Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОЦЕНКА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

М. Г. Слободянский
(Москва)

Рассматривается задача об определении оценок для собственных значений в некоторых линейных краевых задачах для дифференциальных уравнений.

Способ получения указанных оценок основан на введении некоторых «близких» операторов подобно тому, как это сделано в работе [1] для самосопряженного оператора (там же приведена и библиография вопроса).

§ 1. Некоторые оценки для собственных значений несамосопряженного оператора. 1°. Пусть требуется найти собственные значения уравнения

$$A_\lambda u = (A - \lambda E)\, u = 0 \tag{1.1}$$

где A — оператор в гильбертовом пространстве H, а E — тождественный оператор. Область определения оператора A обозначим через A_D.

Положим, что $\lambda = 0$ не есть собственное значение оператора A и что все собственные значения оператора A — конечной кратности.

Положим далее, что оператор A^{-1} — вполне непрерывный, тогда из (1.1) имеем

$$u - \lambda A^{-1} u = 0, \qquad A^{-1} u - \mu u = 0 \qquad \left(\mu = \frac{1}{\lambda}\right) \tag{1.2}$$

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим уравнение

$$A_1 u - \lambda u = 0, \qquad A_1^{-1} u - \mu u = 0 \qquad \left(\mu = \frac{1}{\lambda}\right) \tag{1.3}$$

и также положим, что оператор A_1^{-1} — вполне непрерывный в гильбертовом пространстве H.

Пусть μ_1 — собственное значение кратности m оператора A_1^{-1} и в некоторой области S_1, ограниченной контуром C_1 в плоскости комплексной переменной μ, оператор A_1^{-1} не имеет других собственных значений, кроме μ_1.

На основании одной теоремы С. Надь [2], если T и T_1 — вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве и если

$$\|P - P_1\| < 1 \tag{1.4}$$

где

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} R_\mu d\mu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} (T - \mu E)^{-1} d\mu$$

$$P_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} R_{1\mu} d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} (T_1 - \mu E)^{-1}\, d\mu \tag{1.5}$$

(здесь R_μ, $R_{1\mu}$ — резольвенты операторов T и T_1 соответственно, C_1 — контур, ограничивающий область S_1 плоскости комплексной переменной μ), то внутри области S_1 число собственных значений оператора T равно числу собственных значений оператора T_1, причем каждое собственное значение считается столько раз, какова его кратность. При этом полагается, что все точки контура C_1 являются регулярными точками операторов T и T_1, т. е. контур лежит в резольвентных множествах операторов T и T_1. Применим указанную теорему к операторам A^{-1} и A_1^{-1}.

Для этого, подставляя (1.5) в (1.4), заменяя T и T_1 операторами A^{-1} и A_1^{-1} соответственно, найдем, что при выполнении условия (1.6)

$$\|P-P_1\|=\|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}[(A^{-1}-\mu E)^{-1}-(A_1^{-1}-\mu E)^{-1}]\,d\mu\|<1 \tag{1.6}$$

оператор A^{-1} имеет m собственных значений в области S_1. Если область S_1 конформно отображается в области S, ограниченной контуром C в плоскости комплексной переменной $\lambda=\mu^{-1}$, то в области S оператор A имеет m собственных значений и оператор A_1^{-1} имеет в той же области собственное значение $\lambda_1=\mu_1^{-1}$ кратности m, причем вместо условия (1.6), заменяя μ через λ^{-1} и принимая во внимание, что

$$(\mu B)^{-1}=\mu^{-1}B^{-1}, \qquad d\mu=-\lambda^{-2}d\lambda$$

получим

$$\|P-P_1\|=\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}[(\lambda^2A^{-1}-\lambda E)^{-1}-(\lambda^2A_1^{-1}-\lambda E)^{-1}]\,d\lambda\|<1 \tag{1.7}$$

