ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

К. В. Соляник-Красса

(Ленинград)

Для решения осесимметричной задачи теории упругости к настоящему времени предложено несколько различных форм функций напряжений. Первая из них была введена Мичелом[1]. Наиболее часто применяются функции напряжений в форме Лява[2] и в форме следующей для данного случая деформации из общего решения уравнений теории упругости Буссинеска-Гродского-Нейбера-Папковича[3, 4]. В работе[5] предложено решение, при котором напряжения получаются однократным дифференцированием функции напряжений, что позволяет просто связать контурные значения последней с внешними силами.

Нетрудно установить зависимости между функциями напряжений в перечисленных формах решений.

По решению работы[5] задача определения напряжений сводится к построению функции

$$\Phi = \psi + z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

где ψ и φ — функции цилиндрических координат r и z (ось z совмещена с осью симметрии), определяемые как решения дифференциальных уравнений второго порядка

$$\nabla^2\psi = 0, \qquad \nabla^2\varphi = 0 \tag{1}$$

в силу чего сама функция Φ удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0$$

Здесь и дальше используются символы

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Радиальные перемещения u и производные осевых перемещений определяются через функции φ и Φ равенствами

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{1}{r}[\Phi + 2(1-\nu)\varphi]$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}[\Phi - 2(1-\nu)\varphi], \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[\Phi + 2\nu\varphi] \tag{3}$$

Введение функций f и F условиями

$$\psi = r\partial f/\partial r, \qquad \Phi = r\partial F/\partial r$$

приводит к интегрированию двух последних равенств (3), после чего перемещения получают следующие значения:

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial r}[F + 2(1-\nu)f], \qquad w = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial z}[F - 2(1-\nu)f]$$

Функции f и F связаны между собой равенствами

$$F = g + z\,\partial f/\partial z \qquad \text{или} \qquad F = g - r\,\partial f/\partial r$$

причем по введению этих функций и на основании (1) и (2)

$$\Delta g = 0, \qquad \Delta f = 0, \qquad \Delta\Delta F = 0 \tag{4}$$

Представляя F в виде

$$F = g - r\frac{\partial f_1}{\partial r} + z\frac{\partial f_2}{\partial z}$$

и вводя обозначения

$$g+2(1-\nu)(f_2-f_1)=-\frac{\mu}{2(1-\nu)}\varphi_0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial r}=\frac{\mu}{2(1-\nu)}\varphi_1,\quad \frac{\partial f_2}{\partial z}=-\frac{\mu}{2(1-\nu)}\varphi_2 \qquad (5)$$

для перемещений будем иметь

$$u=\varphi_1-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_1+z\varphi_2+\varphi_0),\qquad w=\varphi_2-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}(r\varphi_1+z\varphi_2+\varphi_0) \qquad (6)$$

Эти равенства совпадают с выражениями для перемещений, получаемых из общих решений уравнений теории упругости Буссинеска-Гродского-Нейбера-Папковича, записанных в цилиндрических координатах, в частном случае осесимметричной деформации.

Входящие в (6) функции φ_0, φ_1 и φ_2 по равенствам (4) и (5) должны определяться уравнениями

$$\triangle\varphi_0=0,\qquad \left(\triangle-\frac{1}{r^2}\right)\varphi_1=0,\qquad \triangle\varphi_2=0$$

Если положить

$$F+2(1-\nu)f=\partial\chi/\partial z$$

где χ — некоторая бигармоническая функция координат r и z:

$$\triangle\triangle\chi=0$$

то оказывается возможным выразить перемещения производными только одной этой функции:

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z},\qquad w=\frac{1}{2\mu}\left[(1-2\nu)\triangle\chi+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)\right]$$

Последнее представляет известное решение Лява.

Наконец, вводя функцию Ψ, условием

$$F-2(1-\nu)f=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

для перемещения найдем:

$$u=\frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)-2(1-\nu)\frac{1}{r}\nabla^2\Psi\right],\qquad w=\frac{1}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}$$

где принято во внимание, что

$$\nabla^2\Psi=-2r\frac{\partial f}{\partial r}$$

Используя (4), легко установить, что функция Ψ определяется дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$\nabla^2\nabla^2\Psi=0$$

Введение этой функции принадлежит Мичелу.

Поступила 15 X 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Michell J. H. The uniform torsion and flexure of incomplete tores, with application to helical springs. Proc. London Math. Soc., vol. 51, 1900, 130—146.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР, 1935.
3. Нейбер Г. Концентрация напряжений. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
4. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
5. Соляник-Красса К. В. К решению осесимметричной задачи теории упругости. ДАН СССР, т. LXXXVI, № 3, 1952, 481—484.