О ЦЕНТРЕ ИЗГИБА

В. В. Новожилов

(Ленинград)

Доказывается, что для определения координат центра изгиба вовсе не нужно решать задачу об изгибе стержня поперечной силой, а достаточно знать решение задачи о его кручении. Если оно известно, то отыскание центра изгиба сводится к квадратурам. Для простоты рассуждений рассматриваются только стержни односвязного поперечного сечения.

§ 1. Исходные данные. Пусть имеется стержень, на торец которого $z=l$ действует нагрузка, статически эквивалентная силе P, перпендикулярной к оси стержня. Решение этой задачи сводится к отысканию функции

$$\chi(x,\ y)=C\Phi(x,\ y)+\Psi(x,\ y) \tag{1.1}$$

причем Φ и Ψ подчиняются следующим дифференциальным уравнениям:

$$\triangle\Phi=-2, \qquad \triangle\Psi=\frac{2\nu}{1+\nu}(\beta x-\alpha y) \tag{1.2}$$

и граничным условиям на контуре поперечного сечения стержня

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=0, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial s}=(\beta y^2+\gamma y)\frac{dx}{ds}-(\alpha x^2+\gamma y)\frac{dy}{ds} \tag{1.3}$$

Входящие сюда постоянные коэффициенты α, β, γ (если расположить начало координат в произвольной точке торцевого сечения $z=0$ и направить ось X параллельно силе P) определяются формулами

$$\alpha=-\frac{I_{xx}S_0-S_x{}^2}{B}, \quad \beta=\frac{I_{xy}S_0-S_xS_y}{B}, \quad \gamma=\frac{I_{xx}S_y-I_{xy}S_x}{B}=-\alpha x_0-\beta y_0 \tag{1.4}$$

$$B=\begin{vmatrix} I_{yy} & I_{xy} & S_y \\ I_{xy} & I_{xx} & S_x \\ S_y & S_x & S_0 \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

где ν — коэффициент Пуассона, I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}, S_x, S_y — моменты инерции и статические моменты площади поперечного сечения стержня (S_0),x_0, y_0 — координаты центра тяжести этой площади.

Будем для простоты рассуждений считать поперечное сечение стержня односвязным. Тогда граничные условия (1.3) приводятся к виду

$$\Phi=0, \qquad \Psi=\int_0^s\left[(\beta y^2+\gamma y)\frac{dx}{ds}-(\alpha x^2+\gamma x)\frac{dy}{ds}\right]ds \tag{1.6}$$

Здесь начало отсчета дуги s контура поперечного сечения стержня может быть принято в произвольной его точке. Напряжения в стержне равны

$$\sigma_{xz}=\frac{1}{2}P\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}+\alpha x^2+\gamma x\right), \qquad \sigma_{yz}=\frac{1}{2}P\left(-\frac{\partial\chi}{\partial x}+\beta y^2+\gamma y\right) \tag{1.7}$$
$$\sigma_{zz}=P(l-z)(\alpha x+\beta y+\gamma), \qquad \sigma_{xy}=\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=0$$

Этим напряжениям соответствуют компоненты деформации

$$\begin{aligned} e_{xx}&=e_{yy}=-\frac{\nu P}{E}(l-z)(\alpha x+\beta y+\gamma) \\ e_{zz}&=\frac{P}{E}(l-z)(\alpha x+\beta y+\gamma), \qquad e_{xy}=0 \\ e_{xz}&=\frac{(1+\nu)P}{E}\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\alpha x^2+\gamma x\right) \\ e_{yz}&=\frac{(1+\nu)P}{E}\left(-\frac{\partial X}{\partial x}+\beta y^2+\gamma y\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Отсюда

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial x}=-\frac{\nu}{E}\alpha P(l-z),\qquad \frac{\partial\omega_z}{\partial y}=\frac{\nu}{E}\beta P(l-z)$$
$$\frac{\partial\omega_z}{\partial z}=-\frac{1+\nu}{2E}P\triangle\chi=\frac{P(1+\nu)}{E}\left[C-\frac{\nu}{1+\nu}(\beta x-\alpha y)\right] \tag{1.9}$$

Заметим, что $\partial\omega_z/\partial z=\tau(x, y)$ есть кручение волокон стержня, параллельных его оси. На основании (1.9) среднее (для всего поперечного сечения) кручение определяется формулой

$$\tau^\circ=\frac{1}{S_0}\iint\frac{\partial\omega_z}{\partial z}dS=\frac{P(1+\nu)}{E}\left[C-\frac{\nu}{1+\nu}(\beta x_0-\alpha y_0)\right] \tag{1.10}$$

