Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Н. Н. Красовский
(Свердловск)

В заметке рассматривается вопрос о связи устойчивости невозмущенного движения относительно достаточно больших начальных отклонений с устойчивостью возмущенных траекторий по Ляпунову [1]. Доказываются некоторые критерии асимптотической устойчивости нелинейных систем, опирающиеся на эту связь. Эти критерии выделяют случаи устойчивости при больших начальных возмущениях, исследование которых сводится к классическим задачам устойчивости в смысле Ляпунова по первому приближению [1, 2].

§ 1. Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$
$$X_i(0, \ldots, 0, t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где правые части X_i — кусочно-непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные $\partial X_i / \partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$ при $-\infty < x_i < \infty$, $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$ $(i = 1, \ldots, n;\ \tau_k$ — возрастающая последовательность). В точках разрыва $t = \tau_k$ символ dx_i / dt в уравнениях (1.1) означает правую производную. Предполагается также, что в каждой ограниченной области G_0 пространства $\{x_i\}$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right| < L \qquad (L(G_0) = \text{const})$$

Докажем сначала одно, почти очевидное предложение.

Пусть решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ устойчиво в смысле Ляпунова [1] (стр. 19), равномерно по времени t_0 начальных возмущений [3,4] (стр. 168), т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, t) < \varepsilon^2 \qquad \text{при } t \geqslant t_0,\ t_0 \geqslant 0$$

если только

$$x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 < \delta^2(\varepsilon)$$

Лемма. Для того чтобы решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ было асимптотически устойчивым относительно начальных возмущений $\{x_{j0}\}$ из области G (которая, в частности, может совпадать со всем пространством $-\infty < x_i < \infty$), необходимо и достаточно, чтобы каждое возмущенное движение $x_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, t)$ при $\{x_{j0}\}$ из G было асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Докажем достаточность условий леммы. Пусть $\overline{G}_0$ — ограниченная замкнутая область в G. Каждую точку $\{x_{j0}\}$ из $\overline{G}_0$ можно погрузить в окрестность

$$\sum_{j=1}^{n}(x_{j0}-x_j^*)^2<\eta^2(\{x_{j0}\}) \qquad (\eta>0) \tag{1.2}$$

такую, что

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i(\{x_{j0}\},t_0,t)-x_i(\{x_j^*\},t_0,t)]^2<\varepsilon^2 \tag{1.3}$$

$$\lim\sum_{i=1}^{n}[x_i(\{x_{j0}\},t_0,t)-x_i(\{x_j^*\},t_0,t)]^2=0 \qquad \text{при } t\to\infty$$

для всех точек $\{x_j^*\}$ из области (1.2), каково бы ни было наперед заданное число $\varepsilon>0$. Область $\overline{G}_0$ можно покрыть конечной (в числе N) системой окрестностей (1.2). Следовательно, диаметр области

$$\{x_i(\{x_{j0}\},t_0,t)\} \qquad \text{при } \{x_{j0}\}\in\overline{G}_0,\ t\geqslant t_0$$

ограничен числом $2\varepsilon N$ и стремится к нулю при $t\to\infty$. Достаточность условий леммы доказана.

Докажем необходимость условий леммы. Пусть $\overline{G}_1$ — ограниченная замкнутая область из G и $\overline{G}_0\in G_1$. Асимптотическая устойчивость решения $x_1=\ldots=x_n=0$ при начальных данных $\{x_{j0}\}$ из $\overline{G}_1$ равномерна по координатам $\{x_{j0}\}$ [5]. Следовательно, можно указать число $T(t_0,\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2(\{x_{j0}^*\},t_0,t)<\varepsilon^2 \qquad \text{при } t\geqslant t_0+T(t_0,\varepsilon)$$

