Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $A(\lambda)$ ЛИНЕЙНОЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. Г. Крейн
(Одесса)

Линейная каноническая система дифференциальных уравнений второго порядка имеет следующий вид:

$$\frac{dy}{dt} = b(t)\,y + c(t)\,z, \qquad \frac{dz}{dt} = -a(t)\,y - b(t)\,z \tag{0.1}$$

Нас будет интересовать тот случай, когда $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — вещественные периодические функции периода T, абсолютно интегрируемые в интервале $(0, T)$.

Определяя двумерный вектор x и матрицы J, $H(t)$ равенствами

$$x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \qquad H(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

систему (0.1) можно будет записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = JH(t)\,x \tag{0.2}$$

Обозначим через $U(t)$ матрицант уравнения (0.2), т. е. квадратную матрицу второго порядка, являющуюся решением дифференциальной системы

$$\frac{dU}{dt} = JH(t)\,U, \qquad U(0) = I_2 \qquad \left(I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tag{0.3}$$

Тогда

$$\det U \equiv 1$$

и если положить

$$A = \frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,U(t) \tag{0.4}$$

то собственные числа ρ_1, ρ_2 матрицы $U(T)$ [так называемые мультипликаторы уравнения (0.2)] будут вычисляться по формуле

$$\rho_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1} \tag{0.5}$$

В силу этого, если $|A| < 1$, то все решения системы (0.1) будут ограниченными, а если $|A| > 1$, то, наоборот, среди решений этой системы будут решения неограниченные при $t \to \infty$ (а также решения неограниченные при $t \to -\infty$).

Мы будем рассматривать тот случай, когда коэффициенты a, b, c линейно зависят от параметра λ и, следовательно, матрица-функция $H(t)$ имеет вид:

$$H(t) = H_0(t) + \lambda H_1(t), \qquad H_j(t) = \begin{pmatrix} a_j(t) & b_j(t) \\ b_j(t) & c_j(t) \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1) \tag{0.6}$$

В этом случае величина A будет функцией $\lambda : A = A(\lambda)$, притом целой (не выше экспоненциального типа).

В предположении, что $H_0(t) \equiv 0$, а $H_1(t)$ удовлетворяет некоторым дополнительным требованиям (см. [1] § 8), был установлен ряд свойств функции $A(\lambda)$, в частности, следующие.

(*а*) Функция $A(\lambda)$ имеет только вещественные простые нули.

(*б*) Функция $A^2(\lambda) - 1$ имеет только вещественные нули, притом не выше второй кратности.

Для всей теории зон устойчивости особенно существенным является то, что график функции $\mu = A(\lambda)$ обладает геометрическим свойством, которое допускает следующую аналитическую формулировку.

(*в*) Если $\lambda = \lambda_*$ — некоторая стационарная точка функции $A(\lambda)$ на вещественной оси, то

