АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ ЧАПЛЫГИНА И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

С. К. Асланов

(Саратов)

В исследованиях сжимаемых потоков важную роль играют функции Чаплыгина [1]

$$\psi_\nu(\tau)=\tau^{\nu/2}F(a_\nu,\ b_\nu,\ \nu+1;\ \tau)\qquad\left(\varkappa=\frac{w}{w_{\max}}\right)$$

F обозначает гипергеометрическую функцию, параметры которой связаны следующим образом:

$$a_\nu+b_\nu=\nu-\beta,\quad a_\nu b_\nu=-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)\beta,\quad \beta=(\varkappa-1)^{-1}\tag{0.1}$$

При этом w — модуль скорости, $\varkappa$ — показатель адиабаты.

Для оценки сходимости и суммирования рядов, представляющих основные аэродинамические характеристики потока, необходимо знать асимптотическое поведение функций $\psi_\nu(\tau)$ в случае больших значений действительного ν.

Согласно Чаплыгину [1] указанные функции удовлетворяют уравнению

$$\psi_\nu''(\tau)+\frac{1+(\beta-1)\tau}{\tau(1-\tau)}\psi_\nu'(\tau)-\frac{\nu^2}{4}\frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau^2(1-\tau)}\psi_\nu(\tau)=0\tag{0.2}$$

В настоящей работе будут рассматриваться два линейно независимых решения этого уравнения $\psi_\nu(\tau)$ и $\psi_{-\nu}(\tau)$ при большом действительном $\nu>0$. Основная трудность предстоящего исследования связана с тем, что коэффициент при $\psi_\nu(\tau)$ в уравнении (0.2) имеет простой нуль в точке $\tau=\tau_s=(2\beta+1)^{-1}$, т. е. при звуковой скорости. Последнее приводит к изменению характера асимптотики с переходом через скорость звука. Кроме того, $\psi_{-\nu}(\tau)$ имеет простые полюсы в точках $\nu=1,\ 2,\ \ldots$ Что касается дозвукового, звукового и сверхзвукового режимов в отдельности, то для них Лайтхилл [7] и Зейферт [8] вычислили первые члены асимптотических разложений интересующих нас функций. В околозвуковом случае известно асимптотическое представление функции $\psi_\nu(\tau)/\psi_\nu(\tau_s)$, найденное Ф. И. Франклем [5]. Однако, область его применения ограничена дозвуковыми $\tau\ (\tau<\tau_s)$ и положительными индексами ν. Ниже делается попытка установить единообразные асимптотические соотношения для функций Чаплыгина $\psi_{\pm\nu}(\tau)$ и $\psi_{\pm\nu}'(\tau)$ во всем интервале $0<\tau<1$ так, чтобы известные в литературе асимптотики вытекали из наших как частные случаи.

§ 1. Асимптотические формулы в дозвуковой области $(\tau<\tau_s)$. Лайтхиллом [7] найдено асимптотическое представление

$$\psi_\nu(\tau)=\left[\frac{(1-\tau)^{2\beta+1}}{1-\tau/\tau_s}\right]^{1/4}e^{\nu s}\left\{1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\tag{1.1}$$

для $\tau<\tau_s$, где

$$s(\tau)=\sigma+\tau_s^{-1/2}\operatorname{ar\,th}\left(\frac{\tau_s-\tau}{1-\tau}\right)^{1/2}-\operatorname{ar\,th}\left(\frac{1-\tau/\tau_s}{1-\tau}\right)^{1/2}\tag{1.2}$$

$$\sigma=s(\tau_s)=-\tau_s^{-1/2}\operatorname{ar\,th}\tau_s^{1/2}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Для тех же τ Зейферт [8] получил асимптотические формулы

$$\psi_{-\nu}(\tau)=\left[\frac{(1-\tau)^{2\beta+1}}{1-\tau/\tau_s}\right]^{1/4}e^{-\nu s}\left\{1+\frac{1}{\sin\nu\pi}O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\tag{1.3}$$

$$\psi_\nu'(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left\{\left[\frac{(1-\tau)^{2\beta+1}}{1-\tau/\tau_s}\right]^{1/4}e^{\nu s}\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\tag{1.4}$$