для всех $\{x_{j0}^*\}$ из $\overline{G}_1$. Если выбрать $\eta(\{x_{j0}\})$-окрестность точки $\{x_{j0}\}\in\overline{G}_0$ столь малой, чтобы эта окрестность целиком лежала в области G_1 и чтобы на конечном интервале времени $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T(t_0,\varepsilon)$ диаметр этой окрестности возрастал вдоль траекторий меньше, чем до величины ε (что возможно вследствие интегральной непрерывности), то при всех значениях времени $t\geqslant t_0$ будет выполняться неравенство (1.3) для всех точек $\{x_{j0}^*\}$ из этой $\eta(\{x_{j0}\})$-окрестности точки $\{x_{j0}\}$. Вследствие произвольности выбора числа $\varepsilon>0$ устойчивость возмущенных траекторий по Ляпунову доказана. Теперь доказательство асимптотической устойчивости этих траекторий относительно возмущений из $\eta(\{x_{j0}\})$-окрестностей очевидно.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что для равномерной асимптотической устойчивости решения $x_1=\ldots=x_n=0$ по времени t_0 и координатам $\{x_{j0}\}\in G$ начальных возмущений (в смысле определения из статьи [6], в частности в случае, когда G совпадает со всем пространством $-\infty<x_i<\infty$ — в смысле определения [7]), необходимо и достаточно, чтобы возмущенные движения $x_i(\{x_{j0}\},t_0,t)$ при $\{x_{j0}\}\in G$ были равномерно асимптотически устойчивыми в достаточно малой их окрестности (в смысле определения из статьи [8]). При этом оценки равномерности, соответствующие цитированному определению [8], должны быть равностепенными по $\{x_{j0}\}$ в каждой ограниченной замкнутой области $\overline{G}_0\in G$.

Следствием этого утверждения на основании результатов работ [6, 7, 8] является следующая теорема [1].

Теорема 1.1. Для того чтобы существовала функция Ляпунова $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенная в области G (в частности, во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$) при $0 \leqslant t < \infty$, равномерно неограниченно возрастающая при приближении к границе G (бесконечно большая [7] в случае $G \equiv \{x_i\} \in (-\infty, \infty)$), допускающая бесконечно малый высший предел и имеющая определенно отрицательную производную dv/dt в силу уравнений (1.1), необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждого возмущенного движения $x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)$ при $\{x_{j0}\} \in G$ существовала функция $v(x_0, t_0, x, t)$, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости в силу уравнений возмущенного движения, составленных для движения $x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)$, как для невозмущенного. При этом оценки определенной положительности и бесконечно малого высшего предела $v(x_0, t_0, x, t)$, как и оценки определенной отрицательности $v'(x_0, t_0, x, t)$, должны быть равностепенными для всех $t_0 \geqslant 0$, $\{x_{j0}\}$ из каждой ограниченной замкнутой области $\bar{G}_0 \in G$.

§ 2. Приведем здесь одно достаточное условие асимптотической устойчивости при больших начальных возмущениях. В теореме 1.1 предполагается, как и везде в теории устойчивости Ляпунова [1,2], что области, в которых функции $v(x_0, t_0, x, t)$ удовлетворяют условиям теоремы об асимптотической устойчивости [1] (стр. 82), не стягиваются в точку с возрастанием времени t до бесконечности. В приложениях, однако, могут встретиться случаи, когда удается построить функции Ляпунова $v(x_0, t_0, x, t)$ в окрестности возмущенной траектории

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i - x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)]^2 \leqslant \delta^2(\{x_{j0}\}, t_0, t) \qquad (\delta^2(\{x_{j0}\}, t_0, t) > 0) \tag{2.1}$$

Однако трудно доказать наперед, что радиус этой окрестности $\delta(\{x_{j0}\}, t_0, t)$ не уменьшается до нуля при $t \to \infty$. Докажем теорему, которая при определенных условиях обосновывает использование и таких функций Ляпунова $v(x_0, t_0, x, t)$.