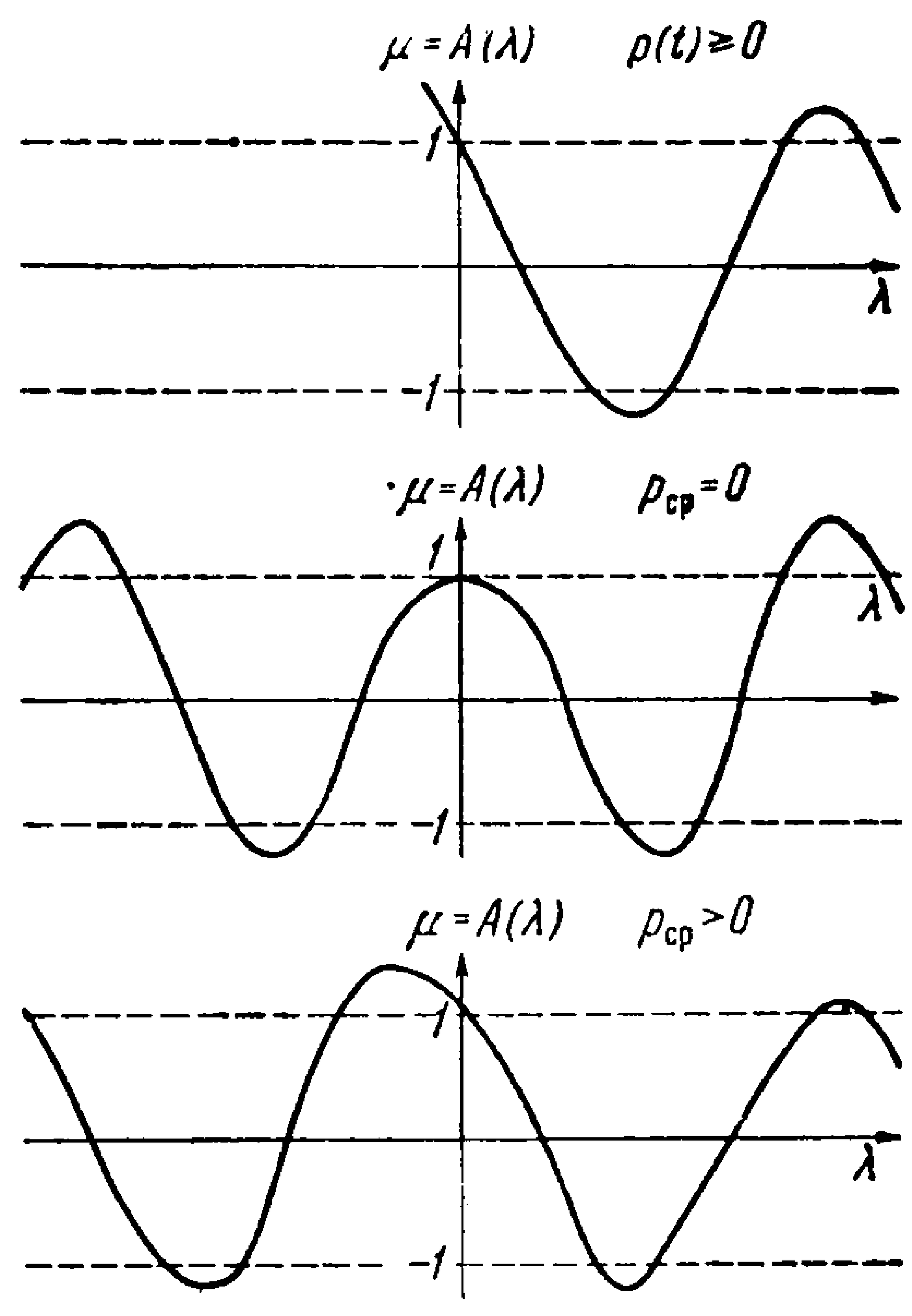
$$|A(\lambda_*)| \geqslant 1, \qquad A(\lambda_*)\,A''(\lambda_*) < 0$$

Таким образом, всякая стационарная точка $\lambda = \lambda_*$ функции $A(\lambda)$ является ее точкой экстремума и именно максимумом, если $A(\lambda_*) \geqslant 1$, и минимумом, если $A(\lambda_*) \leqslant 1$. Внутри же полосы $|\mu| < 1$ функция $A(\lambda)$ никаких стационарных точек и, в частности, экстремумов не имеет (фиг. 1).

Свойство (*в*) характеристической функции $A(\lambda)$ позволяет в силу соотношения (0.5) сделать ряд важных выводов относительно движения мультипликаторов $\rho_{1,2}(\lambda)$, когда λ пробегает вещественную ось. Из него, в частности, непосредственно следует, что корни уравнений

$$A(\lambda) + 1 = 0, \qquad A(\lambda) - 1 = 0 \qquad (0.7)$$

перемежаются парами и что концами всякой зоны устойчивости (максимального открытого интервала, в котором $|A(\lambda)| < 1$) служат корни разных уравнений (0.7).



Фиг. 1.

Для уравнения[1]

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda p(t)\,y = 0 \qquad (p(t+T) = p(t)) \qquad (0.8)$$

этот важный факт впервые был обнаружен Ляпуновым [2, 3] как для случая знакопостоянного, так и знакопеременного $p(t)$.

В [4] было показано (см. §§ 5, 6), что уравнение (0.8) во всех случаях в известном смысле эквивалентно некоторой специальной канонической системе второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = JH_\lambda(t)\,x, \qquad H_\lambda(t) = H_0(t) + \lambda H_1(t) \qquad (0.9)$$

имеющей ту же характеристическую функцию $A(\lambda)$, что и уравнение (0.8). Ввиду того, что и на уравнение (0.9) при достаточно общих предположениях относительно матриц-функций H_0, H_1 распространяются выводы статьи [1], то и для уравнения (0.9) функция $A(\lambda)$ обладает рядом из указанных свойств и, в частности, свойствами (*а*), (*б*) и (*в*).

Следует, однако, указать, что, в то время как свойства (*а*) и (*б*) функции $A(\lambda)$ устанавливаются во всех случаях элементарными средствами, свойство (*в*) было установлено [1] на основе разложения

$$A^2(\lambda) - 1 = -a \lim_{r\to\infty} \prod_{|\lambda_j| \leqslant r} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \qquad (a > 0) \qquad (0.10)$$

полученного в результате достаточно сложных теоретико-функциональных построений.

Хотя разложение (0.10) само по себе представляет интерес, возникает все же вопрос, нельзя ли без его помощи элементарными средствами установить свойство (*в*).

