

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ Н. М. ГЕРСЕВАНОВА

А. Р. Цицкишвили

(Москва)

Н. М. Герсеванов^[1] указал способ решения некоторых функциональных уравнений, названный им итерационным исчислением, и дал его приложение к задачам механики, в частности к задачам теории движения грунтовых вод. Еще раньше, при решении отдельных задач теории фильтрации, функциональное уравнение встречается в работах Г. Гамеля^[2] и Б. К. Ризенкампа^[3].

Однако метод Герсеванова не может быть использован непосредственно без дополнительных исследований, что выясняется из более подробного рассмотрения отдельных задач.

1. **Фильтрация через прямоугольную перемычку на непроницаемом основании.** Н. М. Герсеванов предполагает, что промежуток высачивания отсутствует и что область фильтрации имеет вид фиг. 1.

Приведенный потенциал скорости, т. е. взятый при коэффициенте фильтрации, равном единице, будем обозначать через α , а приведенную функцию тока через β . Как известно, между координатами произвольной точки области течения и комплексным потенциалом $\omega = \alpha + i\beta$ существует зависимость

$$z = x + iy = f(\alpha + i\beta) \quad (1.1)$$

Из этого уравнения и сопряженного с ним следует

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} [f(\alpha + i\beta) + \bar{f}(\alpha - i\beta)] \\ y &= \frac{1}{2i} [f(\alpha + i\beta) - \bar{f}(\alpha - i\beta)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Согласно фиг. 1 вдоль основания OK перемычки $\beta = 0$, $y = 0$, а вдоль линии gh границы свободной поверхности $\beta = b$, $y = a$, поэтому второе равенство (1.2) соответственно дает

$$f(\alpha) = \bar{f}(\alpha), \quad 2ia = f(\alpha + ib) - \bar{f}(\alpha - ib) \quad (1.3)$$

Отсюда имеем

$$f(t + 2ib) - f(t) = 2it - 2b \quad (t = \alpha - ib) \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.4) Герсеванов ищет в виде

$$z = \frac{(\alpha + i\beta)^2}{2b} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp\left[\frac{\pi m}{b}(\alpha + i\beta)\right] + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \exp\left[-\frac{\pi m}{b}(\alpha + i\beta)\right] \quad (1.5)$$

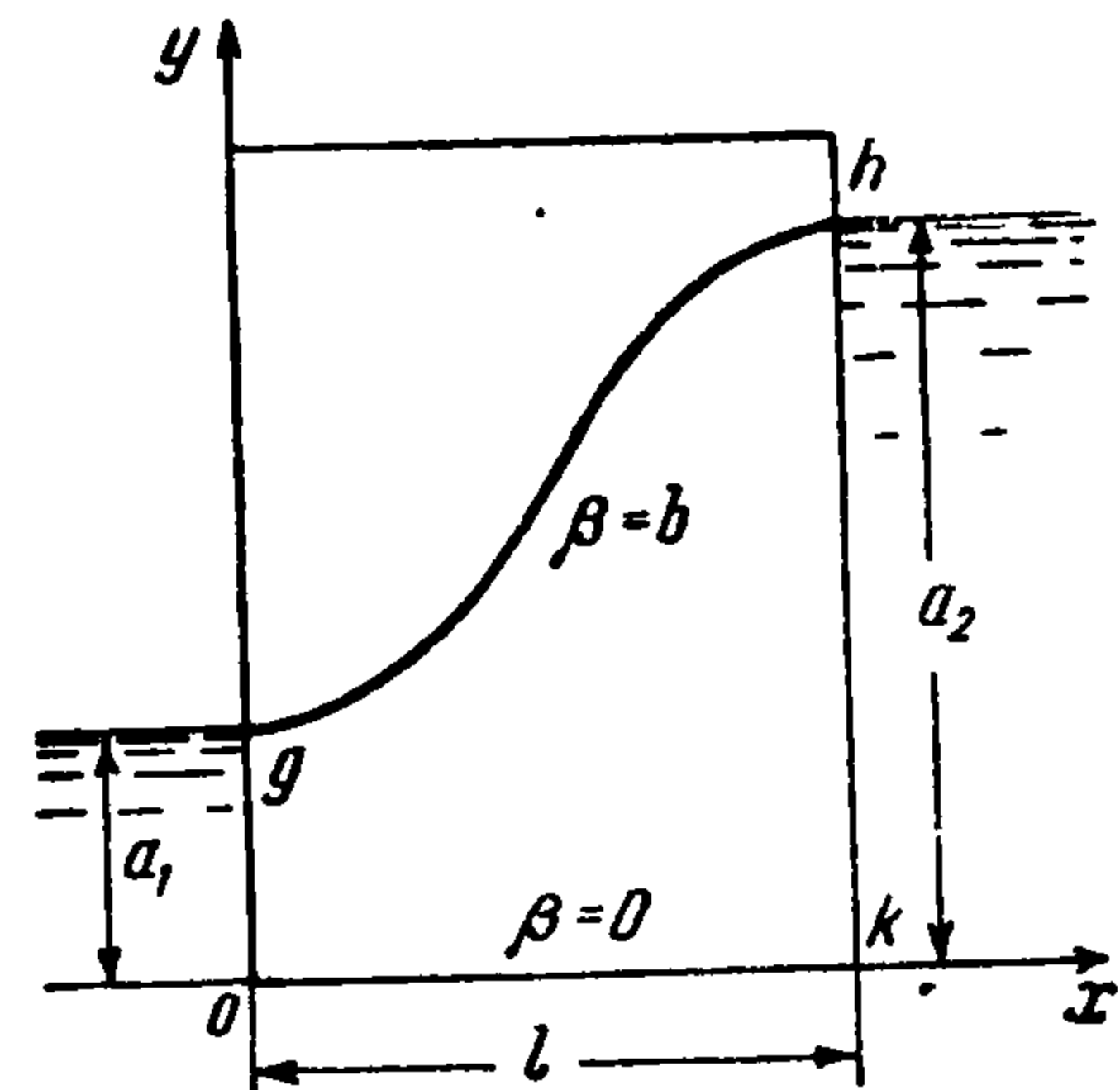
где A_m, B_m — произвольные, пока действительные числа.