Теорема 2.1. Решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1.1) асимптотически устойчиво относительно начальных возмущений $\{x_{j0}\} \in G$ (в частности, область G может совпадать со всем пространством $\{x_j\}$), если в окрестности (2.1) любого возмущенного движения $x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)$ при $\{x_{j0}\} \in G$ можно построить функцию Ляпунова $v(x_0, t_0, x, t)$, удовлетворяющую следующим оценкам:

$$p\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^A \leqslant v(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0; y_1, \ldots, y_n, t) \leqslant P\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^A \tag{2.2}$$

$$\frac{dv(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0; x_1(t) - x_1(\{x_{j0}\}, t_0, t), \ldots, x_n(t) - x_n(\{x_{j0}\}, t_0, t), t)}{dt} <$$

$$< -\lambda v(x_{10}, \ldots, x_{n0}; t_0, x_1, \ldots, x_n, t) \tag{2.3}$$

---

[1] В этой теореме предполагается, что правые части $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ уравнений (1.1) — непрерывны при $0 \leqslant t < \infty$. В случае кусочно-непрерывных по времени функций X_i (как это предполагалось в начале § 1) производные $dv(x_0, t_0, x(t), t)/dt$ заменяются правыми производными.

где p, P, A, λ — положительные постоянные, не зависящие от выбора точки $\{x_{j0}\} \in G$, $\delta(\{x_{j0}\}, t_0, t)$ — положительная, непрерывная при $t \geqslant t_0$ функция (которая, в частности, может стремиться к нулю при $t \to \infty$).

Доказательство. Рассмотрим ограниченную замкнутую область $G_0 \in G$. Пусть

$$T = \frac{2A}{\lambda} \ln\left[\frac{1}{q}\left(\frac{P}{p}\right)^{1/A}\right] \quad (0 < q < 1)$$

По условиям теоремы для каждой точки $\{x_{j0}\} \in \overline{G}_0$ можно указать число $\delta(\{x_{j0}\}, t_0) = \min \delta(\{x_{j0}\}, t_0, t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ такое, что вдоль траекторий (1.1) функция $v(x_0, t_0, x, t)$ удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3) в области

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i - x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)]^2 < \delta^2(\{x_{j0}\}, t_0) \qquad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$$

Непрерывная функция $\delta^2(\{x_{j0}\}, t_0)$ достигает в области $\{x_{j0}\} \in \overline{G}_0$ положительного минимума $\delta(t_0)$. Пусть

$$\eta = \frac{1}{2}\delta(t_0)\left(\frac{p}{P}\right)^{1/2A} \tag{2.4}$$

Рассмотрим две точки $\{x_j^{\times}\}$ и $\{x_j^{\times\times}\}$ из области $\overline{G}_0$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^{\times} - x_j^{\times\times})^2 < \eta^2 \tag{2.5}$$

Решение $x_i(\{x_j^{\times\times}\}, t_0, t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i(\{x_j^{\times\times}\}, t_0, t) - x_i(\{x_j^{\times}\}, t_0, t)]^2 < \delta^2(t_0)$$

Действительно, в силу (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) и по выбору числа $\delta(t_0)$ функция $v(x^*, t_0, x, t)$ определена в области

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i - x_i(\{x_j^{\times}\}, t_0, t)]^2 < \delta^2(t_0) \tag{2.6}$$

и траектория $x_i(\{x_j^{\times\times}\}, t_0, t)$ не может покинуть эту область, так как в окрестности (2.6) $dv\ (x^*, t_0, x, t)\,/\,dt \leqslant 0$ и

$$v(\{x_j^{\times}\}, t_0, \{x_k^{*} - x_k^{**}\}, t_0) < \inf v(\{x_j^{*}\}, t_0; \{x_k - x_k(\{x_j^{\times}\}, t_0, t)\}, t)$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} [\{x_i - x_i(\{x_j^{*}\}, t_0, t,)]^2 = \delta^2(t_0)$$

Следовательно, имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i(\{x_j^{\times\times}\}, t_0, t_0 + T) - x_i(\{x_j^{\times}\}, t_0, t_0 + T)]^2 < q^2 \sum_{j=1}^{n} (x_j^{\times\times} - x_j^{\times})^2 \tag{2.7}$$

которая получается интегрированием неравенства (2.3) с учетом неравенства (2.2). Таким образом, за отрезок времени $\Delta t = T$ диаметр любой сферы, погруженной целиком в область $\overline{G}_0$, должен уменьшиться по крайней мере в q раз.