Найдем крутящий момент:

$$M_z=\iint(\sigma_{yz}x-\sigma_{xz}y)\,dS \tag{1.11}$$

Подставив сюда (1.7) и выполнив преобразования с учетом формулы Гаусса-Остроградского и соотношений (1.1) и (1.6), будем иметь

$$M_z=P\left\{C\iint\Phi dS+\iint\Psi dS+\frac{1}{2}\iint(\beta y-\alpha x)\,xydS+\right.$$
$$\left.+\oint\left[(\beta y^2+\gamma y)\frac{dx}{ds}-(\alpha x^2+\gamma x)\frac{dy}{ds}\right]\Omega_s ds\right\} \tag{1.12}$$

Здесь

$$\Omega_s=\frac{1}{2}\int_0^s(xdy-ydx)$$

— секториальная площадь. При выводе (1.12) использовано также, что на контуре поперечного сечения

$$\chi(0)=\chi(L_0)=0$$

где L_0 — длина контура.

Если среднее кручение τ° равно нулю, то согласно (1.10)

$$C=\frac{\nu}{1+\nu}(\beta x_0-\alpha y_0) \tag{1.13}$$

Подставив (1.13) в (1.12), получим крутящий момент, который должен быть приложен на торце помимо силы P, чтобы стержень при изгибе не закручивался. Для создания этого момента необходимо, чтобы сила действовала не вдоль оси X, а вдоль прямой, параллельной этой оси:

$$y=y_i \tag{1.14}$$

где

$$y_i=-\frac{1}{P}M_z=-\frac{\nu}{1+\nu}(\beta x_0-\alpha y_0)\iint\Phi dS- \tag{1.15}$$
$$-\iint\Psi dS+\frac{1}{2}\iint(\alpha x-\beta y)\,xydS+\oint\left[(\alpha x^2+\gamma x)\frac{dy}{ds}-(\beta y^2+\gamma y)\frac{dx}{ds}\right]\Omega_s ds$$

Рассуждая совершенно аналогичным образом, но считая торцевую силу действующей не параллельно оси X, а параллельно оси Y, придем к выражению

$$x_i=\frac{1}{P}M_z=\frac{\nu}{1+\nu}(\beta^*x_0-\alpha^*y_0)\iint\Phi dS+\iint\Psi^*dS-$$
$$-\frac{1}{2}\iint(\alpha^*x-\beta^*y)\,xydS-\oint\left[(\beta^*y^2+\gamma^*y)\frac{dx}{ds}-(\alpha^*x^2+\gamma^*x)\frac{dy}{ds}\right]\Omega_s ds \tag{1.16}$$

в котором (1.17)

$$\alpha^* = \frac{I_{xy}S_0 - S_x S_y}{B}, \quad \beta^* = \frac{S_y^2 - S_0 I_{yy}}{B}, \quad \gamma^* = \frac{I_{yy}S_x - I_{xy}S_y}{B} = -\alpha^* x_0 - \beta^* y_0$$

причем функция Ψ^* подчиняется уравнению

$$\triangle \Psi^* = \frac{2\nu}{1+\nu}(\beta^* x - \alpha^* y) \tag{1.18}$$

и граничному условию

$$\Psi^* = \int_0^s \left[(\beta^* y^2 + \gamma^* y) \frac{dx}{ds} - (\alpha^* x^2 + \gamma^* x) \frac{dy}{ds} \right] ds \tag{1.19}$$

Пересечение прямых $x = x_i$, $y = y_i$ определяет центр изгиба.

§ 2. Преобразование формул для координат центра изгиба. Воспользуемся формулой Грина

$$\iint [U \triangle V - V \triangle U] \, dS = \oint \left[U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds \tag{2.1}$$

подразумевая в ней под U функцию Ψ, а под V — функцию Φ (в соответствии с чем интегрирование в (2.1) будет выполняться по площади и по границе поперечного сечения стержня). Если при этом учесть уравнения (1.2) и граничные условия (1.6), то получим

$$\iint \Psi dS = -\frac{\nu}{1+\nu} \iint (\beta x - \alpha y) \, \Phi dS - \frac{1}{2} \oint \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \tag{2.2}$$

Но

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos ny = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx}{ds} \tag{2.3}$$

Введем сюда вместо функции кручения Прандтля Φ гармоническую функцию кручения Сен-Венана φ (функцию депланации), связанную с Φ зависимостями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -x - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{2.4}$$

Подставив (2.4) в (2.3), находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} - 2 \frac{d\Omega_s}{ds} \tag{2.5}$$