Преобразуем теперь выражение, стоящее под знаком интеграла в (1.7), следующим образом:

$$(\lambda^2A^{-1}-\lambda E)^{-1}-(\lambda^2A_1^{-1}-\lambda E)^{-1}=(\lambda A^{-1}-E)^{-1}(A^{-1}-A_1^{-1})(\lambda A_1^{-1}-E)^{-1}=$$
$$=(A-\lambda E)^{-1}-(A_1-\lambda E)^{-1} \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.7), найдем вместо (1.7)

$$\|P-P_1\|=\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}[(A-\lambda E)^{-1}-(A_1-\lambda E)^{-1}]\,d\lambda\|<1 \tag{1.9}$$

при этом полагаем, что контур C лежит в резольвентном множестве операторов A и A_1. Далее имеем

$$\|(A-\lambda E)^{-1}\|-\|(A_1-\lambda E)^{-1}\|\leqslant\|(A-\lambda E)^{-1}-(A_1-\lambda E)^{-1}\|=$$
$$=\|(A-\lambda E)^{-1}(A-A_1)(A_1-\lambda E)^{-1}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|(A-\lambda E)^{-1}\|\|(A-A_1)(A_1-\lambda E)^{-1}\| \tag{1.10}$$

Отсюда

$$\|(A-\lambda E)^{-1}\|<\frac{N}{1-M} \tag{1.11}$$

$N=\|(A_1-\lambda E)^{-1}\|$, $M=\|(A-A_1)(A_1-\lambda E)^{-1}\|=\|(A-\lambda E)(A_1-\lambda E)^{-1}-E\|$ при условии

$$1-M>0 \tag{1.12}$$

Подставляя (1.11) в правую часть (1.10), найдем

$$\|(A-\lambda E)^{-1}-(A_1-\lambda E)^{-1}\| \leqslant \frac{NM}{1-M} \tag{1.13}$$

при выполнении условия (1.12).

Если выполняется (1.13), то из (1.9) следует, что при условии

$$\|P-P_1\| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \|(A-\lambda E)^{-1}-(A_1-\lambda E)^{-1}\|\,|d\lambda| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{NM}{1-M}\,|d\lambda| < 1 \tag{1.14}$$

оператор A имеет m собственных значений в области, ограниченной контуром C.

Если в качестве контура C взять окружность радиуса ρ с центром в точке $\lambda_1=\mu_1^{-1}$, т. е. если область S есть круг $|\lambda-\lambda_1|\leqslant\rho$ и если ближайшее к λ_1 собственное значение оператора A_1 отстоит от λ_1 на расстоянии, большем 2ρ, то на окружности $|\lambda-\lambda_1|=\rho$ имеем

$$N_{\max}=\max\|(A_1-\lambda E)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\rho_1} \tag{1.15}$$

где ρ_1 можно определить как наименьшее собственное значение самосопряженного оператора $(A_1-\lambda E)(A_1{}^*-\bar{\lambda} E)$. Пусть $M_{\max}$ — максимальное значение M на окружности $|\lambda-\lambda_1|=\rho$. Тогда из (1.14) следует, что при выполнении условий

$$\|P-P_1\| < \frac{M_{\max}\rho}{\rho_1(1-M_{\max})} < 1, \qquad 1-M_{\max}>0 \tag{1.16}$$

или при выполнении условия, вытекающего из (1.16):

$$M_{\max} < \frac{\rho_1}{\rho+\rho_1} \tag{1.17}$$

оператор A будет иметь m собственных значений в круге $|\lambda-\lambda_1|\leqslant\rho$.

2°. В частном случае, когда собственное значение μ_1 оператора T_1 есть простое собственное значение, можно указать оценку для величины $\|P-P_1\|$, выраженную через собственные функции φ_1 и $\varphi_1{}^*$ операторов T_1 и ему сопряженного $T_1{}^*$ соответственно (см. цитированную выше работу С. Надь [2]). Простая оценка для собственного значения оператора T в рассматриваемом случае получена М. К. Гавуриным [3].