Действительно, пусть

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i0})^2 \leqslant R^2 \tag{2.8}$$

такая сфера. На каждом радиусе сферы можно выделить конечное число точек, попарно удовлетворяющих условию (2.5). Расстояние между каждой парой таких точек за время $\Delta t = T$ согласно (2.7) убывает по крайней мере в q раз, а следовательно, и расстояние между центром сферы (2.8) и ее поверхностью уменьшается также по крайней мере в q раз. Аналогичным образом можно убедиться, что диаметр сферы (2.8) не может возрастать на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ до величины, большей $2(P/p)^{1/2\lambda}$. Так как при $T \to \infty$ имеем $\lim q = 0$, то заключаем, что любое движение $x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)$ с начальными данными $\{x_{j0}\}$ из области $\bar{G}_0$ (а следовательно, и из области G, так как $\bar{G}_0$ — любая область из G) асимптотически устойчиво. Из этого заключения на основании леммы § 1 и следует справедливость теоремы.

Заметим в заключение этого параграфа, что из оценок, использованных при доказательстве теоремы 2.1, можно вывести также неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)]^2 < B\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j0}^2\right) e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.9}$$

$$(t \geqslant t_0;\ \alpha > 0, B > 0 - \text{const},\ \{x_{j0}\} \in G)$$

которому удовлетворяют решения уравнений (1.1) при условиях этой теоремы.

Теорема 2.1 показывает, что задача об устойчивости при больших возмущениях будет решена положительно, если удастся решить положительно задачу об устойчивости в линейном приближении для возмущенных траекторий.

§ 3. Докажем здесь критерий асимптотической устойчивости для нелинейных систем, основанный на теореме 2.1. При выводе этого критерия используются методы решения задач устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами, основанные на применении функций Ляпунова — определенно положительных квадратичных форм с постоянными коэффициентами [1, 2, 3, 9, 10]. Критерий соответствует достаточным условиям асимптотической устойчивости, доказанным в заметке [11] для стационарных нелинейных систем.

Теорема 3.1. Если можно указать постоянную симметрическую матрицу A, имеющую положительные собственные числа и такую, что симметризованная матрица

$$\{B\}_{ik} = \left(\left\{A\,\frac{\partial X}{\partial x}\right\}_{ik} + \left\{A\,\frac{\partial X}{\partial x}\right\}_{ki}\right) \qquad \left(\left\{\frac{\partial X}{\partial x}\right\}_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right) \tag{3.1}$$

имеет отрицательные собственные числа μ_i, удовлетворяющие неравенству

$$\mu_i < -\alpha \qquad (\alpha = \text{const} > 0) \tag{3.2}$$

во всех точках пространства $\{x_i\}$ при $0 \leqslant t < \infty$, то решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1.1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях $\{x_{j0}\}$.

Примечание. Очевидно, в случае линейной системы (1.1) с постоянными коэффициентами условия теоремы 3.1 выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия Рауза-Гурвица. В случае выбора $A = E$ (E — единичная матрица) матрица B сводится к симметризованной матрице

$$\{B\}_{ik} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим сначала вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, \ldots, y_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

где $Y_i = X_i$ при $\tau_k + \vartheta_k \leqslant t \leqslant \tau_{k+1} - \vartheta_{k+1}, x_j = y_j$ и $Y_i = -\rho y_i$ при $\tau_k - \vartheta_k < t < \tau_k + \vartheta_k$ (ϑ_k — достаточно малые положительные постоянные, значения которых будут определены ниже). Очевидно, постоянную $\rho > 0$ можно выбрать таким образом (независимо от величин ϑ_k), чтобы система (3.3) также удовлетворяла условиям (3.2). Рассмотрим некоторую возмущенную траекторию $y_i(\{y_{j0}\}, t_0, t)$ системы (3.3). Составим уравнения возмущенного движения, принимая эту траекторию за невозмущенное движение. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial Y_i}{\partial y_j}\right] z_j + R_i(z_1, \ldots, z_n, t)$$

$$(z_k = y_k - y_k(\{y_{j0}\}, t_0, t), \qquad k = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