---

[1] Напомним, что для уравнения (0.8), как и для более общего уравнения (0.12), характеристическая функция $A(\lambda)$ определяется равенством $A(\lambda) = \frac{1}{2}[\varphi(T;\lambda) + \psi'(T;\lambda)]$, где $\varphi(t,\lambda)$ и $\psi(t;\lambda)$ — решения уравнения (0.12), удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(0;\lambda) = \psi'(0;\lambda) = 1$, $\varphi'(0;\lambda) = \psi(0;\lambda) = 0$.

Для характеристической функции $A(\lambda)$ уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} - q(t)\,y + \lambda y = 0 \qquad (q(t+T) = q(t)) \tag{0.11}$$

свойство (*в*), по-видимому, впервые и притом элементарными средствами было установлено Крамерсом [5]. Изящное изложение метода Крамерса было дано Швердтфегером[6].

Здесь будет показано, что предложенный Крамерсом вывод свойства (*в*) допускает простое обобщение и на случай уравнений (0.9).

В работе [7] было показано, что результаты Ляпунова переносятся и на уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} - q(t)\,y + \lambda p(t)\,y = 0 \qquad (q(t+T) = q(t), \quad p(t+T) = p(T)) \tag{0.12}$$

при выполнении некоторых условий. Мы покажем, что и для таких уравнений функция $A(\lambda)$ обладает свойствами (*а*), (*б*) и (*в*).

§ 1. Вспомогательные формулы. Полагая, что матрица $H(t) = H_\lambda(t)$ имеет вид (0.6), перепишем (0.3) в развернутом виде:

$$\frac{dU}{dt} = J\left(H_0(t) + \lambda H_1(t)\right)U, \qquad U(0;\lambda) = I_2 \tag{1.1}$$

Продифференцировав эти равенства по λ, получим

$$\frac{d\dot{U}}{dt} = JH_\lambda \dot{U} + JH_1 U, \qquad \dot{U}(0;\lambda) = 0 \tag{1.2}$$

где точкой обозначена операция дифференцирования по λ.

Так как матричное уравнение

$$\frac{dX}{dt} - JHX = Y, \qquad X(0) = 0$$

имеет всегда единственное решение, получаемое по формуле

$$X(t) = U(t)\int_0^t U^{-1}(s)\,Y(s)\,ds$$

то из (1.2) следует, что

$$\dot{U}(t,\lambda) = U(t,\lambda)\int_0^t U^{-1}(s;\lambda)\,JH_1(s)\,U(s,\lambda)\,ds \tag{1.3}$$

В силу симметричности матрицы $H(t)$, $U(t;\lambda)$ есть J-ортогональная матрица (см. [1], стр. 430), т. е. имеют место равносильные тождества

$$U^\tau(t;\lambda)\,JU(t;\lambda) = J, \qquad U^{-1}(t;\lambda) = -JU^\tau(t;\lambda)\,J \qquad (J^2 = -I_2)$$

где U^τ — матрица, транспонированная к U.

Поэтому выражение (1.3) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{U}(t,\lambda) = U(t,\lambda)\,J\int_0^t U^\tau(s;\lambda)\,H_1(s)\,U(s;\lambda)\,ds = U(t;\lambda)\,\Omega(t;\lambda) \tag{1.4}$$

где

$$\Omega(t;\lambda) = JP(t;\lambda), \qquad P(t;\lambda) = \int_0^t U^\tau(s;\lambda)\,H_1(s)\,U(s;\lambda)\,ds \tag{1.5}$$

Очевидно, матрица $P(t;\lambda) = \| p_{jk}(t;\lambda)\|_1^2$ является симметрической:

$$p_{12}(t;\lambda) = p_{21}(t;\lambda)$$

Дифференцирование по λ первого и третьего членов равенства (1.4) дает соотношение

$$\ddot{U}(t, \lambda) = U(t, \lambda)\,[\Omega^2(t, \lambda) + \dot{\Omega}(t; \lambda)]$$

С другой стороны, согласно определению (1.5)

$$\Omega(t; \lambda) = \begin{pmatrix} p_{12} & p_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} \end{pmatrix}, \quad \Omega^2(t; \lambda) = -\delta \cdot I_2 \tag{1.6}$$

где

$$\delta(t; \lambda) = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 \tag{1.7}$$

определитель матрицы $P(t, \lambda)$. Таким образом,

$$\ddot{U}(t; \lambda) = U(t; \lambda)\,[-\delta(t; \lambda)\, I_2 + \dot{\Omega}(t; \lambda)] \tag{1.8}$$

Перейдем к вычислению

$$\dot{\Omega}(t; \lambda) = J\dot{P}(t; \lambda)$$

Согласно (1.5)

$$\dot{P}(t; \lambda) = \int_0^t \dot{U}^\tau(s; \lambda)\, H_1(s)\, U(s; \lambda)\, ds + \int_0^t U^\tau(s; \lambda)\, H_1(s)\, \dot{U}(s; \lambda)\, ds$$