После отделения действительной части от мнимой получим

$$x = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2b} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp\left(\frac{\pi m}{b}\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b}\beta\right) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \exp\left[-\frac{\pi m}{b}\alpha\right] \cos\left(\frac{\pi m}{b}\beta\right) \quad (1.6)$$

$$y = \frac{\alpha\beta}{b} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp\left(\frac{\pi m}{b}\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}\beta\right) - \sum_{m=0}^{\infty} B_m \exp\left[-\frac{\pi m}{b}\alpha\right] \sin\left(\frac{\pi m}{b}\beta\right) \quad (1.7)$$

Полученные решения удовлетворяют граничным условиям вдоль $\beta = 0$ и $\beta = b$; для удовлетворения двух оставшихся граничных условий; $a = a_1$ вдоль $x = 0$, $0 < \beta < b$ и $a = a_2$ вдоль $x = l$, $0 < \beta < b$, он разлагает в ряды по косинусам выражения $(\beta^2 - a_1^2)/2b$ и $(\beta^2 - a_2^2)/2b + l$ в интервале $(-b, +b)$; затем определяет коэффициенты A_m, B_m .

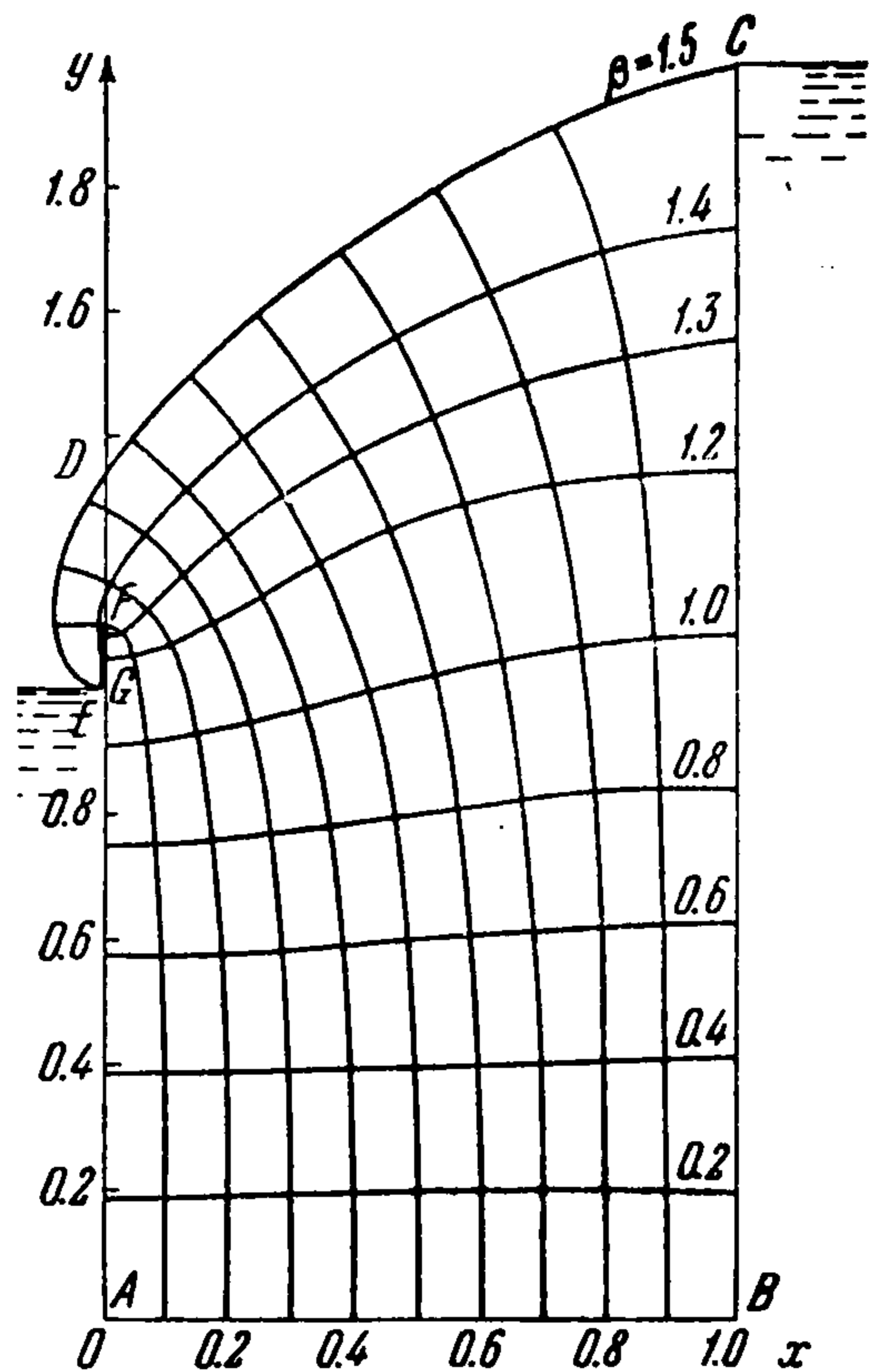


Фиг. 1

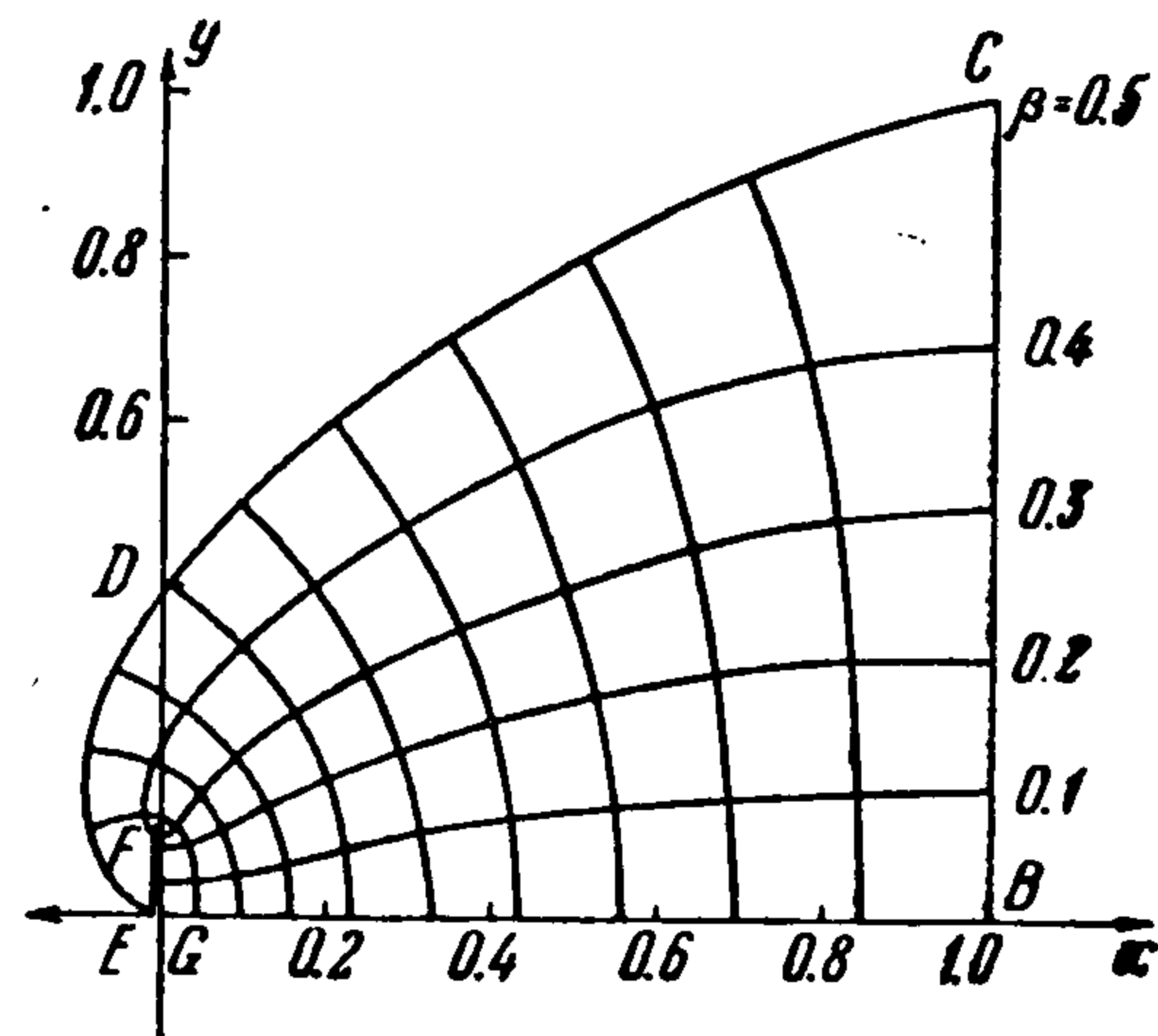
В результате решения получается формула для приведенного расхода $b = (a_2^2 - a_1^2) / 2b$.

П. Я. Полубаринова-Кочина [4] отметила, что в решении Герсеванова должна быть особенность на линии низового откоса. Мы проводим здесь более подробный анализ решения Н. М. Герсеванова, рассмотрев два частных случая.

а) $a_1 = 1, a_2 = 2, l = 1$. В этом случае для расхода получается $b = 1.5$. Гидродинамическая сетка имеет вид фиг. 2. Свободная поверхность EDC пересекает границу нижнего бьефа под углом, отличным от нуля, и



Фиг. 2



Фиг. 3

выходит из области фильтрации и возвращается к границе нижнего бьефа под прямым углом.