где величины $[\partial Y_i / \partial y_j]$ вычислены в точке $y_i = y_i(\{y_{j0}\}, t_0, t)$, а функции R_i при каждом значении $t \geqslant t_0$ в достаточно малой окрестности этой точки, т. е. при значениях y_k из области

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n} [y_k - y_k(\{y_{j0}\}, t_0, t]^2 \leqslant \delta^2(\beta, \{y_{j0}\}, t_0, t) \tag{3.5}$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_i| < \beta\left(\sum_{k=1}^{n} [y_k - y_k(\{y_{j0}\}, t_0, t)]^2\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

каково бы ни было заданное наперед положительное число β. Вследствие равномерной непрерывности производных $\partial Y_i / \partial y_k$ в замкнутых областях

$$\tau_k + \vartheta_k \leqslant t \leqslant \tau_{k+1} - \vartheta_{k+1}, \qquad y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant R^2$$

а следовательно, по построению системы (3.3) — в замкнутых областях

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta, y_1^2 + \ldots + y^2 n \leqslant R^2$$

(θ, R — произвольные, но фиксированные положительные числа) — величину $\delta(\beta, \{y_{j0}\}, t_0, t)$ можно выбрать как непрерывную функцию $\{y_{j0}\}, t$.

Вычислим производную функции

$$v(y_{10}, \ldots, y_{n0}; z_1, \ldots, z_n, t) = \sum_{k, l=1}^{n} a_{kl} z_k z_l$$

(a_{kl} — элементы матрицы A) в силу уравнений возмущенного движения (3.4). Имеем

$$\frac{dv(y_0, t_0, z, t)}{dt} = \sum_{k, l=1}^{n} b_{kl} z_k z_l + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial z_k} R_k$$

где b_{kl} — коэффициенты матрицы B (3.1) в точках $x_k = y_k$ $(k=1,\ldots,n)$, $\tau_k + \vartheta_k \leqslant t \leqslant \tau_{k+1} - \vartheta_{k+1}$ и $b_{kl} = -2\rho a_{kl}$ при $\tau_k - \vartheta_k < t < \tau_k + \vartheta_k$.

По условиям (3.2) производная dv/dt в области (3.5), где $\beta > 0$ — достаточно малое фиксированное число, удовлетворяет неравенству

$$\frac{dv(y_0, t_0, z, t)}{dt} < -\frac{1}{2}\min(\mu_i)\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_k(\{y_{j0}\}, t_0, t))^2 \tag{3.7}$$

Следовательно, функция v удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, на основании которой и заключаем об асимптотической устойчивости решения $y_1 = \ldots = y_n = 0$ системы (3.1) при любых начальных возмущениях $\{y_{j0}\}$. Так как оценка (3.7) не зависит от выбора чисел ϑ_k [от выбора этих чисел может зависеть лишь оценка области (3.5), где выполняются оценки (3.6) и (3.7)], то условие (2.9) выполняется равномерно для любой системы (3.1) независимо от выбора чисел $\vartheta_k > 0$. В таком случае из результатов работы [12] следует, что решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (1.1) также асимптотически устойчиво и удовлетворяет условиям (2.9), так как, выбирая числа $\vartheta_k > 0$ достаточно малыми, можно добиться того, чтобы функции Y_i отличались от функции X_i в среднем во времени на сколь угодно малую, наперед заданную величину $\gamma > 0$, т. е. чтобы выполнялось неравенство (в каждой ограниченной области G_0)

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} |X_i - Y_i|\,dt < \gamma\Big[\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big]^{1/2} \qquad (x_k = y_k)$$

где $T_0 > 0$ — фиксированная постоянная. Теорема доказана.