Принимая во внимание (1.4), а также вытекающее из него соотношение

$$\dot{U}^\tau(s; \lambda) = -\left(\int_0^s U^\tau(r; \lambda)\, H_1(r)\, U(r; \lambda)\, dr\right) J U^\tau(s; \lambda)$$

находим, что

$$\dot{P}(t; \lambda) = -\int_0^t \left(\int_0^s U^\tau(r; \lambda)\, H_1(r)\, U(r; \lambda)\, dr\right) J U^\tau(s; \lambda)\, H_1(s)\, U(s; \lambda)\, ds +$$

$$+ \int_0^t U^\tau(s; \lambda)\, H_1(s)\, U(s; \lambda)\, J \int_0^s U^\tau(r; \lambda)\, H_1(r)\, U(r; \lambda)\, dr\, ds$$

Вводя в рассмотрение симметрическую матрицу

$$Q(t; \lambda) = U^\tau(t; \lambda)\, H_1(t)\, U(t; \lambda) = \| q_{jk}(t; \lambda) \|_1^2 \tag{1.9}$$

можно будет написать

$$P(t; \lambda) = \int_0^t Q(s; \lambda)\, ds$$

$$\dot{P}(t; \lambda) = \int_0^t ds \int_0^s [Q(s; \lambda)\, JQ(r; \lambda) - Q(r; \lambda)\, JQ(s; \lambda)]\, dr \tag{1.10}$$

Произведя перемножение матриц, найдем, что

$$\dot{p}_{12} = \int_0^t ds \int_0^s [q_{11}(s; \lambda)\, q_{22}(r; \lambda) - q_{22}(s; \lambda)\, q_{11}(r; \lambda)]\, dr$$

Изменив порядок интегрирования в первом из двойных интегралов (с последующей перестановкой в ней букв r и s), получим далее

$$\dot{p}_{12} = \int_0^t q_{22}(s; \lambda)\, ds \left[\int_s^t q_{11}(r; \lambda)\, dr - \int_0^s q_{11}(r; \lambda)\, dr\right] \tag{1.11}$$

§ 2. **Ограничения, налагаемые на H_0 и H_1.** До сих пор на вещественные симметрические матрицы $H_0(t)$ и $H_1(t)$ никаких ограничений, кроме абсолютной интегрируемости их элементов в интервале $(0, T)$, не накладывалось. В дальнейшем будем предполагать следующее.

(А) Для любого двумерного вещественного вектора $\xi \neq 0$

$$(H_1(t)\xi, \xi) = a_1(t)\xi_1^2 + 2b_1(t)\xi_1\xi_2 + G_1(t)\xi_2^2 \geqslant 0 \tag{2.1}$$

Условие (A) означает, что почти всюду в $(0, T)$

$$a_1(t) \geqslant 0, \qquad c_1(t) \geqslant 0, \qquad a_1(t)c_1(t) - b_1^2(t) \geqslant 0 \tag{2.2}$$

Так как

$$(Q(t;\lambda)\xi, \xi) = (H_1(t)\eta, \eta), \qquad \eta = U(t;\lambda)\xi,$$

то из (2.1) следует:

$$(Q(t;\lambda)\xi, \xi) = q_{11}(t;\lambda)\xi_1^2 + 2q_{12}(t;\lambda)\xi_1\xi_2 + q_{22}(t;\lambda)\xi_2^2 \geqslant 0 \tag{2.3}$$

почти всюду в $(0, T)$ и, стало быть, почти всюду в $(0, T)$

$$q_{11}(t;\lambda) \geqslant 0, \qquad q_{22}(t;\lambda) \geqslant 0, \qquad q_{11}(t;\lambda)q_{22}(t;\lambda) - q_{12}^2(t;\lambda) \geqslant 0$$

Вспоминая (1.11), замечаем, что

$$\dot{p}_{12}(T;\lambda) \leqslant \int_0^T q_{22}(s;\lambda)\,ds \int_0^T q_{11}(r;\lambda)\,dr = p_{11}(T;\lambda)\,p_{22}(T;\lambda)$$

Итак, при выполнении условия (A)

$$\dot{p}_{12}(T;\lambda) \leqslant p_{11}(T;\lambda)\,p_{22}(T;\lambda) \tag{2.4}$$

В дальнейшем нас будет интересовать тот случай, когда, кроме (A), выполняется также условие

$$(P(T;\lambda)\xi, \xi) > 0 \quad \text{при } \xi \neq 0 \tag{2.5}$$

В ослабленной форме, когда вместо знака $>$ стоит $\geqslant$, это условие является следствием условия (A), ибо

$$(P(T;\lambda)\xi, \xi) = \int_0^T (Q(t;\lambda)\xi, \xi)\,dt \tag{2.6}$$

Выясним, когда (2.5) будет выполняться.