Для исследования поведения комплексной скорости воспользуемся производной

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{\omega}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \operatorname{sh} \left[\left(\omega - \frac{a_1 + a_2}{2} \right) \frac{\pi m}{2b} \right] \operatorname{sch} \left[\frac{\pi m}{2b} (a_2 - a_1) \right] \quad (1.8)$$

Вдоль $\alpha = a_1$, так как $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin \left(\frac{\pi m}{b} \beta \right) = -\frac{\pi \beta}{b}$, имеем

$$\left(\frac{dz}{d\omega} \right)_{\alpha=a_1} = \frac{a_1}{b} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cos \left(\frac{\pi m}{b} \beta \right) \operatorname{th} \left[\left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right) \frac{\pi m}{b} \right] \quad (1.9)$$

В точке $\alpha = a_1, \beta = b$ этот ряд расходится, поэтому $d\omega/dz = 0$ в точке $\alpha = a_1, \beta = b$. Как известно, при точном решении этой задачи в точке соединения нижнего бьефа с промежутком высачивания скорость равна бесконечности.

Чтобы найти точку, в которой $d\omega/dz = \infty$, представим (1.9) так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{d\omega} \right)_{\alpha=a_1} = & \frac{a_1}{b} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2b} \cos \left(\frac{\pi m}{b} \beta \right) \left[1 - \operatorname{th} \left(\frac{a_2 - a_1}{2b} \right) \frac{\pi m}{b} \right] + \\ & + \frac{2}{\pi} \ln \left[2 \cos \left(\frac{\pi \beta}{2b} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Вычисления показывают, что в точке $\alpha = a_1 = 1, \rho = 1.365$ комплексная скорость обращается в бесконечность. Мы имеем разрез вдоль EFG , как это показано на фиг. 2. На плоскости z координаты точки, в которой $d\omega/dz = \infty$, равны $x = 0, y = 1.090$.