В книге А. М. Летова [13] (стр. 137) сформулирована задача о системах, допускающих устойчивое программное регулирование без перенастройки, т. е. задача о нахождении условий, при которых система без перенастройки осуществляла бы устойчиво (относительно больших начальных возмущений) любой программируемый режим из некоторого класса допустимых режимов. Именно дана система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) + f_i(t) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{3.8}$$

где функции X_i удовлетворяют тем же условиям, что и в системе (1.1) (см. § 1, стр. 309), $f_i(t)$ — кусочно-непрерывные функции, допускающие разрывы первого рода. Задавая различные программирующие функции $f_i(t)$, будем получать различные решения системы (3.8), которые, следуя А. М. Летову, будем называть программируемыми режимами. Программируемый режим определяется набором функций $f_i(t)$ и заданием начальных данных $\{x_{j0}\}$. В случае периодических по времени функций $f_i(t)$ одного и того же периода θ при каждом наборе функций $f_i(t)$ существует один и только один периодический режим, если только выполняются условия теоремы 3.1. Это доказывается без труда применением принципа неподвижной точки в случае сжатых отображений [14] (см., например, [15]), опираясь на факт существования при условиях теоремы 3.1 [и следовательно, условий (2.9)] функции Ляпунова [16] (стр. 260) для системы (1.1). Очевидно, в случае линейных функций X_i из асимптотической устойчивости решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (1.1) следует асимптотическая устойчивость каждого программируемого режима при любых начальных возмущениях. Покажем, что аналогичными свойствами обладают и нелинейные системы (3.8), если только выполняются условия (3.1), (3.2), т. е. справедливо следующее утверждение.

Если выполняются условия теоремы 3.1, то, каковы бы ни были функции $f_i(t)$, любое решение $x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)$ системы уравнений (3.8) асимптотически устойчиво при всех начальных возмущениях.

Действительно, уравнения возмущенного движения для решения $x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)$ системы (3.8), принятого за невозмущенный режим, имеют вид:

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_1, \ldots, z_n, t) = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) - X_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)\}, t)$$

$$(z_k = x_k - x_k(\{x_{j0}\}, t_0, t))$$

и так как $\partial Z_i / \partial z_j = \partial X_i / \partial x_j$ при $z_j = x_j - x_j(\{x_{j0}\}, t_0, t)$, то функции Z_i также удовлетворяют условиям теоремы 3.1, что и доказывает утверждение.

§ **4.** В этом параграфе доказывается критерий асимптотической устойчивости нелинейной системы, также основанный на теореме 2.1. При выводе этого критерия используются методы решения задач устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами, основанные на применении функций Ляпунова — определенно положительных квадратных форм с переменными коэффициентами [2, 3, 17].

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) && (0 \leqslant t < \infty) \\ &X_i(0, \ldots, 0, t) = 0 && (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

где функции X_i имеют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \ \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k}, \ \frac{\partial X_i}{\partial t} \quad \text{при } -\infty < x_j < \infty, \ 0 \leqslant t < \infty$$

$$(i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, n),$$

Предполагается также, что частные производные $\partial X_i / \partial x_j$ удовлетворяют неравенству $|\partial X_i / \partial x_j| < L$ при всех $\{x_j\}$.

Пусть корни $\lambda_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ уравнения

$$\left| \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\| - \lambda E \right| = 0 \tag{4.2}$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_i < -\alpha \qquad (\alpha = \text{const} > 0, \ i = 1, \ldots, n) \tag{4.3}$$

во всем пространстве $\{x_i\}$ при $0 \leqslant t < \infty$. Согласно теореме Ляпунова [1] (стр. 107) существует функция

$$v(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n, t) = \sum_{k, l=1}^{n} a_{kl}(x_1, \ldots, x_n, t) z_k z_l \tag{4.4}$$