Пусть при некотором $\xi = \xi_0 \neq 0$ и вещественном $\lambda = \lambda_0$

$$(P(T;\lambda)\xi_0, \xi_0) = 0 \tag{2.7}$$

Тогда согласно (2.6) и (2.3) почти всюду в $(0, T)$

$$(Q(t;\lambda_0)\xi_0, \xi_0) = 0, \qquad Q(t;\lambda_0)\xi_0 = 0$$

Припоминая определение (1.9) матрицы функции $Q(t;\lambda)$, заключаем, что почти всюду в $(0, T)$

$$H_1(t)\,U(t;\lambda_0)\xi_0 = 0 \tag{2.8}$$

С другой стороны, в силу (1.1), $x_0(t) = U(t;\lambda_0)\xi$ будет решением уравнения (0.2), т. е.

$$\frac{dx_0}{dt} = J(H_0(t) + \lambda_0 H_1(t))\,x_0 \tag{2.9}$$

Сопоставляя с (2.8), заключаем, что

$$\frac{dx_0}{dt} = J\,H_0(t)\,x_0 \tag{2.10}$$

Обратно, если у уравнения (2.10) найдется решение $x_0 \neq 0$, удовлетворяющее условию

$$H_1(t)\,x_0 = 0 \quad \text{почти всюду в} \quad (0,\ T) \tag{2.11}$$

то оно, очевидно, будет решением уравнения (2.9) при любом λ_0 и, следовательно, для произвольно выбранного вещественного λ_0 найдется вектор $\xi_0 \neq 0$, такой, что $x_0(t) = U(t;\ \lambda_0)\,\xi_0$, а тогда в силу (1.9) почти всюду в $(0,\ T)$ также $Q(t;\ \lambda_0)\,\xi_0 = 0$ и, стало быть, будет иметь место (2.7). Таким образом, при выполнении условия (A) условие (2.5) эквивалентно следующему.

(B) У уравнения $dx/dt = JH_0(t)\,x$ отсутствуют решения $x_0(t) \neq 0$, для которых $H_1(t)\,x_0(t) = 0$ почти всюду в $(0,\ T)$.

В частности, условие (B) будут выполняться, если условие (A) заменить более жестким, а именно: почти для всех $t \in (O, T)$ форма $(H_1(t)\,\xi, \xi)$ является положительно определенной.

Заметим еще, что если $H_0(t) \equiv 0$, то общим решением уравнения (2.10) будет $x_0 \equiv \xi$, где ξ — любой постоянный вектор; при выполнении условия (A) условие (B) будет означать, что для постоянного вектора $\xi \neq 0$ на множестве положительной меры $H_1(t)\,\xi$ будет отлично от нуля, а это в силу (A) будет равносильно тому, что

$$\int_0^T (H_1(t)\,\xi,\ \xi)\,dt > 0 \qquad \text{при } \xi \neq 0$$

Таким образом, к условию (A) неотрицательности формы $(H_1(t)\ \xi,\ \xi)$, выражаемому аналитически неравенствами (2.2), добавится условие положительности в среднем этой формы, выражаемое неравенством

$$\int_0^T a_1(t)\,dt \int_0^T c_1(t)\,dt > \left(\int_0^T b_1(t)\,dt\right)^2$$

При этих предположениях и изучалось[1] уравнение $dx/dt = \lambda J H_1 x$.

§ 3. Доказательство свойства (*в*). Предполагая выполненными условия (A) и (B), докажем свойство (*в*).

Если в (1.4) и (1.8) положить $t = T$, то согласно (0.4)

$$\begin{aligned} \dot{A}(\lambda) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,\{U(T;\ \lambda)\,JP(T;\ \lambda)\} \\ \ddot{A}(\lambda) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,\{U(T;\ \lambda)\,[-\delta(T;\ \lambda)\,I_2 + \dot{\Omega}(T;\ \lambda)]\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Прежде чем раскрыть эти выражения, сделаем следующее общее замечание, позволяющее предварительно упростить их. Пусть L — какая-либо вещественная матрица второго порядка с $\det L = 1$. Тогда она всегда J-ортогональна, т. е. $LJL^\tau = J$, $L^{-1}J(L^\tau)^{-1} = J$. Поэтому, если произвести замену $H_j(t)$ на $H_j^\circ(t) = L^\tau H_j(t)\,L$, то, как легко видеть, матрицы $U(t;\ \lambda)$, $P(t;\ \lambda)$ перейдут в матрицы $U^\circ(t;\ \lambda) = L^{-1}U(t;\ \lambda)\,L$, $P^\circ(t;\ \lambda) = L^\tau P(t;\ \lambda)\,L$, а функция $A(\lambda)$ останется прежней.

