НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А. Г. Ишкова

(Москва)

Пусть мы имеем круглую пластинку единичного радиуса и бесконечную полосу, половину ширины которой мы также примем равной единице. Обозначим прогиб пластинки через w, осадку основания через v, реакцию основания через p. Безразмерные координаты пластинок обозначим соответственно через ρ и x.

Будем рассматривать:

1) изгиб круглой пластинки и бесконечной полосы под действием некоторой поперечной нагрузки, считая нагрузку на круглую пластинку осесимметричной, а на полосу — зависящей только от одной координаты x так, что эту пластинку можно считать находящейся в условиях плоской задачи;

2) изгиб круглой пластинки под действием неосесимметричной нагрузки

$$q(\rho,\ \theta) = q(\rho)\cos n\theta$$

3) изгиб круглой пластинки и полосы при совместном действии поперечной нагрузки и сил постоянной интенсивности p_0, растягивающих или сжимающих пластинку в ее плоскости.

Поставленные задачи сводятся к определению реакции грунта на плиту при условии равновесия внешних нагрузок и реактивных давлений и плотного прилегания к грунту в каждой точке.

Функции w и p должны удовлетворять дифференциальному уравнению изгиба пластинки

$$D\nabla^2\nabla^2 w - p_0\nabla^2 w = q - p \tag{1}$$

где D — цилиндрическая жесткость пластинки.

Второе уравнение мы получим, записав известную формулу Буссинеска для осадки упругого полупространства, преобразованную для давления, распределенного по площади круга и бесконечной полосы.

Для круглой пластинки при неосесимметричном давлении $p(\rho,\ \theta) = p_n(\rho)\cos n\theta$ осадка основания v определяется по формуле, выведенной В. И. Моссаковским [1, 2]

$$v = (\rho,\ \theta) = \frac{4\rho^n\cos n\theta}{\pi\delta}\left[\frac{1}{\rho^{2n+1}}\int\limits_0^\rho r^{n+1}p_n(r)\,dr\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-(r^2/\rho^2)\sin^2\varphi}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_\rho^1 p_n(r)\frac{dr}{r^n}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-(\rho^2/r^2)\sin^2\varphi}}\right] \tag{2}$$

При $n=0$ эта формула переходит в известную формулу Шлейхера [3] для осадки полупространства при осесимметричном давлении $p = p(\rho)$. Для бесконечной полосы в условиях плоской задачи

$$v_0 - v = \frac{2}{\pi\delta}\left[\int\limits_x^1 p(\xi)\ln(\xi - x)\,d\xi + \int\limits_{-1}^x p(\xi)\ln(x-\xi)\,d\xi - 2\int\limits_0^1 p(\xi)\ln\xi d\xi\right] \tag{3}$$

Здесь $\delta = E / 1 - \nu^2$, E — модуль упругости для грунта, ν — коэффициент Пуассона для грунта.

Будем искать реакцию основания p для круглой пластинки в виде

$$p(\rho,\ \theta) = \rho^n\left(\frac{A}{\sqrt{1-\rho^2}} + \sum_{k=0}^\infty b_k\rho^k + \sum_{k=0}^\infty E_{2k}\rho^{2k}\ln\rho\right)\cos n\theta \tag{4}$$

Для полосы, не рассматривая неосесимметричную задачу, решенную В. Л. Рвачевым [4], решение будем искать в виде

$$p = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k} x^{2k} \ln x \tag{5}$$

где A, b_k и E_{2k} — неизвестные коэффициенты. Если w искать также в виде бесконечных рядов и подставить p и w в уравнение (1), то между коэффициентами разложения функций w и p в ряды получим некоторые соотношения. Пользуясь этими соотношениями, прогиб w можно выразить через коэффициенты A, b_k и E_{2k} и постоянные интегрирования. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий.

Подставив p, выраженное по формуле (4), в формулу (2) и p, выраженное по формуле (5), в выражение (3), мы получим значения осадки основания v, выраженные в бесконечных рядах, содержащих коэффициенты A, b_k и E_{2k}.