Если φ_1 и $\varphi_1{}^*$ — нормированные собственные функции 1-го и 2-го уравнений (1.18)

$$T_1\varphi_1-\mu_1\varphi_1=0, \quad T_1{}^*\varphi_1{}^*-\bar{\mu}_1\varphi_1{}^*=0, \quad \|\varphi_1\|=\|\varphi_1{}^*\|=1 \tag{1.18}$$

соответственно и если μ_1 — простое собственное значение (т. е. кратность $m=1$), то при выполнении условия

$$s=\|T-T_1\|\|R\| < S=\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\gamma^2}\right), \quad \gamma=|(\varphi_1,\varphi_1{}^*)| \leqslant \|\varphi_1\|\|\varphi_1{}^*\|=1 \tag{1.19}$$

где оператор $R=(T_1-\mu_1E)^{-1}$ рассматривается на ортогональном дополнении φ_1, оператор T имеет простое собственное значение μ_0, причем

$$|\mu_0-\mu_1| \leqslant \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\gamma^2}\right)\|T-T_1\| \tag{1.20}$$

и в круге

$$|\mu-\mu_1|\leqslant\frac{\gamma}{\|R\|}-\frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\|T-T_1\| \tag{1.21}$$

нет других собственных значений, кроме μ_0.

Подставим теперь в (1.18) — (1.21) вместо T и T_1 операторы A^{-1} и A_1^{-1} соответственно.

Далее имеем аналогично (1.13)

$$\|A^{-1}-A_1^{-1}\|\leqslant\frac{N_0M_0}{1-M_0} \tag{1.22}$$

$$N_0=\|A_1^{-1}\|,\quad M_0=\|(A-A_1)A_1^{-1}\|=\|AA_1^{-1}-E\|$$

Из (1.19) и (1.22) найдем, что при выполнении условия

$$s=\frac{N_0M_0}{1-M_0}\|R\|<S \tag{1.23}$$

или, иначе, при выполнении следующего условия, вытекающего из (1.23):

$$M_0=\|(A-A_1)A_1^{-1}\|\leqslant\frac{S}{S+N_0\|R\|} \tag{1.24}$$

оператор A^{-1} имеет простое собственное значение μ_0, причем имеют место неравенства (1.20) — (1.21), если вместо $\|T-T_1\|=\|A^{-1}-A_1^{-1}\|$ подставить правую часть (1.22).

Примечание. Может оказаться более выгодным заменить в (1.21) — (1.24) оператор T оператором $A_{1\lambda^*}^{-1}=(A_1-\lambda^*E)^{-1}$, где λ^* принадлежит резольвентному множеству оператора A_1.

3°. Введем теперь вполне непрерывный оператор A_2^{-1} и положим

$$A_2^{-1}=A_0+A_{02} \tag{1.25}$$

где A_0 — вполне непрерывный оператор, A_{02} — вырожденный оператор.

В качестве оператора A_1^{-1} также можно взять вырожденный оператор. Тогда неравенство (1.10) можно заменить следующим:

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda E)^{-1}-(A_1-\lambda E)^{-1}\|\leqslant\|(A-\lambda E)^{-1}-A_2^{-1}\|&+\\+\|A_2^{-1}-(A_1-\lambda E)^{-1}\|&\end{aligned} \tag{1.26}$$

Применяя далее к первому члену правой части (1.26) неравенства (1.11) — (1.13), заменяя оператор $(A_1-\lambda E)^{-1}$ оператором A_2^{-1}, получим

$$\|(A-\lambda E)^{-1}-(A_1-\lambda E)^{-1}\|\leqslant\frac{N_2M_2}{1-M_2}+L \tag{1.27}$$

при условии

$$1-M_2>0 \tag{1.28}$$

где

$$N_2=\|A_2^{-1}\|=\|A_0+A_{02}\|,\qquad M_2=\|(A-\lambda E)(A_0+A_{02})-E\|$$

$$L=\|A_2^{-1}-(A_1-\quad E)^{-1}\|=\|A_0+A_{02}-(A_1-\lambda E)^{-1}\| \tag{1.29}$$

Из (1.14) с учетом (1.27) теперь найдем, что при выполнении условия

$$\| P - P_1 \| < \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\frac{N_2 M_2}{1 - M_2} + L \right) | d\lambda | = \alpha < 1 \tag{1.30}$$

оператор A имеет m собственных значений в области S, ограниченной контуром C.