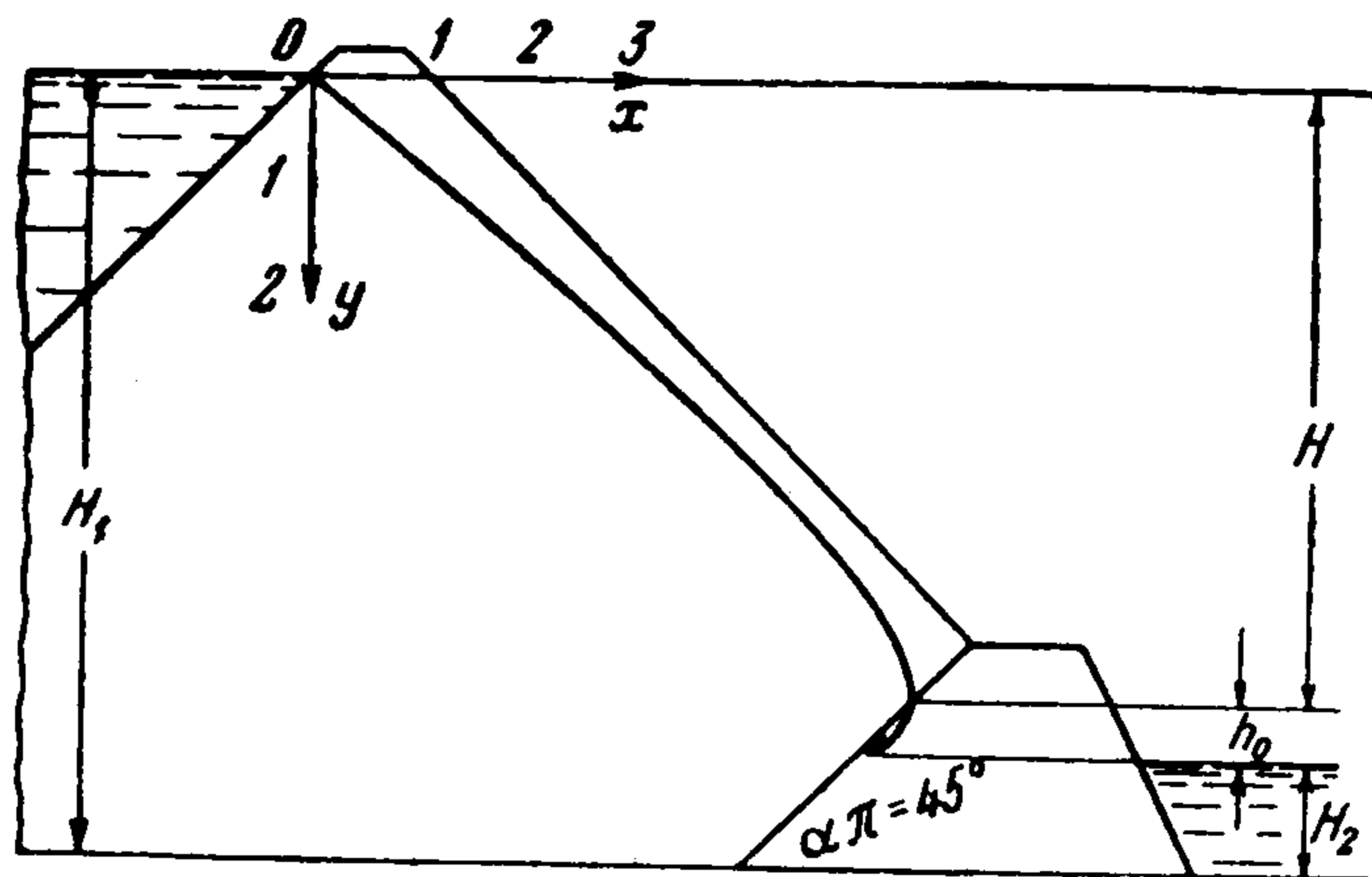
Во втором примере возьмем $\alpha = a_1 = 0, a_2 = 1, b = 0.5$. Это соответствует случаю, когда в нижнем бьефе отсутствует вода. Картина течения показана на фиг. 3.

Совершенно аналогично находим, что

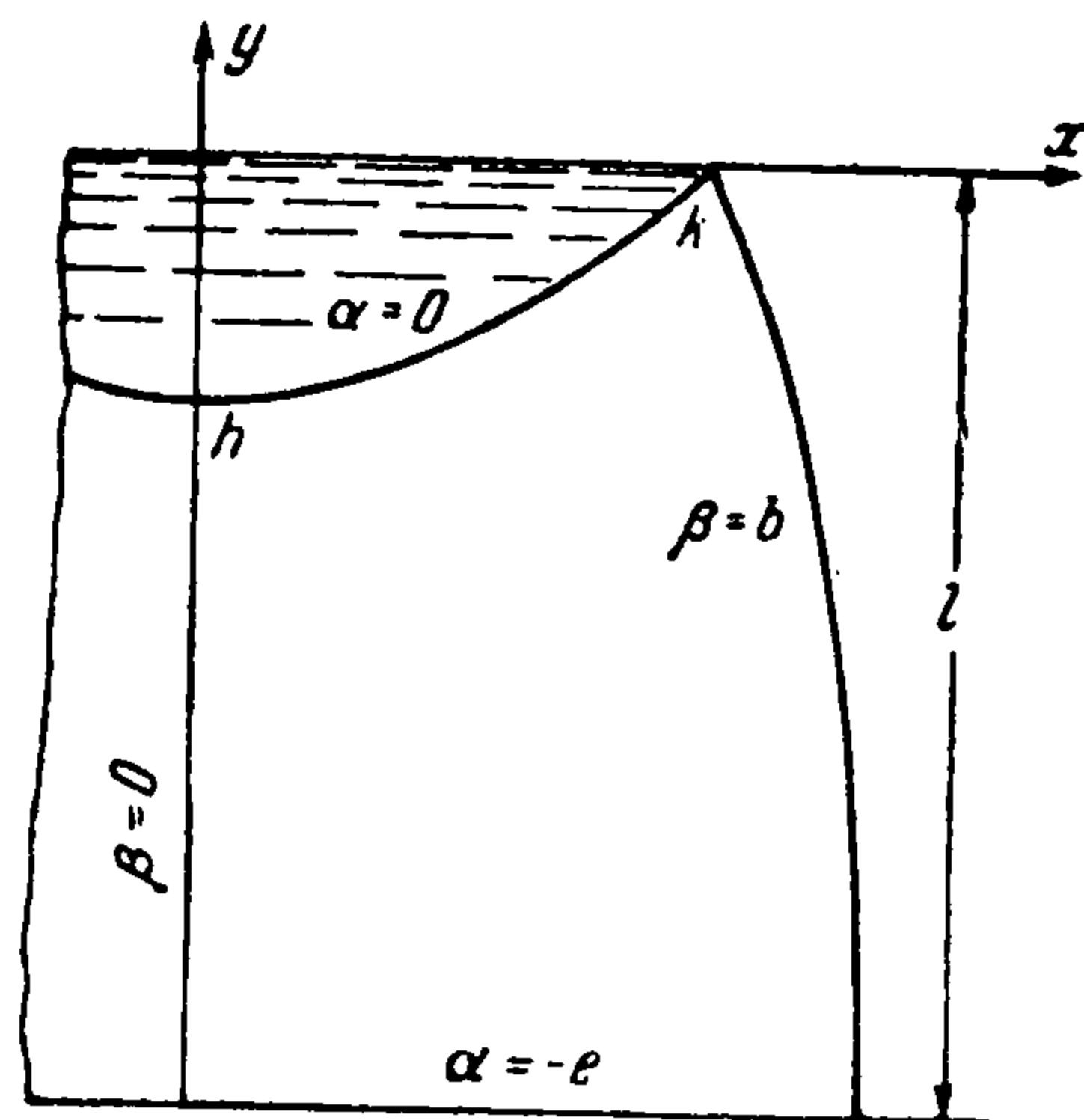
$$d\omega/dz = 0 \text{ в точке } (\alpha = 0, \beta = b), \quad d\omega/dz = \infty \text{ в точке } (\alpha = 0, \beta = 0.334)$$