Из условия плотного прилегания плиты к основанию

$$w \equiv v \tag{6}$$

добавив уравнения равновесия статики плиты под действием внешних нагрузок и реактивных сил, мы для определения неизвестных коэффициентов A, b_{2k}, b_{2k+1} и E_{2k} $(k=0, 1, 2, \ldots)$ получим бесконечные системы уравнений с бесконечным числом неизвестных. При этом если ввести параметр $K = 2D/\delta$, то коэффициенты b_{2k+1} и E_{2k} сразу выражаются определенным образом в виде некоторых величин, содержащих степени величины K^{-1}.

Решение же бесконечных систем, содержащих коэффициенты A и b_{2k}, мы ищем в виде бесконечных рядов по степеням K^{-1}

$$A = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_\mu}{K^\mu}, \qquad b_{2k} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu k}}{K^\mu} \tag{7}$$

Если эти разложения (7) подставить в уравнения равновесия и бесконечные системы при разных загружениях, то каждое уравнение этих систем распадется на бесконечное множество уравнений относительно новых неизвестных A_μ и $a_{\mu k}$.

Уравнения этой новой совокупности можно сгруппировать так, что получится новая совокупность такая, что каждое уравнение одной системы будет отличаться от соответствующего ему уравнения любой другой системы только правой частью, а коэффициенты в левых частях будут одинаковы. Если правые части уравнений этой совокупности систем обозначить через $\beta_{\mu m}$, то эти системы будут таковы:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{0k}}{2k-2m-1} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{0k}}{t_k} = 0 \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{\mu k}}{2k-2m-1} = \beta_{\mu m} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots \\ m = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$A_\mu = \Delta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{\mu k}}{t_k} + \psi_\mu \tag{10}$$

Решение системы (8) мы получили в виде

$$a_{0k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

Решение системы (9) нами найдено в виде [5], [6]

$$a_{\mu k} = \frac{2}{\pi} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)!!\,\beta_{\mu s}}{(2s)!!\,(2k-2s-1)} \tag{12}$$

Решение системы (10) мы найдем, подставив значение $\alpha_{\mu k}$, выраженное по формуле (12), в формулу (10).

Величины β_{1m} всегда известны и зависят от нагрузки и формы пластинки.

Величины $\beta_{\mu m}$ могут быть найдены из рекуррентных соотношений, выражающих $\beta_{\mu m}$ через $\beta_{\mu-1,m}$; если таких соотношений составить нельзя, то последовательность вычислений должна быть такой.

Величины $\beta_{\mu m}$ всегда выражаются через $\alpha_{\mu-1,k}$ и $A_{\mu-1}$, поэтому по исходным значениям β_{1m} можно найти величины α_{1k} и A_1. Зная же α_{1k} и A_1, находим β_{2m}; вычислив β_{2m}, находим α_{2k} и A_2 и т. д.

Величины ψ_μ известны и зависят от коэффициентов b_{2k+1} и E_{2k}.

Можно доказать сходимость всех рядов, входящих в решение, а также найти те значения K, при которых ряды (7) сходятся.

Для круглой пластинки и полосы достаточные условия сходимости рядов (7) имеют соответственно вид

$$0.146 < K < \infty, \qquad 0.36 < K < \infty \qquad \text{при } q = \text{const} \tag{13}$$

Решение для штампа получим, положив $K = \infty$. При этом условии мы будем иметь $A = A_0$, $b_k = E_{2k} = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Приведем некоторые результаты.

Задача 1. Для этой задачи, положив $p_0 = 0$ и $n = 0$ в формулах (1), (2) и (4), рассмотрим различные загружения

Круглая пластинка

a) Нагрузка $q = \text{const}$. В этом случае будем иметь

$$A_0 = \frac{1}{2} q, \qquad \Delta = -\frac{1}{2}, \qquad t_k = k + 1, \qquad \psi_\mu = 0 \qquad b_{2k+1} = E_{2k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$A_\mu = \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)!!\,\beta_{\mu s}}{(2s)!!(2s+3)}$$

b) Нагрузка

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} \rho^{2k}$$

Здесь мы будем иметь только другое значение A_0 и другие значения $\beta_{\mu m}$ по сравнению со случаем (*a*). Значения $\beta_{\mu m}$ не выписываем из-за их громоздкости.