Примечание. Если можно определить собственные значения оператора A_2, то можно положить $A_1 - \lambda E = A_2$ и тогда формула (1.30) совпадает с (1.14).

Возьмем теперь выроржденные операторы $(A_1 - \lambda E)^{-1}$ и A_{02} в виде

$$(A_1 - \lambda E)^{-1} f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b'_{kr}(\lambda)(f, \varphi_r)\varphi_k \tag{1.31}$$

$$A_{02} f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_{kr}(\lambda)(f, \varphi_r)\varphi_k \tag{1.32}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — элементы, принадлежащие области определения A_D оператора A и b'_{kr}, b_{kr} — коэффициенты, зависящие от λ.

Оператор (1.31) можно построить, например, методом Галеркина следующим образом.

Составим уравнения Галеркина для определения приближенного решения уравнения

$$Au - \lambda E u = f \tag{1.33}$$

Полагая

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(\lambda)\varphi_k$$

где u_n — приближенное решение уравнения (1.33), получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k, \varphi_r) - \lambda(\varphi_k, \varphi_r) = (f, \varphi_r) \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

Откуда

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(\lambda)\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_{kr}(\lambda)(f, \varphi_r)\varphi_k \tag{1.34}$$

В качестве оператора $(A_1 - \lambda E)^{-1} f$ примем правую часть (1.34), т. е. положим

$$u_n = (A_1 - \lambda E)^{-1} f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_{kr}(\lambda)(f, \varphi_r)\varphi_k$$

Собственные значения оператора $A_1 - \lambda E$, очевидно, совпадают с собственными значениями системы уравнений Галеркина для уравнения (1.33):

$$\sum_{k=1}^{n} c_k [(A\varphi_k, \varphi_r) - \lambda(\varphi_k, \varphi_r)] = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

Далее, считая оператор A_0 известным (вопрос о построении оператора A_0 должен быть рассмотрен отдельно, см. § 2 настоящей работы), можно построить вырожденный оператор A_{02} по формуле (1.32), подбирая коэффициенты b_{kr}, исходя из условия, чтобы найденная оценка для величины

$$\int_C L \, |d\lambda| = \int_C \| A_2^{-1} - (A_1 - \lambda E)^{-1} \| \, |d\lambda|$$

была наименьшей.

Другой способ определения коэффициентов b'_{kr} и b_{kr}, входящих в (1.31) — (1.34), состоит в том, чтобы полученная оценка для величины α, входящей в (1.30), была наименьшей. Однако при этом получается сложная система уравнений для определения b_{kr} и b'_{kr}.

Поэтому можно поступить следующим образом. Коэффициенты b_{kr} и b'_{kr} будем искать из условий, чтобы найденные оценки для величин

$$\int\limits_C L\,|d\lambda| = \int\limits_C \| A_2^{-1} - (A_1 - \lambda E)^{-1} \|\,|d\lambda|$$

$$\int\limits_C M_2\,|d\lambda| = \int\limits_C \|(A - \lambda E)(A_0 + A_{02}) - E\|\,|d\lambda| \tag{1.35}$$

были наименьшими.