удовлетворяющая условиям

$$\sum_{k, l=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial z_k} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} z_j \right] = - \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \tag{4.5}$$

Функция v (4.4) является определенно положительно формой $z_1, \ldots, z_n$, причем выполняются неравенства

$$p \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \leqslant v \leqslant P \sum_{k,l=1}^{n} z_k^2 \qquad (p, P = \mathrm{const} > 0)$$

Рассмотрим некоторую траекторию $x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)$ система (4.1). Уравнения возмущенного движения, составленные для этой траектории, принятой за невозмущенную, имеют вид:

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right]_{x=x(\{x_{j0}\}, t_0, t)} z_k + R_i \qquad (z_k = x_k - x_k(\{x_{j0}\}, t_0, t), t) \tag{4.6}$$

Обозначим

$$v_{\{x_{j0}\}, t_0} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(\{x_i(\{x_{j0}\}, t_0, t)\}, t) z_k z_l$$

Вычислим $dv_{\{x_{j0}\}, t_0} / dt$ в силу уравнений (4.6). Имеем в силу (4.5)

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial z_k}\left[\frac{\partial X_k}{\partial x_l}\right] z_l + \frac{\partial v_{\{x_{j0}\}, t_0}}{\partial t} + \frac{dv}{dz_k} R_k =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} z_k^2 + \sum_{i,k,l=1}^{n} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} X_i z_k z_l + \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial a_{kl}}{\partial t} z_k z_l + \frac{dv}{dz_k} R_k$$

Если корни ρ_i уравнения

$$\left| -E + \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial a_{kl}}{\partial t} \right\|_1^n - \rho E \right| = 0 \tag{4.7}$$

удовлетворяют неравенству

$$\rho_i < -\beta \quad (\beta = \mathrm{const} > 0) \tag{4.8}$$

то выполняются все условия теоремы 2.1 и, следовательно, решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы уравнений (4.1) в этом случае асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях. В случае, если функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ не зависят явно от времени, то коэффициенты a_{ij} формы (4.4) также не зависят явно от времени и уравнение (4.7) принимает вид:

$$\left| -E + \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} X_i \right\|_1^n - \rho E \right| = 0 \tag{4.9}$$

Таким образом, имеем следующий результат.

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия (4.3). Решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы уравнений (4.1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях, если корни ρ_i уравнения (4.7) (или уравнения (4.9) в стационарном случае соответственно) удовлетворяют неравенству (4.8) при всех $\{x_i\}$ и $0 \leqslant t < \infty$, где функции a_{ij} определяются из системы линейных уравнений, соответствующих равенству (4.5):

$$\sum_{l=1}^{n} \left(a_{kl} \frac{\partial X_l}{\partial x_i} + a_{il} \frac{\partial X_l}{\partial x_k}\right) = \delta_{ki} \qquad \begin{pmatrix} \delta_{ii} = 1 \\ \delta_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k \end{pmatrix}$$

Примечание. Так как величина производных $\partial a_{kl} / \partial x_i$ или производных $\partial a_{kl} / \partial t$ определяется величиной вторых частных производных $\partial^2 X_i / \partial x_j \partial x_k$ (или производных $\partial X_i / dt$ соответственно), то приходим к выводу, что условия (4.3) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = X_i(x_i, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad X_i(0, \ldots, 0) = 0 \tag{4.10}$$

если только величины вторых производных $\partial^2 X_i / \partial x_j \partial x_k$ ограничены по модулю достаточно малыми постоянными (и функции X_i меняются достаточно медленно по времени в случае, если эти функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ зависят явно от времени). Заметим, что достаточные условия устойчивости в целом, связанные с ограничениями второй производной, доказаны в статье М. Картрайт [18] для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с одним нелинейным коэффициентом. Если условия (4.8) выполняются в области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < R^2$, то решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ устойчиво относительно начальных возмущений $\{x_{j0}\}$ из области

$$x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 < \frac{p}{P} R^2$$

Теорему 4.1 можно несколько обобщить, если воспользоваться одной идеей Н.Четаева о варьировании функций Ляпунова [2], примененной в ряде работ по исследованию устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами (см., например, [17]). Именно вместо функции $v(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n, t)$, использованной выше, рассмотрим функцию

$$w = v(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n, t)\, \psi(x_1, \ldots, x_n, t)$$