$$A_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{2k}}{k+1}$$

c) Нагрузка $q = 0$: приложены силы постоянной интенсивности P и моменты M по краям; тогда $A_0 = P$, остальные коэффициенты, не считая $\beta_{\mu m}$, те же.

d) Нагрузка: приложена сосредоточенная сила P в центре $q = 0$:

$$b_{1+6k} \neq 0, \qquad E_{4+6k} \neq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$A_0 = \frac{P}{2\pi}, \qquad \psi_\mu \neq 0 \qquad A_\mu = \psi_\mu + \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)!!\,\beta_{\mu s}}{(2s)!!\,(2s+3)}$$

Остальные коэффициенты, не считая $\beta_{\mu m}$, те же. Эти же формулы справедливы для случая $n = 0$, $p_0 \neq 0$, но значения $\beta_{\mu m}$ и ψ_μ будут другие.

Бесконечная полоса

a) Нагрузка $q = \text{const}$. В этом случае

$$A_0 = \frac{2q}{\pi}, \qquad t_k = 2k + 1, \Delta = -\frac{2}{\pi}, \qquad \psi_\mu = 0, \qquad b_{2k+1} = E_{2k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$A_\mu = \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)!!\,\beta_{\mu s}}{(2s)!!\,(2s+2)}$$

b) Нагрузка

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} x^{2k}$$

в этом случае

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{2k}}{2k+1}$$

все другие коэффициенты, кроме $\beta_{\mu s}$, такие же, как и в случае a).

c) Нагрузка: приложены силы P и моменты M по краям; в этом случае

$$A_0 = \frac{2P}{\pi}$$

все другие коэффициенты, кроме $\beta_{\mu s}$, такие же, как и в случае a).

d) Приложены сосредоточенные силы постоянной интенсивности P по продольной оси симметрии, $q = 0$:

$$A_0 = \frac{P}{\pi}, \quad \psi_\mu \neq 0, \quad b_{6k+5} \neq 0, \quad E_{6k+2} \neq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$A_\mu = \psi_\mu + \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)!!\, \beta_{\mu s}}{(2s)!!\,(2s+2)}$$

Эти же коэффициенты имеют место для случая $p_0 \neq 0$, но значения $\beta_{\mu m}$ и ψ в них другие.

Задача 2. Круглая пластинка, нагруженная неосесимметричной нагрузкой

$$q(\rho, \theta) = \rho^n \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} \rho^{2k} \cos n\theta$$

При $n = 0$ имеем рассмотренный случай b). При $n = 1$

$$A_0 = \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{2k}}{2k+4}, \qquad f_k = 2k+4, \qquad \Delta = -\frac{3}{2}, \qquad \psi_\mu = 0$$

$$b_{2k+1} = E_{2k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$A_\mu = \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)!!\, \beta_{\mu s}}{(2s)!!\,(2s+5)}$$

При $n > 1$

$$A_0 = 0, \qquad b_{2k+1} = E_{2k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и A_μ выражается через $\alpha_{\mu-1k}$ и $A_{\mu-1}$ по специальной формуле, которая выводится для этого случая из формулы В. И. Моссаковского [1, 2]

$$A = \frac{\delta}{\pi} \int_0^1 \frac{[w'(r)\, r^n + nw(r)\, r^{n-1}]\, dr}{\sqrt{1-r^2}} \tag{14}$$

Пользуясь изложенным методом, можно получить решения для пластинок переменной толщины и для пластинок, нагруженных другими способами, например нагруженных не по всей площади.

Поступила 5 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И. Первая основная задача теории упругости для пространства с плоской круглой щелью. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
2. Моссаковский В. И. Общее решение задачи об определении давления под подошвой круглого в плане штампа без учета трения. Вопросы машиностроения и прочности в машиностроении. Изд. АН СССР, Киев, 1953.
4. Рвачев В. Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
5. Ишкова А. Г. Изгиб круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве, под действием осесимметричной равномерно распределенной нагрузки. Ученые записки МГУ, вып. 152. Механика, 1951.
6. Ишкова А. Г., Тулайков А. Н. Некоторые задачи об изгибе пластинок, лежащих на упругом полупространстве. Инженерный сборник, т. 23, 1956.