Покажем, что приведенный результат может быть распространен на функцию $\psi_{-\nu}'(\tau)$. Для этого вычислим определитель Вронского двух линейно независимых решений (0.2). Последний, как известно из общей теории дифференциальных уравнений, выражается через коэффициенты уравнения формулой Лиувилля

$$w\{\psi_\nu(\tau),\ \psi_{-\nu}(\tau)\} = \psi_\nu(\tau)\,\psi_{-\nu}'(\tau) - \psi_\nu'(\tau)\,\psi_{-\nu}(\tau) = C\,\frac{(1-\tau)^\beta}{\tau}$$

Неопределенную постоянную C находим, применяя полученное соотношение для $\tau = 0$. И если воспользоваться формулой [2]

$$\frac{d}{dz}F(a,\ b,\ c;\ z) = \frac{ab}{c}\,F(a+1,\ b+1,\ c+1;\ z)$$

и (0.1), то окончательно будем иметь $C = -\nu$ или

$$w\{\psi_\nu(\tau),\ \psi_{-\nu}(\tau)\} = -\nu\,\frac{(1-\tau)^\beta}{\tau} \tag{1.5}$$

Подставляя сюда (1.1), (1.3) и (1.4), легко определяем искомую асимптотику:

$$\psi_{-\nu}'(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left\{\left[\frac{(1-\tau)^{2\beta+1}}{1-\tau/\tau_s}\right]^{1/4} e^{-\nu s}\right\}\left\{1 + \frac{1}{\sin\nu\pi}\,O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \tag{1.6}$$

§ 2. Асимптотическое представление функций $\psi_\nu(\tau)/\psi_\nu(\tau_s)$ и их производных в случае $\tau \leqslant \tau_s$. Введем вместо τ переменную Ф. И. Франкля [5]

$$\eta = \left[\frac{3}{4}\int_\tau^{\tau_s}\sqrt{\frac{1-\tau/\tau_s}{1-\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau}\right]^{2/3} \tag{2.1}$$

которая, как нетрудно установить, связана с S соотношением $\eta = [{}^3/_2(S-\sigma)]^{2/3}$. Тогда уравнение (0.2) примет вид:

$$\zeta_\nu''(\eta) + b(\eta)\,\zeta_\nu'(\eta) - \nu^2\eta\zeta_\nu(\eta) = 0 \tag{2.2}$$

если обозначить $\zeta_\nu(\eta) = \psi_\nu(\tau)/\psi_\nu(\tau_s)$ и

$$b(\eta) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\eta}\ln\frac{K}{\eta}, \qquad K = \frac{1-\tau/\tau_s}{(1-\tau)^{2\beta+1}} \tag{2.3}$$

Кроме того, функция $\zeta_\nu(\eta)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\zeta_\nu(0) = 1, \qquad \zeta_\nu(+\infty) = 0 \tag{2.4}$$

непосредственно следующим из ее вида.

В интересах дальнейшего исследования удобно в уравнении (2.2) избавиться от члена с первой производной. Тогда, разыскивая решение в форме $\zeta_\nu(\eta) = z(\eta)\,y(\eta)$, будем иметь

$$y''(\eta) + [q(\eta) - \nu^2\eta]\,y(\eta) = 0, \qquad q(\eta) = -\frac{b^2}{4} - \frac{b'}{2} \tag{2.5}$$

если с точностью до множителя

$$z(\eta) = (\eta/K)^{1/4}$$

Для двух линейно независимых решений уравнения (2.5) с начальными условиями

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = \nu^{2/3}$$

А. А. Дородницыным [3] найдена асимптотика при большом ν и $\eta > 0$:

$$y_1(\eta) = U_1(\nu^{2/3}\eta)\left\{1 + \frac{1}{2\nu}\int_0^\eta\frac{q(x)}{\sqrt{x}}\,dx + O\left(\nu^{-\frac{4}{3}}\right)\right\}$$

$$y_2(\eta) = U_2(\nu^{2/3}\eta)\left\{1 + \frac{1}{2\nu}\int_0^\eta\frac{q(x)}{\sqrt{x}}\,dx + O\left(\nu^{-\frac{4}{3}}\right)\right\}$$