Аналогично при использовании оценок (1.20) — (1.24) вводим наряду с оператором A_1^{-1} оператор $A_2^{-1} = A_0 + A_{02}$ и вместо (1.22) имеем

$$\| A^{-1} - A_1^{-1} \| \leqslant \| A^{-1} - A_2^{-1} \| + \| A_2^{-1} - A_1^{-1} \| \leqslant \frac{N_2' M_2'}{1 - M_2'} + L' \tag{1.36}$$

где

$$N_2' = \| A_0 + A_{02} \|, \qquad M_2' = \| A (A_0 + A_{02}) - E \|$$

$$L' = \| A_0 + A_{02} - A_1^{-1} \| \tag{1.37}$$

а коэффициенты b_{kr} и b'_{kr} и в рассматриваемом случае при использовании оценок (1.36) — (1.37) также можно найти из условия минимума величин M_2' и L'.

§ 2. **Определение собственных значений в краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.** 1°. Рассмотрим задачу об определении собственных значений уравнения (2.1)

$$Au - \lambda u = \sum_{i=0}^{2s} p_i \frac{d^i u}{dx^i} - \lambda u = 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2.1}$$

при краевых условиях (2.2)

$$u^{(s-1)}(a) = \ldots = u(a) = 0, \qquad u^{(s-1)}(b) = \ldots = u(b) = 0 \tag{2.2}$$

При этом полагаем, что $p_{2s}(x) \geqslant p_0 > 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Найдем оценки для собственных значений λ краевой задачи (2.1) — (2.2), пользуясь приведенными выше оценками для собственных значений.

Для этого в качестве оператора $A_0 f$, входящего в (1.29) — (1.30), возьмем так же, как и в работе [1], оператор вида

$$A_0 f = \int\limits_a^b g_0(x, y) f(y)\,dy \tag{2.3}$$

где $g_0(x, y)$ — главная часть функции Грина краевой задачи (2.1) — (2.2). В частности, можно положить, что $g_0(x, y)$ — функция Грина оператора

$$p_{2s} \frac{d^{2s} u}{dx^{2s}} = f \tag{2.4}$$

при краевых условиях (2.2).

Уравнение (2.1) можно записать также в виде

$$Au - \lambda u = (-1)^s \frac{d^s}{dx^s}\left(p_{2s} \frac{d^s u}{dx^s}\right) + \sum_{i=0}^{2s-1} p_i' \frac{d^i u}{dx^i} - \lambda u = 0 \tag{2.5}$$

и тогда в качестве функции $g_0(x, y)$, входящей в (2.3), можно взять функцию Грина краевой задачи для уравнения

$$A^0 u = (-1)^s \frac{d^s}{dx^s}\left(p_{2s}\frac{d^s u}{dx^s}\right) = f \tag{2.6}$$

при краевых условиях (2.2).

Отметим, что краевая задача для уравнения (2.6) при краевых условиях (2.2) самосопряженная и функцию Грина для этой задачи легко построить.

Положим, далее, как и выше (формулы (1.31) — (1.32); см. также работу [1], где рассмотрена аналогичная задача для самосопряженного уравнения), что операторы $(A_1 - \lambda E)^{-1}$ и A_{02} вырожденные

$$(A_1 - \lambda E)^{-1} f = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} b'_{kr}(\lambda)(f, \varphi_r)\varphi_k \tag{2.7}$$

$$A_{02} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} b_{kr}(\lambda)(f, \varphi_r)\varphi_k \tag{2.8}$$

где скалярное произведение определено по формуле

$$(u, v) = \int_a^b uv\,dx \tag{2.9}$$

система координатных элементов φ_k $(k = 1, \ldots, n)$ удовлетворяет краевым условиям (2.2), а b_{kr} и b'_{kr} — подлежащие определению функции параметра λ.