На плоскости z координаты точек, в которых комплексная скорость обращается в нуль и бесконечность, соответственно равны: $x = 0, y = 0; x = 0, y = 0.104$.

Из разобранных двух частных случаев вытекает, что вопреки предположению об отсутствии промежутка высачивания он получается автоматически из решения, хотя не в том виде, какой имеет место в действительности. Решение не воспроизводит [реальную картину течения, однако его можно рассматривать как приближенное, если отбросить фиктивную часть слева от отрезка DE , выходящую из действительной области фильтрации, и принять отрезок DFG за промежуток высачивания. Эти приближенные значения на фиг. 2 и 3 получаются соответственно равными $h_0 = 0.35$ и $h_0 = 0.40$. По точному решению [5] (в котором, однако, точность вычислений мала) получаются близкие значения 0.36 и 0.38. Поэтому можно пользоваться способом Герсеванова для вычисления h_0 прямоугольной перемычки: нужно построить свободную поверхность, вернее найти точку пересечения свободной поверхности с границей нижнего бьефа.



Фиг. 4



Дренаж

Фиг. 5

Отметим еще, что на аналогичную картину течения указывает С. Н. Нумеров [6,7], рассматривая фильтрацию через земляную плотину трапециoidalного профиля на непроницаемом основании при наличии дренажа. Он также отбрасывает промежуток высачивания. Однако при наклонной границе дренажа возможно движение без промежутка высачивания. Если же таковой имеется, в то время как предположено его отсутствие, то вблизи нижнего бьефа должна получиться такая же картина, как в случае прямоугольной перемычки (фиг. 4), что и подтверждается опытом, проведенным М. М. Семчиновой на ЭГДА в пределах точности опыта.

2. Фильтрация воды из открытых русел в грунт. Рассматривается фильтрация из симметричного русла в грунт (фиг. 5), предполагая, что вода доходит до дренажа, который находится на глубине l .

Согласно выбору начала координат линия тока, исходящая из середины периметра канала — точки h , в силу симметрии будет совпадать с осью oy . Вдоль этой линии $\beta = 0, x = 0$, поэтому из первой формулы (1.2) имеем $0 = f(\alpha) + \bar{f}(\alpha)$; с учетом этого условия вдоль линии свободной поверхности, где $\beta = b, y = \alpha$

$$f(t - 2ib) + f(t) = 2it + 2b \quad (t = \alpha + ib) \quad (2.1)$$

Решение Н. М. Герсеванов ищет в виде

$$z = f(\omega) = i\omega + i \sum_{(m=1,3,5,\dots)} D_m \exp \frac{-\pi m \omega}{2b} + i \sum_{(m=1,3,5,\dots)} E_m \exp \frac{\pi m \omega}{2b} \quad (2.2)$$

где D_m и E_m — произвольные действительные постоянные.

После отделения вещественной части от мнимой получим

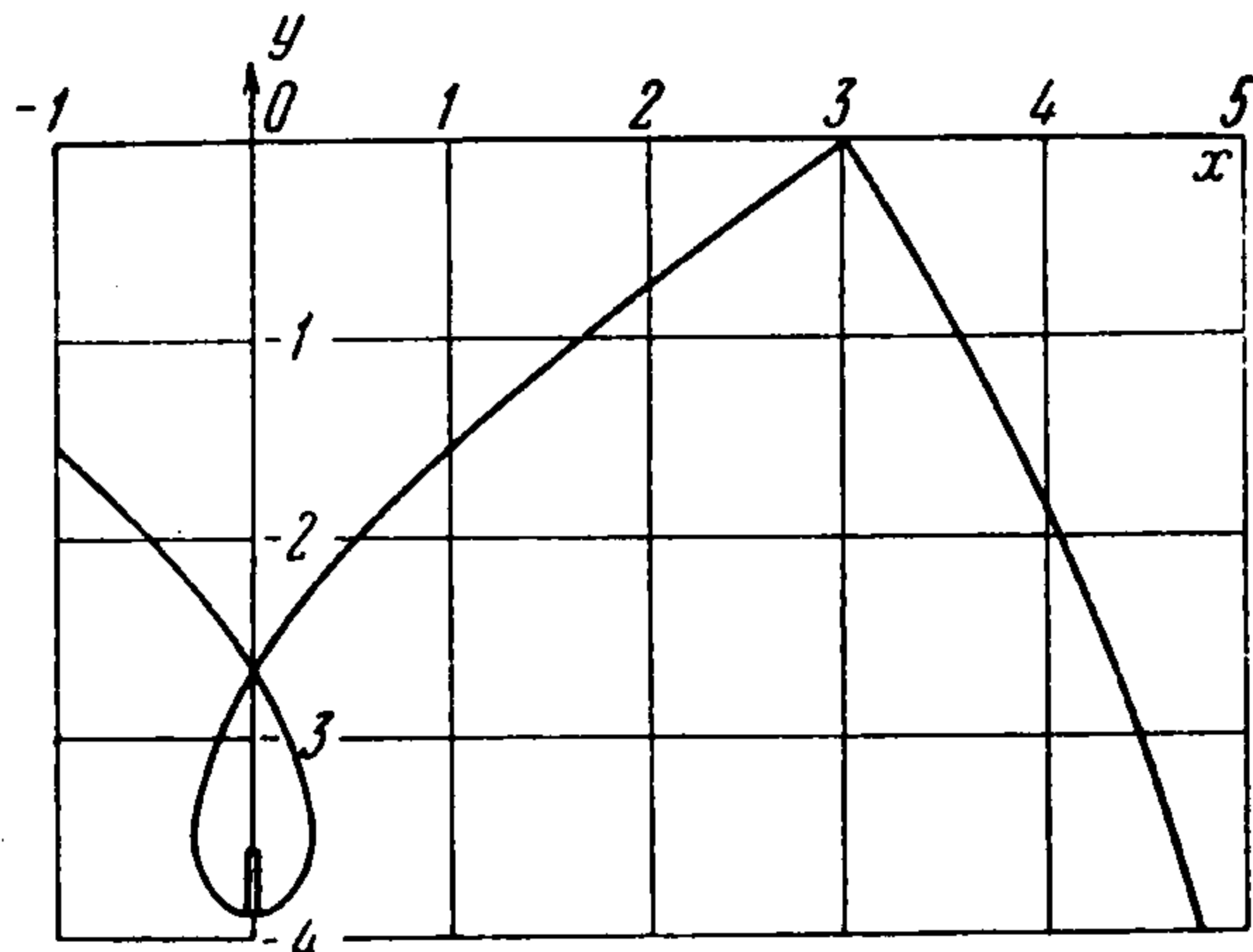
$$x = -\beta + \sum_{(m=1,3,5,\dots)} \left[D_m \exp \frac{-\pi m \alpha}{2b} - E_m \frac{\pi m \alpha}{2b} \right] \sin \left(\frac{\pi m}{2b} \beta \right) \quad (2.3)$$