Пусть теперь $\lambda = \lambda_*$ — какая-либо стационарная точка функции $A(\lambda)$, так что $\dot{A}(\lambda_*) = 0$, т. е.

$$\mathrm{sp}\,\{U_* J P_*\} = 0, \qquad U_* = U(T;\ \lambda_*), \qquad P_* = P(T;\ \lambda_*) \tag{3.2}$$

Ввиду симметричности матрицы P_* всегда найдется вещественная ортогональная матрица $L(L^\tau = L^{-1})$ с $\det L = 1$ такая, что $L^\tau P_* L$ будет диагональной матрицей. Поэтому в силу сказанного выше можно без ограничения общности предположить, что P_* имеет вид:

$$P_* = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

где p_1 и p_2 — собственные числа матрицы P_*. Тогда (3.2) примет вид:

$$-u_{12}(T;\ \lambda_*)\, p_1 + u_{21}(T;\ \lambda_*)\, p_2 = 0 \tag{3.4}$$

Так как в силу условия (B) имеем $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, то заключаем, что $u_{12}(T;\ \lambda_*)\, u_{21}(T;\ \lambda_*) \geqslant 0$. Принимая во внимание, что $\det U = 1$, т. е.

$$u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = 1 \tag{3.5}$$

убеждаемся в том, что $u_{11}(T;\ \lambda_*)\, u_{22}(T;\ \lambda_* \geqslant)\, 1$, откуда

$$|u_{11}(T;\ \lambda_*) + u_{22}(T;\ \lambda_*)| =$$

$$= |u_{11}(T;\lambda_*)| + |u_{22}(T;\ \lambda_*)| \geqslant 2\sqrt{|u_{11}(T;\ \lambda_*)|}\,\sqrt{|u_{22}(T;\ \lambda_*)|} \geqslant 2$$

Таким образом,

$$|A(\lambda_*)| = \left|\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sp}\, U_*\right| \geqslant 1$$

Остается показать, что стационарная точка λ_* действительно дает максимум, если $A(\lambda_*) \geqslant 1$, и минимум, если $A(\lambda_*) \leqslant -1$.

Рассмотрим сперва «предельные» случаи, когда $A(\lambda_*) = \pm 1$. Пусть, например, $A(\lambda_*) = 1$, т. е. $u_{11}(T;\ \lambda_*) + u_{22}(T;\ \lambda_*) = 2$. Так как $u_{11}(T;\ \lambda_*)\, u_{22}(T;\ \lambda_*) \geqslant 1$, то в этом случае $u_{11}(T;\ \lambda_*) = u_{22}(T;\ \lambda_*) = 1$. Ввиду (3.5) тогда $u_{12}(T;\ \lambda_*)\, u_{21}(T;\ \lambda_*) = 0$, что в силу (3.4) возможно лишь при $u_{12}(T;\ \lambda_*) = u_{21}(T;\ \lambda_*) = 0$. Итак, в рассматриваемом случае $U_* = U(T;\ \lambda_*) = I_2$. Поэтому (3.1) при $\lambda = \lambda_*$ с учетом (1.6), (1.7) и (3.3) дает

$$\ddot{A}(\lambda_*) = -\delta(T;\ \lambda_*) = -p_1p_2 < 0$$

что и требовалось доказать.

Аналогично разбирается случай, когда $A(\lambda_*) = -1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $A(\lambda_*) > 1$. Тогда согласно (0.5) собственные числа ρ_1 и ρ_2 матрицы $U_* = U(T;\ \lambda_*)$ будут различными и положительными, и так как $\rho_1\rho_2 = 1$, то можно принять, что $\rho_1 > 1$ и $\rho_2 = \rho_1^{-1} < 1$.

Так как всегда найдется матрица L с $\det L = 1$ такая, что $L^{-1}U_*L$ будет диагональной матрицей[1], то мы можем сразу принять

$$U_* = U(T;\ \lambda_*) = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$$

[1] Пусть $l^{(j)}$ $(j = 1,\ 2)$ — собственные векторы матрицы U_*, так что

$$U_* l^{(j)} = \rho_j l^{(j)}, \qquad l^{(j)} = \begin{pmatrix} l_1^{(j)} \\ l_2^{(j)} \end{pmatrix} \qquad (j = 1,\ 2)$$

Так как векторы $l^{(1)}$, $l^{(2)}$ линейно независимы, то их можно пронормировать так, чтобы $\det(l_k^{(j)}) = 1$. Тогда можно положить

$$L = \begin{pmatrix} l_1^{(1)} & l_1^{(2)} \\ l_2^{(1)} & l_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

Тогда условие $\dot{A}(\lambda_*)=0$ будет означать, что

$$sp(U_* J P_*) = (\rho_1 - \rho_2) p_{12}(T; \lambda_*) = 0, \qquad \text{или} \qquad p_{12}(T; \lambda_*) = p_{21}(T; \lambda_*) = 0$$

Согласно (3.1) будем иметь

$$\ddot{A}(\lambda_*) = -(\rho_1 + \rho_2)\,\delta(T; \lambda_*) + (\rho_1 - \rho_2)\,\dot{p}_{12}(T; \lambda_*) =$$
$$= -(\rho_1 + \rho_2)\,p_{11}(T; \lambda_*)\,p_{22}(T; \lambda_*) + (\rho_1 - \rho_2)\,\dot{p}_{12}(T; \lambda_*).$$

Принимая во внимание, что $\rho_1 + \rho_2 > \rho_1 - \rho_2$, а также соотношение (2.4), заключаем, что $\ddot{A}(\lambda_*) < 0$. Аналогично доказывается, что $\ddot{A}(\lambda_*) > 0$, если $A(\lambda_*) < 1$. Таким образом, установлено предложение.