Формулы (2.5), (1.3) и (1.6) позволяют написать

$$\oint \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = -\oint \left[\frac{\partial \varphi}{\partial s} + 2 \frac{d\Omega_s}{ds} \right] \Psi ds = \oint (\varphi + 2\Omega_s) \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds =$$

$$= \oint (\varphi + 2\Omega_s) \left[(\beta y^2 + \gamma y) \frac{dx}{ds} - (\alpha x^2 + \gamma x) \frac{dy}{ds} \right] ds \tag{2.6}$$

Займемся далее преобразованием контурного интеграла:

$$J = \oint \varphi \left[(\beta y^2 + \gamma y) \frac{dx}{ds} - (\alpha x^2 + \gamma x) \frac{dy}{ds} \right] ds =$$

$$= -\oint \varphi \left[(\beta y^2 + \gamma y) \cos ny + (\alpha x^2 + \gamma x) \cos nx \right] ds \tag{2.7}$$

На основании формулы Гаусса-Остроградского

$$J = -2 \iint (\alpha x + \beta y + \gamma) \varphi dS - \iint \left[(\beta y^2 + \gamma y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\alpha x^2 + \gamma x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dS \tag{2.8}$$

Подставив сюда вместо $\partial\varphi / \partial x$, $\partial\varphi / \partial y$ их выражения согласно (2.4), получаем равенство

$$
\begin{gathered}
J = -2\iint(\alpha x + \beta y + \gamma)\varphi dS + \iint(\beta y - \alpha x)xy\,dS - \\
-\iint\left[\frac{\partial\Phi(\alpha x^2 + \gamma x)}{\partial y} - \frac{\partial\Phi(\beta y^2 + \gamma y)}{\partial x}\right]dS = \\
= -2\iint(\alpha x + \beta y + \gamma)\varphi dS + \iint(\beta y - \alpha x)xy\,dS + \\
+ \oint[(\beta y^2 + \gamma y)\cos nx - (\alpha x^2 + \gamma x)\cos ny]\,\Phi\,ds
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

На контуре поперечного сечения стержня $\Phi = 0$ и, следовательно,

$$
J = -2\iint(\alpha x + \beta y + \gamma)\varphi dS + \iint(\beta y - \alpha x)xy\,dS
\tag{2.10}
$$

Теперь с учетом (2.6) и (2.10) выражение (2.2) принимает вид:

$$
\begin{gathered}
\iint\Psi dS = -\frac{\nu}{1+\nu}\iint(\beta x - \alpha y)\Phi dS - \frac{1}{2}\iint(\beta y - \alpha x)xy dS + \\
+\iint(\alpha x + \beta y + \gamma)\varphi dS - \oint\left[(\beta y^2 + \gamma y)\frac{dx}{ds} - (\alpha x^2 + \gamma x)\frac{dy}{ds}\right]\Omega_s ds
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

Введя этот результат в (1.15), приходим к следующей формуле для координаты центра изгиба:

$$
y_i = -\iint(\alpha x + \beta y + \gamma)\varphi dS - \frac{\nu}{1+\nu}\iint[\alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0)]\,\Phi\,dS
\tag{2.12}
$$

Путем совершенно аналогичных рассуждений можно вывести формулу и для другой его координаты:

$$
x_i = \iint(\alpha^* x + \beta^* y + \gamma^*)\varphi dS + \frac{\nu}{1+\nu}\iint[\alpha^*(y - y_0) - \beta^*(x - x_0)]\,\Phi\,dS
\tag{2.13}
$$

На основании (1.4) и (1.17) формулам (2.12) и (2.13) может быть придан следующий, более симметричный вид:

$$
\begin{gathered}
x_i = \iint[\alpha^*(x - x_0) + \beta^*(y - y_0)]\varphi dS + \frac{\nu}{1+\nu}\iint[\alpha^*(y - y_0) - \beta^*(x - x_0)]\Phi dS \\
y_i = -\iint[\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)]\varphi dS - \frac{\nu}{1+\nu}\iint[\alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0)]\Phi dS
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

Данные выражения сводят определение положения центра изгиба стержня с односвязным поперечным сечением к решению задачи о его кручении, а если последнее известно, то к квадратурам. Наиболее просто они выглядят, если X, Y совпадают с главными осями инерции поперечного сечения. В этом последнем случае

$$
\begin{gathered}
x_i = -\frac{1}{I_x}\left\{\iint y\varphi dS - \frac{\nu}{1+\nu}\iint x\Phi dS\right\} \\
y_i = \frac{1}{I_y}\left\{\iint x\varphi dS + \frac{\nu}{1+\nu}\iint y\Phi dS\right\}
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

где I_x, I_y — главные моменты инерции поперечного сечения.

Однако главные оси не всегда удобны при решении задачи о кручении. Именно поэтому формулы, определяющие положение центра изгиба, были выше даны в произвольной системе координат.

Поступила 29 XII 1956