Причем, функции $U_1(s)$ и $U_2(s)$ представляют собой два линейно независимых решения уравнения Эйри [4]

$$U''(s) - sU(s) = 0$$

удовлетворяющие условиям

$$U_1(0) = 1, \quad U_1'(0) = 0, \quad U_2(0) = 0, \quad U_2'(0) = 1$$

Естественно любое решение (2.5) выразить в виде линейной комбинации

$$\zeta_\nu(\eta) = z(\eta)\, y(\eta) = (\eta/K)^{1/4} \{C_1 y_1(\eta) + C_2 y_2(\eta)\} \tag{2.6}$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из условий (2.4). Так, учитывая, что для околозвуковых $\tau\,(\eta \to 0)$

$$\eta = \frac{1}{(\varkappa+1)^{2/3}} \; \frac{1 - \tau/\tau_s}{1 - \tau}$$

и выполняя $\zeta_\nu(0) = 1$, будем иметь $C_1 = (\varkappa+1)^{1/6}(1-\tau_s)^{-1/2\beta}$.

Далее, удобнее перейти от $U_1(s)$ и $U_2(s)$ к другим линейно независимым решениям $u(s)$ и $v(s)$ уравнения Эйри, которые исследованы и табулированы В. А. Фоком [4] и имеют вронскиан

$$u'(s)\, v(s) - u(s)\, v'(s) = 1 \tag{2.7}$$

Тогда (2.6) для больших ν примет вид:

$$\begin{aligned}\zeta_\nu(\eta) = \chi \Bigg\{ \left[u'(0) - \frac{C_2}{C_1} u(0) \right] v(\nu^{2/3}\eta) + \\ + \left[\frac{C_2}{C_1} v(0) - v'(0) \right] u(\nu^{2/3}\eta) \Bigg\} \left\{ 1 + \frac{1}{2\nu} \int_0^\eta \frac{q(x)}{\sqrt{x}}\, dx + O(\nu^{-4/3}) \right\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\chi = \frac{(\varkappa+1)^{1/6}}{(1-\tau_s)^{\beta/2}} \left(\frac{\eta}{K} \right)^{1/4} \tag{2.9}$$

Чтобы выполнить условие $\zeta_\nu(+\infty) = 0$, необходимо уничтожить слагаемое с $u(\nu^2/3\eta)$, ибо эта функция обращается в бесконечность при $\eta \to +\infty$, в то время как $v(\nu^2/3\eta)$ стремится в бесконечности к нулю быстрее, чем любая отрицательная степень [4]. Отсюда $C_2/C_1 = v'(0)/v(0)$ или окончательно асимптотика $\zeta_\nu(\eta)$ для $\eta \geqslant 0$ представляется в виде

$$\zeta_\nu(\eta) = \chi \frac{V(\nu^{2/3}\eta)}{V(0)} \left\{ 1 + \frac{1}{2\nu} \int_0^\eta \frac{q(x)}{\sqrt{x}}\, dx + O(\nu^{-4/3}) \right\} \tag{2.10}$$

В частном случае околозвуковых скоростей χ согласно (2.9) можно заменить единицей, а $q(x) \approx q(0)$ и (2.10) совпадает по форме с разложением Ф. И. Франкля [5].

Асимптотическую формулу производной $\zeta_\nu'(\eta)$ легко получить, воспользовавшись соотношениями А. А. Дородницына [3]

$$y_1'(\eta) = \nu^{2/3} U_1'(\nu^{2/3}\eta) \left\{ 1 + \frac{1}{2\nu} \int_0^\eta \frac{q(x)}{\sqrt{x}}\, dx + O(\nu^{-4/3}) \right\} - \tfrac{1}{2}\, U_1(\nu^{2/3}\eta)\, O(\nu^{-2/3})$$

$$y_2'(\eta) = \nu^{2/3} U_2'(\nu^{2/3}\eta) \left\{ 1 + \frac{1}{2\nu} \int_0^\eta \frac{q(x)}{\sqrt{x}}\, dx + O(\nu^{-4/3}) \right\} - \tfrac{1}{2}\, U_2(\nu^{2/3}\eta)\, O(\nu^{-2/3})$$

После дифференцирования (2.6) и подстановки туда результатов А. А. Дородницына получим искомую асимптотику для $\eta \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\zeta_\nu'(\eta) = \chi \Bigg[\nu^{2/3} \frac{V'(\nu^{2/3}\eta)}{V(0)} \left\{ 1 + \frac{1}{2\nu} \int_0^\eta \frac{q(x)}{\sqrt{x}}\, dx + O(\nu^{-4/3}) \right\} - \\ - \frac{1}{2} \frac{V(\nu^{2/3}\eta)}{V(0)} O(\nu^{-2/3}) \Bigg] + \frac{(\varkappa+1)^{1/6}}{(1-\tau_s)^{\beta/2}} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\eta}{K} \right)^{1/4} \frac{V(\nu^{2/3}\eta)}{V(0)}\end{aligned} \tag{2.11}$$