Если варьированием функции ψ можно добиться выполнения условий:

1) корни уравнения

$$\left| -E + \left\| \psi \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial a_{kl}}{\partial t} \right) + a_{kl} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right\|_1^n - \rho E \right| = 0$$

удовлетворяют неравенству $\rho_i < -\beta$ $(\beta = \mathrm{const} > 0)$,

2) выполняются неравенства

$$q \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_n, t) \leqslant Q \text{ при всех } \{x_j\} \text{ и } 0 \leqslant t < \infty \quad (q > 0,\ Q = \mathrm{const} > 0)$$

то будут выполняться все условия теоремы 2.1 и, следовательно, решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (4.1) будет асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

§ 5. Рассмотрим уравнения с запаздываниями

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t), \ldots, x_n(t);\ x_1(t - h_{i1}), \ldots, x_n(t - h_{in}), t) \quad (0 \leqslant h_{ij} \leqslant h) \tag{5.1}$$

где функции $X_i(y_1, \ldots, y_{2n}, t)$ удовлетворяют условиям

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \right| \leqslant L,\ X_i(0, \ldots, 0, t) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, 2n \\ -\infty < y_j < \infty \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Если при доказательствах вместо теоремы Ляпунова [1] (стр. 82) воспользоваться обобщениями этой теоремы на уравнения (5.1) [19], то получим критерии, аналогичные доказанным выше, для обыкновенных уравнений. Приведем, например, утверждение, аналогичное теореме 3.1. Пусть $A = \| a_{ij} \|_1^n$ — симметричная матрица, собственные числа которой $0 < \lambda_{\min} \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{\max}$. Если выполняется условие

$$\sum_{i,\, j=1}^{2n} d_{ij} z_i z_j \leqslant -\delta \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \quad \text{при} \quad \sum_{j=n+1}^{2n} z_j^2 < \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \tag{5.3}$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left[a_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial Y_j} + a_{jk} \frac{\partial X_k}{\partial Y_j} \right] \quad \text{при } i \leqslant n,\ j \leqslant n$$

$$d_{ij} = 0 \text{ при } i \text{ и } j > n; \qquad d_{ij} = \tfrac{1}{2} \sum a_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial Y_j} \text{ при } i < n,\ j > n$$

то решение $x_i = 0$ системы (5.1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Поступила 4 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
3. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. физ.-мат. об-ва при Казанском гос. университете, т. 8, 1936—1937.
4. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
5. Красовский Н. Н. К теории второго метода А. М. Ляпунова исследования устойчивости движения. ДАН СССР, т. CIX, № 3, 1956.
6. Курцвейль Я. Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чех. мат. журнал, т. 5 (80), 1955.
7. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.
8. Малкин И. Г. К вопросу об обращении теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
9. Wazenski T. Studia math., т. 10, 1948, стр. 48—59.
10. Зубов В. И. Некоторые достаточные признаки устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.
11. Красовский Н. Н. Об устойчивости в целом решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVIII, вып. 6. 1954.
12. Гермаидзе В. Е. Об устойчивости по первому приближению. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
13. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат, 1954.
14. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. МГУ, 1952.
15. Antosiewicz H. A. Forced periodic solutions of systems of differential-equations. Ann. Math., vol. 57, № 2, 1953.
16. Красовский Н. Н. Обращение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
17. Разумихин Б. С. Об устойчивости неустановившихся движений. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
18. Cartwright M. L. On the stability of solutions of certain differential equations of the fourth order. Quarterly Journ. of Mechanics and Applied Math., vol. IX, № 2, 1956.
19. Красовский Н. Н. Об асимптотической устойчивости систем с последействием, ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.