Теорема. Если в канонической системе второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = J\,(H_0(t) + \lambda H_1(t))\,x$$

матрицы $H_0(t)$ и $H_1(t)$ удовлетворяют условиям (A) и (B), то в каждой стационарной точке $\lambda = \lambda_*$ характеристической функции $A(\lambda)$ этой канонической системы $|A(\lambda_*)| \geqslant 1$ и $\ddot{A}(\lambda_*)\,A(\lambda_*) < 0$.

§ 4. Случай уравнения (0.8). Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\, p(t)\, y = 0, \qquad p(t+T) = p(t)$$

где $p(t)$, вообще говоря, знакопеременная функция, абсолютно интегрируемая в $(0, T)$

$$0 < \int_0^T |p(t)|\,dt < \infty$$

Воспользуемся преобразованием из[4] (стр. 670). Полагая

$$z = q(t)\,y + \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dt} \qquad (\lambda \neq 0) \tag{4.1}$$

где

$$q(t) = \int_0^t (p(s) - p_{\text{ср}})\,ds, \qquad p_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

получим

$$\frac{dz}{dt} = q(t)\frac{dy}{dt} - p_{\text{ср}}\,y$$

Таким образом, уравнение (0,8) эквивалентно системе

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(-q(t)\,y + z), \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda(-q^2(t)\,y + q(t)\,z) - p_{\text{ср}}\,y \tag{4.2}$$

Эта система имеет вид (0.9), где $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ и

$$H_0 = \begin{pmatrix} p_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_1(t) = \begin{pmatrix} q^2(t) & -q(t) \\ -q(t) & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, матрица $H_1(t)$ удовлетворяет условию (A). Проверим выполнимость условия (B).

Если в (4.2) положить $\lambda = 0$, то общее решение системы (4.2) имеет вид:

$$y_0 = C_1, \qquad z_0 = C_2 - C_1 p_{\text{ср}}\,t$$

Если $x_0(t)$ — двумерный вектор с координатами y_0 и z_0, то вектор $u(t) = H_1(t)\,x_0(t)$ будет иметь непрерывные координаты

$$u_1(t) = C_1 q^2(t) - (C_2 - C_1 p_{\text{ср}}\,t)\,q(t), \qquad u_2(t) = -C_1 q(t) + C_2 - C_1 p_{\text{ср}}\,t$$

Выясним, когда возможно, чтобы $u_1(t) \equiv u_2(t) \equiv 0$.

Если $C_1 \neq 0$, то из $u_2(t) \equiv 0$ будет следовать, что $q(t) = -p_{\text{ср}}t + C_2/C_1$. Так как $q(t)$ — периодическая функция, то это возможно лишь при $p_{\text{ср}} = 0$, но тогда $q(t) = C_2/C_1$, $p(t) = q'(t) \equiv 0$, что противоречит (4.1).

Если же $C_1 = 0$, то из $u_2(t) \equiv 0$ будет следовать, что $C_2 = 0$, т. е. $x_0(t) \equiv 0$. Таким образом, условие (B) также выполняется.

Если $y(t; \lambda)$ — решение уравнения (0.8), обладающее свойством $y(t+T; \lambda) = \rho(\lambda)\, y(t; \lambda)$, то, очевидно, соответствующий вектор $x = \binom{y}{z}$ будет обладать свойством

$$x(t+T; \lambda) = \rho(\lambda)\, x(t; \lambda)$$

и обратно. В силу этого уравнение (0.8) обладает теми же мультипликаторами $\rho_{1,2}(\lambda)$, а значит, и той же характеристической функцией $A(\lambda) = {}^1/_2(\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda))$, что и система (4.2). Отсюда характеристическая функция $A(\lambda)$ уравнения (0.8) всегда обладает свойством ($в$).

Легко видеть, что всегда $A(0) = 1$. Кроме того, как показал еще Ляпунов:

$$\dot{A}(0) = \frac{1}{2} T^2 p_{\text{ср}}$$

Если, кроме того, учесть, что при $p(t) \geqslant 0$ функция $A(\lambda)$ при $\lambda \leqslant 0$, $\lambda \to -\infty$ монотонно стремится к $+\infty$, а при знакопеременном $p(t)$ функция $A^2(\lambda) - 1$ имеет бесконечное число положительных и отрицательных нулей, то легко видеть, что график функции $A(\lambda)$ соответственно тому или иному случаю имеет вид, указанный на фиг. 1.