§ 3. Асимптотические формулы для функции $\zeta_{-\nu}(\eta)$ и ее производной в случае $\tau \leqslant \tau_s$. Функция $\zeta_{-\nu}(\eta)$, являясь решением уравнения (2.2), должна удовлетворять условиям

$$\zeta_{-\nu}(0) = 1, \qquad \zeta_{-\nu}(+\infty) = \infty \tag{3.1}$$

Если принять во внимание совпадение первого из этих условий с (2.4), то $\zeta_{-\nu}(\eta)$ можно представить по аналогии с предыдущим параграфом формулой (2.8). Из последней непосредственно видно, что второе условие (3.1) выполнено. Поэтому для определения постоянной C_2 нужно задать $\zeta_{-\nu}'(0)$. Указанную величину нетрудно выразить при помощи определителя Вронского (1.5), записав его в такой форме:

$$\left.\frac{d\eta}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_s} \{\zeta_\nu'(0) - \zeta_{-\nu}'(0)\} = \frac{\nu}{\tau_s}\frac{(1-\tau_s)^\beta}{\psi_\nu(\tau_s)\,\psi_{-\nu}(\tau_s)} \tag{3.3}$$

Как показано Лайтхиллом [7], входящие сюда значения функций $\psi_\nu(\tau_s)$ и $\psi_{-\nu}(\tau_s)$ имеют следующее асимптотическое выражение:

$$\psi_\nu(\tau_s) = a\nu^{1/6}e^{\nu\sigma}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}$$

$$\psi_{-\nu}(\tau_s) = a\nu^{1/6}e^{-\nu\sigma}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\nu\pi\right\}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}$$

где

$$a = 2^{\frac{2\varkappa-1}{2(\varkappa-1)}}(\varkappa+1)^{-\frac{\varkappa+2}{6(\varkappa-1)}}\pi^{1/2}3^{-2/3}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}^{-1}$$

и $\Gamma(2/3)$ — гамма-функция.

Асимптотику $\zeta_\nu'(0)$ легко получить из (2.10):

$$\zeta_\nu'(0) = \frac{V'(0)}{V(0)}\nu^{2/3} + \frac{2\varkappa+5}{10(\varkappa+1)^{1/3}} + O(\nu^{-2/3}) \tag{3.3}$$

Попутно заметим, что в асимптотическом разложении, найденном Ф. И. Франклем [6] для $\zeta_\nu'(0)$, второй член выражен в виде

$$\frac{2\varkappa+5}{2(\varkappa+1)^{1/3}}\int\limits_0^\infty \xi^2\frac{V^2(\xi)}{V^2(0)}\,d\xi$$

Формула (3.3) наводит на мысль, что интеграл может быть вычислен. В самом деле, переход к бесселовой функции [4] $K_{1/3}(2/3\xi^{3/2})$ и использование интегрального представления ее квадрата [2] дают

$$\int\limits_0^\infty \xi^2\frac{V^2(\xi)}{V^2(0)}\,d\xi = \frac{1}{5}$$

Далее, для околозвуковых τ сразу можно найти

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{(\varkappa+1)^{1/3}}{2\tau}$$

Чтобы асимптотически представить $\zeta_{-\nu}'(0)$, естественно действовать по аналогии с § 2. Тогда асимптотика $\zeta_{-\nu}'(0)$ примет вид:

$$\zeta_{-\nu}'(\eta) = \chi\left\{\left[u'(0) - \frac{C_2}{C_1}u(0)\right]V'(\nu^{2/3}\eta) + \left[\frac{C_2}{C_1}V(0) - \right.\right.$$

$$\left.\left.-V'(0)\right]u'(\nu^{2/3}\eta)\right\}\nu^{2/3}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} + \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\eta}{K}\right)^{1/4}\sqrt{u^2(\nu^{2/3}\eta) + V^2(\nu^{2/3}\eta)}\,O(1) \tag{3.4}$$

