О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА, ИЗОБРАЖАЕМЫХ В ОБЛАСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ ПОВЕРХНОСТЬЮ

И. М. Юрьев

(Москва)

Дается в линеаризированной постановке общее решение уравнения течений газа указанного класса.

К течениям этого класса принадлежат прежде всего конические течения. Уравнение конических течений дано Буземаном [1] в виде

$$[a^2(1+w_v^2)-(v+ww_v)^2]\,w_{uu}+2\,[uv+vww_u+uww_v-(a^2-w^2)\,w_uw_v]\,w_{uv}+$$
$$+[a^2(1+w_u^2)-(u+ww_u)^2]\,w_{vv}=0 \tag{1}$$

где a — скорость звука, u, v, w — составляющие вектора скорости на декартовы оси координат x, y, z. Скорость набегающего потока параллельна оси z. Область течения строится по формулам

$$x=-zw_u, \qquad y=-zw_v \tag{2}$$

Но рассматриваемый класс течений не исчерпывается коническими течениями. Получение других течений этого типа связано с функцией Лежандра $\chi=ux+vy+wz-\varphi$, названной для данной задачи функцией «размещения». Исследованию таких более общих течений посвящена работа А. А. Никольского [2]. Согласно работе [2] уравнение для функций размещения имеет следующий вид:

$$[a^2(1+w_v^2)-(v+ww_v)^2]\,\chi_{uu}+2\,[uv+vww_u+uww_v-(a^2-w^2)\,w_uw_v]\,\chi_{uv}+$$
$$+[a^2(1+w_u^2)-(u+ww_u)^2]\,\chi_{vv}=0 \tag{3}$$

причем $w(u,v)$ продолжает удовлетворять уравнению (1).

Пространство течения строится при этом по формулам

$$\chi_u=x+zw_u, \qquad \chi_v=y+zw_v \tag{4}$$

Тривиальное решение $\chi_0=c_1u+c_2v+c_3$ уравнения (3) соответствует коническим течениям (c_i — произвольные постоянные). Постоянным значениям u, v, w соответствует в пространстве течения согласно (4) прямая линия.

В общем виде уравнение конических течений решено Буземаном в линеаризированной постановке задачи [3]. Решение уравнения (3) относительно функции размещения будем искать также в линеаризированной постановке. Линеаризируя уравнение (1), получим

$$(1-\beta^2w_v^2)\,w_{uu}+2\beta^2w_uw_vw_{uv}+(1-\beta^2w_u^2)\,w_{vv}=0 \qquad (\beta^2=M_\infty^2-1) \tag{5}$$

На примере конических течений покажем, что уравнение (5) соответствует линеаризированному уравнению потенциала скорости φ. Действительно, переходя от $w(u,v)$ к Φ по формуле

$$\Phi=uw_u+vw_v-w, \qquad w_u=-x/z=\mu \qquad w_v=-y/z=\nu \tag{6}$$

получим

$$(1-\beta^2\mu^2)\,\Phi_{\mu\mu}-2\beta^2\mu\nu\Phi_{\mu\nu}+(1-\beta^2\nu^2)\,\Phi_{\nu\nu}=0 \tag{7}$$

Но согласно (6)

$$d(z\Phi)=-d\varphi-xdu-ydv-zdw=-d\varphi-(x+zw_u)\,du-(y+zw_v)\,dv=-d\varphi$$

Следовательно,

$$\Phi=-\varphi/z \tag{8}$$

Если перейти в уравнении (7) от Φ к φ и к переменным x, y, z, то получим

$$\beta^2\varphi_{xx}-\varphi_{yy}-\varphi_{zz}=0 \tag{9}$$

Линеаризированное уравнение для функции χ имеет вид:

$$(1-\beta^2w_v^2)\,\chi_{uu}+2\beta^2w_uw_v\chi_{uv}+(1-\beta^2w_u^2)\chi_{vv}=0 \tag{10}$$

Для решения уравнения (10) применим общий метод нахождения промежуточного интеграла, т. е. нахождения такой функции V от пяти независимых переменных u, v, χ, p, q ($p=\chi_u$, $q=\chi_v$), которая принимает постоянное значение вдоль каждой характеристики выбранного семейства [4].

Система уравнений первого семейства характеристик (10) имеет следующий вид:

$$dp + \lambda_2 dq = 0, \qquad d\chi = pdu + qdv, \qquad dv = \lambda_1 du \tag{11}$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{dv}{du} = \frac{\beta^2 w_u w_v \pm \sqrt{\beta^2 (w_u^2 + w_v^2) - 1}}{1 - \beta^2 w_v^2} \tag{12}$$

Из условия

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u} du + \frac{\partial V}{\partial v} dv + \frac{\partial V}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial q} dq = 0$$

вдоль характеристик (11) получаем следующую систему уравнений относительно V:

$$X_1 = \frac{\partial V}{\partial u} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial v} + (p + \lambda_1 q) \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0, \qquad X_2 = -\lambda_2 \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial q} \tag{13}$$

Для существования нетривиального промежуточного интеграла необходимо и достаточно, чтобы число независимых уравнений, образующих полную систему для V, было меньше числа независимых переменных. Третье независимое уравнение находится вычислением оператора

$$X_2(X_1) - X_1(X_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial V}{\partial \chi} + \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial u} + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial v} \right) \frac{\partial V}{\partial p} = 0 \tag{14}$$

Непосредственным вычислением при помощи формул (12) найдем, что коэффициент при $\partial V / \partial p$ в уравнении (14) равен произведению двух множителей, одним из которых является выражение

$$(1 - \beta^2 w_v^2) w_{uu} + 2\beta^2 w_u w_v w_{uv} + (1 - \beta^2 w_u^2) w_{vv}$$

Отсюда, принимая во внимание (5), имеем

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial u} + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial v} = 0 \tag{15}$$

Следовательно, $\partial V / \partial \chi = 0$ и полная система уравнений будет такой:

$$\frac{\partial V}{\partial u} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial v} = 0, \qquad -\lambda_2 \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \tag{16}$$

Интегрирование системы (16) сводится к интегрированию системы уравнений

$$\lambda_1 du = dv, \qquad -\frac{dp}{\lambda_2} = \frac{dq}{1} \tag{17}$$

Отсюда получим

$$V(p + \lambda_2 q, \xi) = \text{const} \quad \text{или} \quad p + \lambda_2 q = f(\xi) \tag{18}$$

где f — произвольная функция своего аргумента, характеристика $\xi(u, v) = \text{const}$ является решением первого уравнения системы (17). Но

$$p + \lambda_2 q = \frac{\partial \chi}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial \chi}{\partial v}$$

является производной вдоль характеристики второго семейства $\eta = \text{const}$. Следовательно,

$$\chi = F_1(\xi) + F_2(\eta) \tag{19}$$

где F_1, F_2 — произвольные функции.

Поступила 16 VIII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Busemann A. Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung. Luftfahrtforschung Bd. XIX, 1942.
2. Никольский А. А. О классе адиабатических течений газа, которые в пространстве годографа скорости изображаются поверхностями. Труды ЦАГИ, 1949.
3. Busemann A. Infinitesimale kegelige Überschallströmung. Schriften der Deut Akad. d. Luftfahrtforschung, 76, H. 3, 1943.
4. Гурса. Курс математического анализа, т. III, ч. I, ГТТИ, 1933.