§ 5. Случай уравнения (0.12). Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} - r(t)\, y + \lambda p(t)\, y = 0 \tag{5.1}$$

где $r(t)$, $p(t)$ — периодические функции периода T, интегрируемые в $(0, T)$, причем

$$p(t) \geqslant 0, \qquad \int_0^T p(t)\, dt > 0 \tag{5.2}$$

Полагая теперь $z = dy/dt$, мы приведем уравнение (5.1) к системе

$$\frac{dy}{dt} = z, \qquad \frac{dz}{dt} = r(t)\, y - \lambda p(t)\, y \tag{5.3}$$

с матрицами

$$H_0(t) = \begin{pmatrix} -r(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H_1(t) = \begin{pmatrix} p(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, матрица $H_1(t)$ удовлетворяет условию (A). Нетрудно убедиться в том, что условие (B) также удовлетворяется. Пусть $y_0(t)$ — какое-либо решение уравнения (5.1) при $\lambda = 0$, т. е. $y_0'' - r(t)\, y_0 = 0$. Тогда вектор-функция $x_0(t) = \binom{y_0}{y_0'}$ будет решением системы (5.3) при $\lambda = 0$.

Для того чтобы $H_1(t)\, x_0$ равнялось почти всюду нулю, необходимо, чтобы $p(t)\, y_0(t) = 0$ почти всюду. Если $x_0(t) \neq 0$, то функция $y_0(t) \neq 0$ и в интервале $(0, T)$ может иметь лишь конечное число нулей [1], следовательно равенство $p(t)\, y_0(t) = 0$ (почти всюду) невозможно.

[1] Если бы функция $y_0(t)$ имела в интервале $(0, T)$ бесконечное множество нулей, то у этого множества была бы по крайней мере одна точка сгущения α и в этой точке $y_0(\alpha) = y_0'(\alpha) = 0$, но тогда $y_0(t) \equiv 0$.

Таким образом, характеристическая функция $A(\lambda)$ уравнения (5.1) обладает свойством (*в*) при выполнении условий (5.2).

Укажем еще, что свойство (*в*) функции $A(\lambda)$ сохраняется также и в случае знакопеременного p, если только функция $r(t)$ такова, что

$$\int_0^T \{y'^2 + r(t)\,y^2\}\,dt > 0 \tag{5.4}$$

где $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция, не равная тождественно нулю.

Это замечание основано на результате, указанном в[7].

Оказывается, при выполнении условия (5.4) краевая задача

$$y'' - r(t)\,y + \lambda p(t)\,y = 0, \qquad y(0) = y(T), \qquad y'(0) = y'(T)$$

всегда будет иметь бесконечное число неотрицательных характеристических чисел, и если λ_1 — первое из них, то ему будет отвечать положительная фундаментальная функция $\chi(t)$. Совершая тогда преобразование, указанное в[7]:

$$\tau = \int_0^t \frac{ds}{\chi^2(s)}, \qquad y = \chi u, \qquad \lambda = \mu + \lambda_1$$

мы преобразуем уравнение (5.1) к виду

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \mu p_1(\tau)\,u = 0, \qquad p_1(\tau) = [\chi^4(t)\,p(t)]_{t=t(\tau)} \tag{5.5}$$

где $p_1(\tau)$ — периодическая функция с периодом

$$T_1 = \int_0^T \frac{dt}{\chi^2(t)}$$

Уравнение же (5.5) было уже рассмотрено в § 4.

Поступило 18 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сборник памяти А. А. Андронова, Изд. АН СССР, 1955. стр. 413—498.
2. Ляпунов А. М. Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R., t. CXXVIII, № 15. pp. 910—913, 1899, Собр. соч., т. II, Изд. АН СССР, 1956, стр. 401—403.
3. Ляпунов А. М. Sur une équation transcendante et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. C. R., t. CXXVIII, № 18, 1899; pp. 1085—1088, Собр. соч., т. II, Изд. АН СССР, 1956, стр. 403—406.
4. Крейн М. Г. О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем. ПММ, т. XIX, вып. 6, 1955, стр. 641—680.
5. Kramers H. A. Das Eigenwertproblem im eindimensionalen periodischen Kraftfelde. Physica, Bd. 2, 1935, S. 483—490.
6. Schwerdtfeger H. The eigen-value problem of Hill's equation. Journ. and Proc. of the Royal Soc. of New South Wales, vol. LXXIX, part IV, 1945, pp. 176—189.
7. Коваленко К. Р. и Крейн М. Г. О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXV, № 4, 1950, стр. 495—498.