Отсюда для $\eta = 0$, используя (2.7), имеем

$$\zeta_{-\nu}'(0) = \frac{C_2}{C_1}\nu^{2/3} + O(1)$$

Подстановка всего найденного в (3.2) дает искомую величину с точностью до $\nu^{-2/3}$:

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{V'(0)}{V(0)}+\frac{2(1-\tau_s)^\beta}{(\varkappa+1)^{1/3}\alpha^2}-\frac{\sin\nu\pi}{\sin(\nu+1/6)\pi}+O(\nu^{-2/3})$$

После замены α и $V(0)=\pi^{1/2}3^{-2/3}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}^{-1}$ получаем

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{V'(0)}{V(0)}+\frac{1}{2V^2(0)}\,\frac{\sin\nu\pi}{\sin(\nu+1/6)\pi}+O(\nu^{-2/3})$$

в результате чего асимптотические формулы ($\nu\to\infty$) при $\eta\geqslant 0$ для отрицательных индексов представятся в форме

$$\zeta_{-\nu}(\eta)=\chi\left\{\left[\frac{V(\nu^{2/3}\eta)}{V(0)}+\frac{1}{2V^2(0)}\left[V(0)\,u(\nu^{2/3}\eta)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-u(0)\,V(\nu^{2/3}\eta)\right]\frac{\sin\nu\pi}{\sin(\nu+1/6)\pi}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]+\sqrt{u^2(\nu^{2/3}\eta)+V^2(\nu^{2/3}\eta)}\,O(1)\right\} \quad (3.5)$$

$$\zeta_{-\nu}'(\eta)=\chi\left\{\frac{V'(\nu^{2/3}\eta)}{V(0)}+\frac{1}{2V^2(0)}\left[V(0)\,u'(\nu^{2/3}\eta)-u(0)\,V'(\nu^{2/3}\eta)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\sin\nu\pi}{\sin(\nu+1/6)\pi}\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}+\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\eta}{K}\right)^{1/4}\sqrt{u^2(\nu^{2/3}\eta)+V^2(\nu^{2/3}\eta)}\,O(1)$$

В случае околозвуковых скоростей эти формулы несколько упрощаются, так как χ заменяется единицей. Оценка точности найденной асимптотики проводилась нами для $\nu=30.5$. Точные значения $\psi_{-\nu}(\tau)=\psi_{-\nu}(\tau_s)\,\zeta_{-\nu}(\eta)$ брались из таблиц Т. Черри[9]. При этом получены следующие результаты:

$$\left.\begin{aligned}\psi_{-30.5}(0.16)&=5.5276\cdot 10^{15}\\ \psi_{-30.5}(0.14)&=10.3991\cdot 10^{15}\end{aligned}\right\}\ \text{по таблицам}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{-30.5}(0.16)&=5.5294\cdot 10^{15}\\ \psi_{-30.5}(0.14)&=10.3656\cdot 10^{15}\end{aligned}\right\}\ \text{согласно асимптотике}$$

§ 4. Сверхзвуковая асимптотика функций $\zeta_{\pm\nu}(\eta)$ $(\tau\geqslant\tau_s)$. Область применения выведенных выше формул ограничена дозвуковыми τ. Остается распространить их на сверхзвуковой диапазон скоростей ($\eta\leqslant 0$). Функции $\zeta_{\pm\nu}(\eta)$ удовлетворяют снова уравнению (2.2). Но условия при $\eta=+\infty$ заменяются следующими:

$$\zeta_{\pm\nu}(0)=1,\qquad \begin{aligned}\zeta_\nu'(0)&=\nu^{2/3}\frac{V'(0)}{V(0)}+O(1)\\ \zeta_{-\nu}'(0)&=\nu^{2/3}\left\{\frac{V'(0)}{V(0)}+\frac{1}{2V^2(0)}\,\frac{\sin\nu\pi}{\sin(\nu+1/6)\pi}\right\}+O(1)\end{aligned} \quad (4.1)$$

т. е. требованием гладкого перехода асимптотики через скорость звука. Если выразить $\zeta_{\pm\nu}(\eta)$ в форме (2.6) и воспользоваться результатами А. А. Дородницина[3] для $\eta\leqslant 0$:

$$y_1(\eta)=U_1(\nu^{2/3}\eta)+O\left\{\nu^{-1}U(\nu^{2/3}\eta)\right\}$$
$$y_2(\eta)=U_2(\nu^{2/3}\eta)+O\left\{\nu^{-1}U(\nu^{2/3}\eta)\right\}$$

где

$$U(s)=\sqrt{U_1^2(s)+U_2^2(s)}$$

то асимптотическое представление примет вид:

$$\zeta_{\pm\nu}(\eta)=\chi\left\{\left[u'(0)-\frac{C_2}{C_1}u(0)\right]V(\nu^{2/3}\eta)+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{C_2}{C_1}V(0)-V'(0)\right]u(\nu^{2/3}\eta)+O\left[\nu^{-1}U(\nu^{2/3}\eta)\right]\right\} \quad (4.2)$$

где χ согласно (2.9).

