega^2 > Px_0 \tag{3.4}$$

невозмущенное движение устойчиво[1] согласно теореме Рауса. При

$$(A - C)\omega^2 < Px_0, \qquad (A - B)\omega^2 > Px_0 \qquad (a > 0, \ b < 0)$$

или при

$$(A - C)\omega^2 > Px_0, \qquad (A - B)\omega^2 < Px_0 \qquad (a < 0, \ b > 0)$$

степень неустойчивости равна единице, и невозмущенное движение неустойчиво[7]. В случае $a > 0$, $b > 0$, т. е. при

$$(A - C)\omega^2 < Px_0, \qquad (A - B)\omega^2 < Px_0 \tag{3.5}$$

степень неустойчивости равна двум и согласно теореме Кельвина возможна гироскопическая стабилизация. Если таковая в действительности будет иметь место, то уравнения в вариациях (3.1) имеют согласно теореме Н. Г. Четаева знакоопределенный квадратичный интеграл. В самом деле, уравнения (3.1) допускают первый интеграл

$$\Gamma = 2(Bbx_1'x_2 - Cax_1x_2') + k(ax_1^2 + bx_2^2) - \\ - \frac{Bb - Ca}{2k}(Cx_2'^2 - Bx_1'^2 + ax_1^2 - bx_2^2) = \text{const} \tag{3.6}$$

аналогичный интегралу Н. Г. Четаева[2]. Рассмотрим связку интегралов (3.3) и (3.6):

$$V = k(H - H_0) + \Gamma = \frac{k^2 + Bb - Ca}{2k} Bx_1'^2 + 2Bbx_2x_1' + \frac{k^2 + Bb - Ca}{2k} bx_2^2 + \\ + \frac{k^2 + Ca - Bb}{2k} Cx_2'^2 - 2Cax_1x_2' + \frac{k^2 - Bb + Ca}{2k} ax_1^2 \tag{3.7}$$

Функция V будет определенно-положительной при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} &1) \quad k^2 + Bb - Ca > 0, \qquad &&2) \quad \frac{b}{4k^2}[(k^2 - Bb - Ca)^2 - 4BCab] > 0 \\ &3) \quad k^2 - Bb + Ca > 0, \qquad &&4) \quad \frac{a}{4k^2}[(k^2 - Bb - Ca)^2 - 4BCab] > 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

В случае $a > 0$, $b > 0$ второе и четвертое из этих условий можно заменить одним:

$$(k^2 - Bb - Ca)^2 - 4BCab > 0 \tag{3.9}$$

при выполнении которого первое и третье из условий (3.8) также будут удовлетворены. Учитывая обозначения (3.2), неравенство (3.9) можно преобразовать к условию

$$\omega^2 > \frac{4BC - AB - AC \mp 2\sqrt{BC(2B - A)(2C - A)}}{A^2(B + C - A)} Px_0 \tag{3.10}$$

совпадающему с необходимым условием устойчивости[6] в случае (3.5).

Будет ли в действительности иметь место гироскопическая устойчивость, зависит от того, продолжаем или нет интеграл (3.6) уравнений в вариациях в интеграл для полных уравнений возмущенного движения. Решение этого вопроса, пока открытого, имеет существенное значение для задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

В случае, когда характеристическое уравнение для системы (3.1) имеет чисто мнимые корни $\pm\sigma_i\sqrt{-1}$ $(i=1,2)$, причем σ_1/σ_2 или σ_2/σ_1 не представляют целого числа, интегрированием уравнений вида (2.15) можно, следуя Ляпунову, найти периодические решения уравнений возмущенного движения также и в рассматриваемом случае. Голоморфные функции $f(x_1, x_2)$ и $\varphi(x_1, x_2)$ должны удовлетворять уравнениям

$$B\left(f\frac{\partial f}{\partial x_1}+\varphi\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)+k\varphi+\ldots=\frac{\partial U}{\partial x_1}$$

$$C\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)-kf+\ldots=\frac{\partial U}{\partial x_2}$$

а также двум условиям, указанным в п. 2. Здесь, как и выше, U обозначает измененную силовую функцию. Для вычисления коэффициентов в выражениях вида (2.16) для функций f и φ получаем систему

$$\begin{aligned} &B(\alpha_1^2+\gamma_1\alpha_2)+k\gamma_1=a, \qquad &&C(\alpha_1\gamma_1+\gamma_1\gamma_2)-k\alpha_1=0 \\ &B(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\gamma_2)+k\gamma_2=0, \qquad &&C(\alpha_2\gamma_1+\gamma_2^2)-k\alpha_2=b \end{aligned} \tag{3.11}$$

которая будет иметь два решения, удовлетворяющих условию $\alpha_1+\gamma_2=0$. Эти решения определяются по формулам

$$\alpha_1=0, \qquad \alpha_2=-\frac{C\lambda^2+b}{k}, \qquad \gamma_1=\frac{B\lambda^2+a}{k}, \qquad \gamma_2=0 \tag{3.12}$$

в которых λ^2 заменяется последовательно каждым из корней λ_1^2 и λ_2^2 уравнения

$$BC\lambda^4+(Bb+Ca-k^2)\lambda^2+ab=0$$

Каждому из этих решений будет соответствовать по одному периодическому решению уравнений возмущенного движения, траектории изображающей точки (x_1, x_2) в которых определяются уравнением

$$Bf^2+C\varphi^2-2U+\ldots=\mathrm{const}$$

Поступила 15 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.
2. Четаев Н. Г. О некоторых задачах об устойчивости движения в механике. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. II, 1956.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
5. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости Собр. соч., т. I, 1954.
6. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. ИЛ, 1952.