Для определения коэффициентов $b'_{kr}(\lambda)$ можно применить, например, метод Галеркина, как это сделано в § 1 [формулы (1.33) — (1.34)]. Получим, подставляя в (1.33) — (1.34) вместо оператора A дифференциальный оператор, определенный формулой (2.5):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left[(A\varphi_k, \varphi_r) - \lambda(\varphi_k, \varphi_r)\right] = (f, \varphi_r) \tag{2.10}$$

Отсюда

$$a_k(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} b'_{kr}(\lambda)(f, \varphi_r) \tag{2.11}$$

Коэффициенты $b'_{kr}(\lambda)$, входящие в (2.11), будут искомыми коэффициентами, входящими в (2.7).

Далее, приравнивая нулю определитель однородной системы уравнений (2.10), найдем приближенные собственные значения краевой задачи (2.1) — (2.2), которые в то же время, очевидно, являются точными собственными значениями оператора A_1 или равны обратным величинам точных собственных значений оператора A_1^{-1}. Далее для определения коэффициентов $b_{kr}(\lambda)$, входящих в (2.8), можно исходить из того условия, чтобы оценка для величины $L = \left\| A_2^{-1} - (A_1 - \lambda E)^{-1}\right\|$, входящей в (1.29) — (1.30), была наименьшей в точках контура C, ограничивающем область S. Далее имеем, применяя неравенство Коши-Буняковского (см. также [1]):

$$L = \left\| A_2^{-1} - (A_1 - \lambda E)^{-1}\right\| = \sup\frac{\left\|\left[A_0 + A_{02} - (A_1 - \lambda E)^{-1}\right] f\right\|}{\|f\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\|f\|}\left\{\int_a^b\left[\int_a^b \psi(x, y) f(x)\,dx\right]^2 dy\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_a^b\int_a^b [\psi(x, y)]^2\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}} = d \tag{2.12}$$

где

$$\psi = g_0(x, y) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(b_{kr} - b'_{kr}\right)\varphi_r(x)\varphi_k(y), \qquad \|f\|^2 = \int_a^b [f(x)]^2\,dx \tag{2.13}$$

Коэффициенты b_{kr}' можно подобрать из условия минимума правой части (2.12), откуда получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов b_{kr}':

$$\int_a^b \int_a^b \left[g_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \left(b_{kr} - b_{kr}'\right) \varphi_k \varphi_r\right] \varphi_i \varphi_j dxdy = 0 \tag{2.14}$$

Из (2.12) — (2.14) также видно, что если известно разложение

$$g_0(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \beta_{kr} \varphi_k(x) \varphi_r(y) + g_0'(x, y) \tag{2.15}$$

то, подставляя (2.15) в (2.13) и полагая

$$b_{kr}' - b_{kr} = \beta_{kr}, \qquad b_{kr} = b_{kr}' + \beta_{kr} \tag{2.16}$$

найдем

$$L < \int_a^b \int_a^b [g_0'(x, y)]^2 dxdy \tag{2.17}$$

В частности, если φ_r — ортонормированная система функции, то из (2.15) — (2.17) следует

$$L \leqslant \int_a^b \int_a^b [g_0(x, y)]^2 dxdy - \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \beta_{kr}^2 \tag{2.18}$$

Далее, для того чтобы воспользоваться условием (1.30), надо найти оценки для величин N_2 и M_2, входящих в (1.29) — (1.30).

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$M_2 = \| (A - \lambda E)(A_0 + A_{02}) - E \| = \sup \frac{\| [(A - \lambda E)(A_0 + A_{02}) - E] f \|}{\| f \|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\| f \|} \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b \psi_1(x, y) f(x)\, dx \right]^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{ \int_a^b \int_a^b [\psi_1(x, y)]^2 dxdy \right\}^{\frac{1}{2}} = d_1 \tag{2.19}$$