$$y = \alpha + \sum_{(m=1,3,5,\dots)} \left[D_m \exp \frac{-\pi m \alpha}{2b} + E_m \exp \frac{\pi m \alpha}{2b} \right] \cos \left(\frac{\pi m}{2b} \beta \right) \quad (2.4)$$

За счет оставшихся граничных условий (дренаж и форма смоченного периметра канала) можно определить произвольные постоянные.

Условие вдоль дренажа дает $D_m = -E_m \exp(-\pi m l / b)$.

Для частного примера Герсеванов задается условием, что вдоль смоченного периметра $y = k(\beta - b)$, где число k связано с выбором глубины канала; затем он разлагает $y = k(\beta - b)$ в ряд по косинусам, приравнивает его ряду (2.4) и получает



Фиг. 6

$$E_m = -k \frac{8b}{\pi^2 m^2} \frac{1}{1 - \exp(-\pi m l / b)} \quad (m = 2\nu + 1)$$

$$E_m = 0 \quad (m = 2\nu)$$

Ширина канала B связана с расходом формулой

$$-b + k \frac{8b}{\pi^2} \sum_{(m=1,3,5,\dots)} \frac{1}{m^2} \operatorname{cth} \frac{\pi m l}{2b} \sin \frac{\pi}{2} m = \frac{B}{2} \quad (2.5)$$

Зависимость z и ω в данном случае можно записать так:

$$z = i\omega - ik \frac{8b}{\pi^2} \sum_{(m=1,3,5,\dots)} \frac{1}{m^2} \frac{\exp(\pi m \omega / 2b) - \exp[-\pi m (1/2\omega + l)b]}{1 - \exp(-\pi m l / b)} \quad (2.6)$$

Вычислив для этой формулы производную $dz/d\omega$, легко убедиться, что в точке $\alpha = 0, \beta = 0$ она равна бесконечности, так как производная ряда в (2.6) в этой точке расходится, поэтому производная $d\omega/dz = 0$ в точке $\alpha = 0, \beta = 0$.

Следовательно, в середине периметра канала скорость обращается в нуль, что неверно для обычных каналов.

Для облегчения выкладок рассмотрим случай, когда $l \rightarrow \infty$, т. е. случай фильтрации из канала без подпора. Возьмем $k = 0.662, b = 5.882, B = 6$; для этого случая смоченный периметр имеет вид фиг. 6.

Из этой формы периметра видно, что решение не соответствует реальному случаю движения.

Найдем точку, в которой скорость обращается в бесконечность. Для этого производную $dz/d\omega$ запишем так:

$$\frac{dz}{d\omega} = i \left[1 - \frac{4k}{\pi} \sum_{(m=1,3,5,\dots)} \frac{1}{m} \exp \frac{\pi m \alpha}{2b} \cos \frac{\pi m \beta}{2b} \right] + \frac{4k}{\pi} \sum_{(m=1,3,5,\dots)} \frac{1}{m} \exp \frac{\pi m}{2b} \alpha \sin \frac{\pi m \beta}{2b} \quad (2.7)$$

Ряды, стоящие в (2.7), суммируются. Чтобы найти значения α и β , для которых $dz/d\omega$ обращается в нуль, нужно приравнять нулю действительную часть и мнимую. Действительная часть равна нулю для $\beta = 0$. Приравняв мнимую часть нулю и решая относительно α , найдем $\alpha = (2b/\pi) \ln \operatorname{th}(\pi/4k)$. Следовательно, для $\beta = 0$

$$\frac{d\omega}{dz} = \infty \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{2b}{\pi} \ln \operatorname{th} \frac{\pi}{4k}$$

Для выбранного нами случая $\alpha = -0.782$.

Если поменять ролями α и β и рассмотреть картину течения для одной половины (правой или левой), то получим картину фильтрации через земляную плотину бесконечной высоты с криволинейным верхним откосом.

Однако если для плотины это решение можно использовать как приближенное, то для канала им нельзя пользоваться, так как оно существенно двулистное и

при отбрасывании мнимых кусков получается канал с вертикальной щелью, через которую всасывается вода.

3. **Случай фильтрации из канала, в котором глубина мала по сравнению с шириной.** Решение этой задачи получено С. Ф. Аверьяновым [8].

В обозначениях Н. М. Герсеванова решение С. Ф. Аверьянова может быть написано так:

$$z = i\omega + Ai \operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{2b} \quad (3.1)$$

Здесь A — действительная постоянная. Каждому заданному A отвечает своя свободная поверхность. Для определения A нужно иметь дополнительное условие, например знать какую-нибудь точку свободной поверхности. При A , отличном от нуля, имеет место фильтрация с подпором, т. е. при скорости на бесконечности, равной нулю, значение $A = 0$ отвечает фильтрации без подпора.