Удовлетворяя вторым условиям (4.1), будем иметь с точностью до $\nu^{-2/3}$:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{V'(0)}{V(0)} \qquad \text{для } \zeta_{+\nu}(\eta)$$

$$\frac{C_2}{C_2} = \frac{V'(0)}{V(0)} + \frac{1}{2V^2(0)} \frac{\sin \nu\pi}{\sin(\nu + 1/6)\pi} \qquad \text{для } \zeta_{-\nu}(\eta)$$

Отсюда (4.2) дает асимптотические формулы сверхзвукового режима

$$\zeta_\nu(\eta) = \chi\left\{\frac{V(\nu^{2/3}\eta)}{V(0)} + O\left[\nu^{-1}U(\nu^{2/3}\eta)\right]\right\}$$

$$\zeta_{-\nu}(\eta) = \chi\left\{\frac{V(\nu^{2/3}\eta)}{V(0)} + \frac{1}{2V^2(0)} \frac{\sin\nu\pi}{\sin(\nu+1/6)\pi} \times \right.$$

$$\left. \times \left[V(0)\, u(\nu^{2/3}\eta) - u(0)\, V(\nu^{2/3}\eta)\right] + O\left[\nu^{-1}U(\nu^{2/3}\eta)\right]\right\}$$

По аналогии с дозвуковым случаем нетрудно найти и асимптотику производной $\zeta_{\pm\nu}'(\eta)$.

Таким образом, непосредственно видно, что (2.10), (2.11) и (3.5) с точностью до главных членов дают единообразное асимптотическое представление функций Чаплыгина $\psi_{\pm\nu}(\tau)$ во всем интервале скоростей $(0 < \tau < 1)$. В частности, дозвуковую асимптотику (η не близко к нулю) Лайтхилла (1.1), Зейферта (1.3) и (1.4) и выведенную нами в § 1 (1.6) легко получить из них, если воспользоваться асимптотическими формулами функций Эйри положительного аргумента $(s > 0)$ [4]:

$$u(s) = s^{-1/4} e^{2/3 s^{3/2}} \{1 + O(s^{-3/2})\}, \qquad V(s) = \frac{1}{2} s^{-1/4} e^{-2/3 s^{3/2}} \{1 + O(s^{-3/2})\}$$

При помощи асимптотики этих же функций для отрицательного аргумента $(s < 0)$ [4]

$$u(s) = (-s)^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3}(-s)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]\{1 + O((-s)^{-3/2})\}$$

$$V(s) = (-s)^{-1/4} \sin\left[\frac{2}{3}(-s)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]\{1 + O[(-s)^{-3/2}]\}$$

из наших формул сразу находится сверхзвуковая асимптотика М. Лайтхилла [7].

Автор приносит благодарность С. В. Фальковичу за указания.

Поступила 10 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. ГИТТЛ, 1949.
2. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. II. ГТТИ, 1934.
3. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка, Успехи мат. наук, т. VII, вып. 6, 1952.
4. Фок В. А. Таблицы функций Эйри, 1946.
5. Франкль Ф. И. Асимптотическое разложение функций С. А. Чаплыгина. ДАН СССР, т. LVIII, № 5, 1947.
6. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. Изв. АН СССР, сер. матем., т. IX, № 5, 1945.
7. Lighthill M. I. The hodograph transformation in trans-sonic flow. Proc. of the Royal Society, vol. 191, No 1026, 1947.
8. Seifert H. Die hypergeometrischen Differentialgleichungen der Gasdynamik. Die Math. Annalen, B. 120, H. 1, 1947.
9. Cherry T. M. Tables and approximate formulae for hypergeometric functions of high order, occurring in gas-flow theory. Proc. of the Royal Society, vol. 217, No 1129, 1953.