где

$$\psi_1(x, y) = \psi_0(x, y) + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n b_{kr} [(A - \lambda E) \varphi_r(x)] \varphi_k(y)$$

$$\psi_0(x, y) = (A - A^\circ) g_0 - \lambda g_0 \tag{2.20}$$

$$A^\circ u = (-1)^s \frac{d^s}{dx^s} \left(p_{2s} \frac{d^s u}{dx^s} \right)$$

Аналогичным образом найдем оценку для величины N_2, входящей в (1.29) — (1.30):

$$N_2 = \| A_0 + A_{02} \| \leqslant \frac{1}{\| f \|} \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b \psi(x, y) f(x) \right]^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{ \int_a^b \int_a^b [\psi(x, y)]^2 dxdy \right\}^{\frac{1}{2}} = d_2$$

$$\psi_2(x, y) = g_0(x, y) + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n b_{kr} \varphi_r(x) \varphi_k(y) \tag{2.21}$$

Подставляя теперь найденные оценки для величин N_2, M_2, L в (1.30), полагая для простоты, что контур C есть окружность с центром в точке λ_1 (λ_1 — собственное значение кратности m оператора A_1 или, иначе говоря, приближенное собственное значение краевой задачи (2.1) — (2.2), найденное методом Галеркина) и радиуса ρ, найдем оценку для интеграла в правой части (1.30).

Если при этом выполняется условие (1.30), то в указанном круге имеется m собственных значений краевой задачи (2.1) — (2.2).

Другой способ определения коэффициентов b_{kr} и b'_{kr} состоит в следующем.

Коэффициенты b_{kr} подбираем из условия, чтобы оценка для величины M_2 по формуле (2.19) была наименьшей, т. е. коэффициенты b_{kr} определяем из условия

$$\int_a^b \int_a^b [\psi(x, y)]^2 \, dxdy = \min \tag{2.22}$$

а коэффициенты b'_{kr} — из условия минимума правой части (2.12) или из уравнения (2.16), если известно разложение (2.15).

Аналогичным образом определяются коэффициенты b_{kr} и b'_{kr} при использовании оценок (1.22)—(1.24) и (1.36)—(1.37). Заметим далее, что определение коэффициентов b_{kr} из условия (2.22) равносильно применению метода наименьших квадратов к уравнению $(A - \lambda E) u = \psi_0$ при фиксированном значении одного из аргументов и в силу сходимости метода наименьших квадратов следует, что $M_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Аналогично из условия минимума правой части (2.22) следует, что $L_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, принимая во внимание ограниченность величины N_2, входящей в (1.30), найдем, что при $n \to \infty$ правая часть (1.30) стремится к нулю.

Примечание. Если, в частности, функции φ_k суть ортонормированные собственные функции краевой задачи

$$A^\circ u - \lambda u = (-1)^s \frac{d^s}{dx^s}\left(p_{2s} \frac{d^s u}{dx^s}\right) - \lambda u = 0$$

при граничных условиях (2.2), а соответствующие собственные значения суть λ_1^*, λ_2^*, ..., то, как известно, функцию Грина $g_0(x, y)$ можно представить в виде

$$g_0(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda^*_k}$$

т. е. в этом случае мы непосредственно получаем разложение (2.15), а следовательно, и соотношения (2.16) для определения коэффициентов b_{kr}.

Примечание. Аналогичным образом во многих краевых задачах для дифференциальных уравнений в частных производных для нахождения собственных значений можно положить

$$A_0 f = \int_\Omega g_0 f d\Omega = \int_\Omega g_0(P, P') f(P) \, d\Omega$$

где Ω — область тела, $g(P, P')$ — специальная главная часть функции Грина, построенная таким образом, чтобы выражение для M_2, входящей в (1.29)—(1.30), имело смысл [т. е. было ограниченным и стремилось к нулю при $n \to \infty$, где n — число членов в (1.34)].

Поступила 20 XII 1956

Московский Энергетический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Слободянский М. Г. Об оценках для собственных значений самосопряженного оператора. ПММ, т. XIX, вып. 3, 1955.
2. Bela Sz. — Nagy. Perturbations des transformations linéaires fermées. Acta Sci. Math. Szeged, 14, 125—137, 1951.
3. Гавурин М. К. Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора. ДАН СССР, т. XCVI, № 6, 1954.