Будем решать эту задачу по методу Н. М. Герсеванова.

Как в предыдущей задаче, вдоль периметра канала $\alpha = 0$, вдоль свободной поверхности $\beta = b$, $y = a$.

Решение опять ищется в виде (2.2), а отделение действительной части от мнимой дает уравнения (2.3) и (2.4).

Вдоль периметра канала $\alpha = 0$, $y = 0$ это условие, примененное к (2.4), дает $D_m = -E_m$, и, подставляя $D_m = -E_m$ в (2.2), получим

$$z = i\omega + 2i \sum_{(m=1, 3, 5, \dots)} E_m \operatorname{sh} \frac{\pi m \omega}{2b} \quad (3.2)$$

Для ширины канала получаем следующую формулу:

$$B = 2b + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} E_{2n-1} \quad (3.3)$$

Действительные постоянные E_{2n-1} остаются произвольными.

Решение, которое получается по методу Герсеванова, содержит бесконечное число произвольных постоянных и является как бы более общим, чем указанное выше решение (3.1). Однако, как показывает исследование, все члены, кроме первого, входящие в ряд (3.2), подлежат отбрасыванию.

Действительно, положим $E_1 = 0$, $E_3 \neq 0$, $E_m = 0$, $m \geq 5, 7, 9, 11, \dots$. Для этого случая решение имеет вид:

$$z = i\omega + 2iE_3 \operatorname{sh} \frac{3\pi\omega}{2b} \quad (3.4)$$

Уравнение свободной поверхности запишется так:

$$x = b - 2E_3 \operatorname{ch} \frac{3\pi y}{2b} \quad (3.5)$$

Когда $y \rightarrow \infty$, x должен стремиться к положительной бесконечности. Для этого нужно, чтобы $E_3 < 0$.

Уравнение гидродинамической сетки имеет вид:

$$x = -\beta - 2E_3 \operatorname{ch} \frac{3\pi\alpha}{2b} \sin \frac{3\pi\beta}{2b}, \quad y = a + 2E_3 \operatorname{sh} \frac{3\pi\alpha}{2b} \cos \frac{2\pi\beta}{2b} \quad (3.6)$$

Введем обозначения:

$$\Phi = \frac{3\pi\alpha}{2b}, \quad \Psi = \frac{3\pi\beta}{2b}, \quad X = \frac{3\pi}{2b} x, \quad Y = \frac{3\pi}{2b} y, \quad A = -\frac{3\pi E_3}{b}$$

Тогда (3.6) можно переписать так:

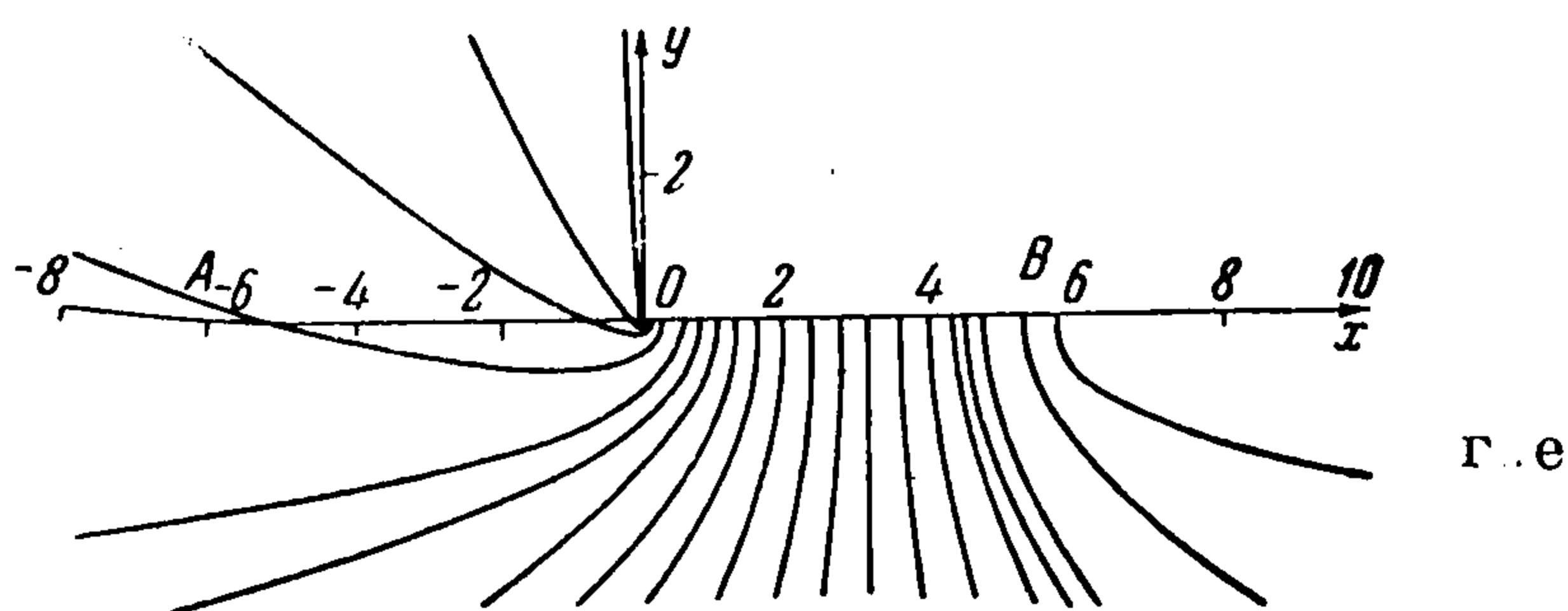
$$X = -\Psi + A \operatorname{ch} \Phi \sin \Psi$$

$$Y = \Phi - A \operatorname{sh} \Phi \cos \Psi, \quad -\frac{3\pi}{2} \leq \Psi \leq 0, \quad -\infty \leq \Phi \leq 0$$

На фиг. 7 показана правая половина области фильтрации (принято $A = 1$). Рассмотрим еще случай

$$E_1 = 0, \quad E_3 = 0, \quad E_5 \neq 0, \quad E_m = 0 \quad (m \geq 7, 9, 11, \dots)$$

