Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

О РАБОТАХ А. М. ЛЯПУНОВА ПО ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА [1]

В развитии математики за последнее столетие тесно переплетаются два направления.

С одной стороны, это — направление, преследующее математическую строгость, точность формулировок. В наше время оно достигло необычайных успехов. Стремление к наибольшей ясности влечет за собой большую формализацию всего предмета математики развитие теории алгорифмов. С другой стороны, — это так называемая «содержательная» математика (этот термин получил право гражданства в современной литературе, см. Клейн — «Математика»), достигшая за последние полвека поразительных успехов.

Успехи «содержательной» математики были бы невозможны без современной теории функций, теории множеств и других абстрактных математических дисциплин, уходящих корнями в математическую логику и связанных с самыми основами математического мышления.

Нельзя забывать, что сама современная теория функций возникла из анализа как вспомогательная ветвь, нужная, прежде всего, для решения задач математической физики.

Борьба противоположных стремлений, хотя не отделимых одно от другого, нашла воплощение в наличии математиков различного склада и разных направлений.

Но поразительно, что в лице крупных, наиболее плодотворно работавших математиков прошлого, мы почти всегда встречаем ученых, одновременно с поразительной отчетливостью ставивших вопросы обоснования и давших образцы глубочайших содержательных открытий. Такими были Коши, Вейерштрассе в XIX веке и таков же в конце этого века и в начале нашего, двадцатого, был Александр Михайлович Ляпунов.

Настоящее краткое сообщение посвящено значению работ Ляпунова по теории потенциала.

Задачи Дирихле и Неймана, служившие предметом исследования Ляпунова как в его время, так и позже, изучались методами теории потенциала. Рассматривались потенциалы простого и двойного слоев, взятые по достаточно гладким поверхностям, причем свойства этих поверхностей не изучались глубоко.

Ляпунов подошел к этому вопросу по-новому — он увидел важный и интересный предмет исследования в не очень отчетливом многообразии

---

[1] Сообщение на совместном заседании президиума Академии наук СССР, отделений технических и физико-математических наук АН СССР, Московского государственного университета, Московского математического общества, Института механики АН СССР, Института автоматики и телемеханики АН СССР, посвященном столетию со дня рождения А. М. Ляпунова, 6 июня 1957 г. в Москве.

различных поверхностей и открыл в нем замечательный класс, получивший его имя: класс поверхностей Ляпунова.

Нет смысла напоминать сейчас в деталях характерные свойства поверхностей Ляпунова и основные теоремы, относящиеся к этим поверхностям. Укажем лишь самое главное. Ляпунов накладывает на рассматриваемые им поверхности два условия: локальный гомеоморфизм с куском плоскости, разделяющей две полусферы (локальная однозначность функции $z(x, y)$ в местной координатной системе), и характерный модуль непрерывности нормали к поверхности $A\,r^{\delta}$.

Эти два свойства оказываются достаточными для получения всего того, что нужно для обоснования теории потенциалов простого и двойного слоя и для построения решений основных задач для уравнения Лапласа.

Из них вытекает существование предельных значений у потенциала двойного слоя при непрерывной плотности, существование самого потенциала двойного слоя в точках поверхности, существование нормальной производной от потенциала простого слоя с непрерывной плотностью и при некоторых дополнительных ограничениях на модуль непрерывности плотности, существование непрерывных касательных производных потенциала простого слоя.

В двадцатых годах XIX века теории интегральных уравнений еще не существовало. Краевые задачи решались в то время при помощи так называемого принципа Неймана. Принцип этот состоял в доказательстве сходимости к постоянной итерации

$$\varphi_n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\,\varphi_{n-1}dS$$

для любой начальной функции φ_0 с ядром, входящим в выражения предельного значения потенциала двойного слоя. При помощи искусственных приемов к сходимости таких итераций сводилось исследование решения задач Дирихле и Неймана.

Принципом этим пользовался и Ляпунов. Сейчас роль этого принципа заменила теория интегральных уравнений. Многое было в связи с этим пересмотрено, однако все, что было сделано Ляпуновым для теории потенциала, сохранило свое значение, вошло в современную теорию и представляет собой основу изложения всех этих вопросов.

Получив решения основных задач, Ляпунов дает глубокое исследование свойств этих задач, а в частности, свойств решений задачи Дирихле, в которой его специально интересует возможность применения формулы Грина, т. е. существование нормальных производных у решения.

Его, как всегда, не удовлетворяет состояние этого вопроса, и в том же исследовании «О некоторых вопросах, относящихся к «задаче Дирихле», где им дана общая теория потенциала, он осуществляет блестящую программу установления дифференциальных свойств решений этой задачи вблизи границы.

Вкратце остановимся на его основной идее, которая за истекшие почти 70 лет не потеряла своего значения, и на которой и сейчас обычно основывалось изложение теории потенциала.

Исходной точкой его рассуждений послужила формула Грина

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right]dS + \iiint\frac{\Delta u}{r}\,d\Omega \qquad (1)$$

тождественно верная для любой функции, для которой интегралы справа имеют смысл. Эта формула, содержащая четыре члена, позволяет сравнить потенциал двойного слоя

$$\frac{1}{4\pi}\iint u\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dS \tag{2}$$

с функцией, равной $u\,(P_0)$ внутри области и нулю вне области, и связать свойства найденного потенциала двойного слоя в целом со свойствами решения задачи Дирихле. Эти дифференциальные свойства оказываются одинаковыми.

Кроме этого, Ляпунов делает еще одно важное употребление формулы Грина. В том случае, когда функция u, заданная на поверхности S, может быть продолжена с нужными дифференциальными свойствами в некоторую область, содержащую S, формула Грина дает возможность выразить

$$\iint u\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dS$$

через остальные члены формулы (1) и опять-таки свести исследование его дифференциальных свойств к дифференциальным свойствам потенциала простого слоя, который достаточно хорошо известен.

Таким образом, в руках Ляпунова оказался мощный инструмент, пользуясь которым, он доказывает ряд свойств функции Грина, устанавливает справедливость представленных решений задачи Дирихле через эту функцию, доказывает ее симметричность и т. д.

В дальнейшем развитии науки эти результаты явились совершенно фундаментальными. На них основано, в частности, ставшее повсеместным обоснование метода разделения переменных в уравнениях эллиптического и параболического типа.

Свойства интегральных уравнений с симметричным ядром, к которым приводится задача отыскания собственных функций уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

найденные Гильбертом и послужившие началом общей теории самосопряженных и далее эрмитовых операторов, выросли, в конечном итоге, из симметрии функции Грина.

Мы остановились лишь на важнейших результатах Ляпунова в теории уравнений математической физики. Созданный им аппарат явился базой, на которой и по сию пору основывается теория потенциала.

Мы попытались показать роль Ляпунова в развитии современной теории потенциала. Как ясно из всего изложенного, этот замечательный многогранный ум, исключительно сильный в области открытия качественно новых результатов математики, был также тем, кто сумел внести необычайную ясность в самые основы теории потенциала, основы, на которых базируется современная математическая физика и которые с той поры вошли в арсенал средств современного анализа.

В этом блестящем соединении глубины новых открытий с ясностью мысли и силой логики в обоснованиях научных истин величие и сила замечательного ученого Александра Михайловича Ляпунова.

С. Л. Соболев