Аналогично предыдущему случаю получим уравнения гидродинамической сетки



Фиг. 7

$$\begin{aligned} X &= -\Psi + A \operatorname{ch} \Phi \sin \Psi \\ Y &= \Phi + A \operatorname{sh} \Phi \cos \Psi \\ & \left(\frac{1}{2}\pi \leq \Psi \leq 0, \quad -\infty \leq \Phi \leq 0 \right) \end{aligned}$$

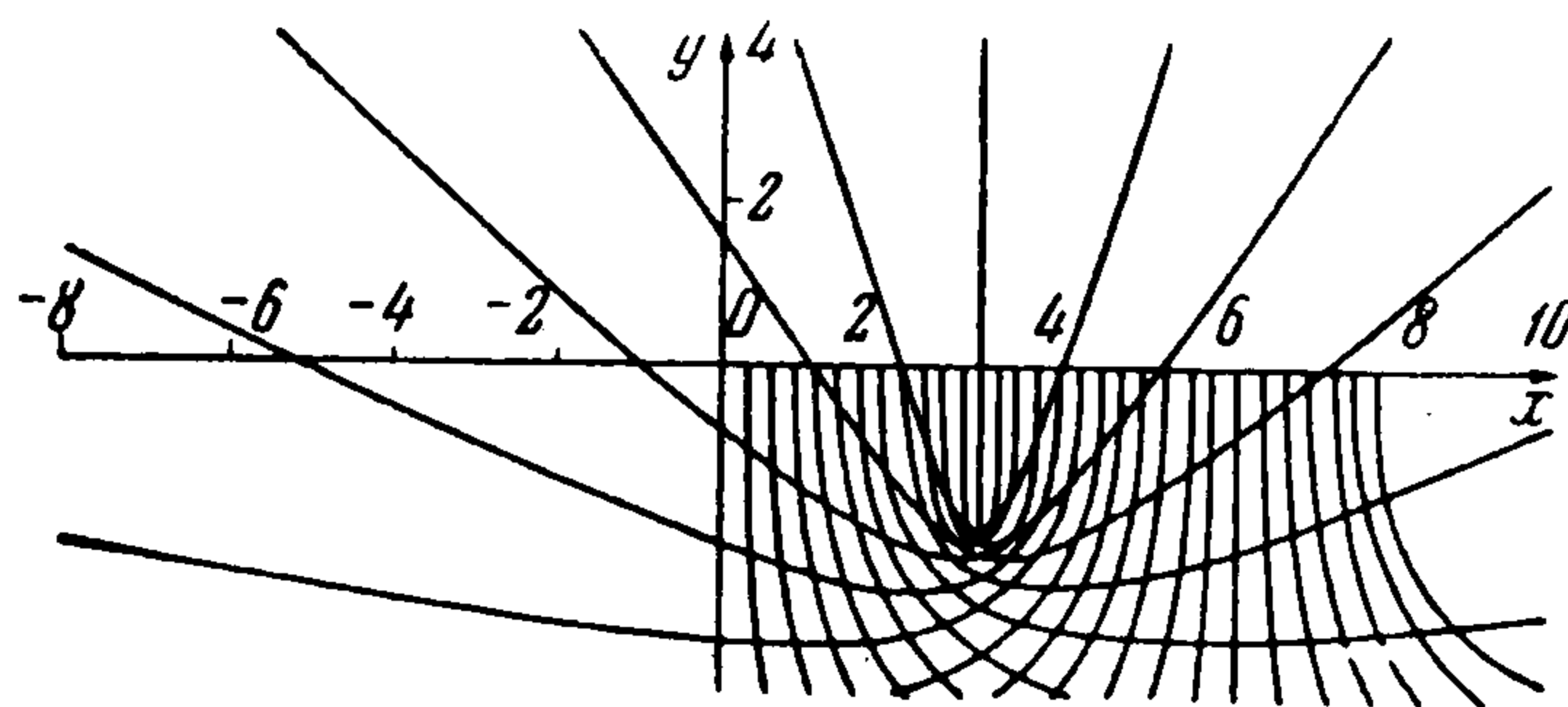
г.е

$$\Phi = \frac{5\pi}{2b} \alpha, \quad \Psi = \frac{5\pi\beta}{2b},$$

$$X = \frac{5\pi}{2b} x, \quad Y = \frac{5\pi}{2b} y$$

Линия тока для этого случая построена на фиг. 8 (принято $A = (5\pi/b) E_5 = 0.1$). Из рассмотрения фиг. 7 и 8 видно, что подобные решения не дают фильтрации из канала. Они определяют течения на многолистных римановых поверхностях, которым трудно дать реальное истолкование. Возникает вопрос: не могут ли компенсироваться полученные особенности при суммировании членов ряда (3.2)? Это невозможно, так как каждое новое слагаемое дает новые разрезы по плоскости z и новые ответвления листа римановой поверхности.

Таким образом, решение, получаемое по методу Н. М. Герсеванова, подлежит детальному анализу, после чего можно заключить, соответствует ли оно данной задаче. Только из того, что построенные ряды удовлетворяют граничным условиям, нельзя заключить, что они дают решение поставленной задачи.



Фиг. 8

Поступила 14 IX 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Герсеванов Н. М. 1) Приложение функционального анализа при решении задач по фильтрации грунтовых вод. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1943; 2) Итерационное исчисление и его приложения. Машстройиздат, М., 1950.
2. Hamel G. Über die Versickerung von Wasser aus Kanälen in tiefen Grund. ZAMM, Bd. 18, N. 1, 1938.
3. Ризенкампф Б. К. Гидравлика грунтовых вод. Ученые записки Саратовского гос. университета. Т. XV, вып. 5, Гидравлика, 1940.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. и Фалькович С. В. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах. ПММ, т. XI, вып. 6, 1947.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Л.—М., 1952.
6. Нумеров С. Н. Решение задач о фильтрации без промежутков высачивания и инфильтрации или испарения воды со свободных поверхностей. ПММ., т. VI, вып. 1, 1942.
7. Аравин В. И. и Нумеров С. Н. Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. Л.—М., 1948.
8. Аверьянов С. Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. В книге А. Н. Костякова, Н. Н. Фаворина и С. Ф. Аверьянова «Влияние орошения на режим грунтовых вод». Изд. АН СССР, 1956.