НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В. С. Губенко

(Днепропетровск)

1. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_0}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

для пространственного осесимметричного случая можно преобразовать к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u_{-1/2}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u_{-1/2}}{\partial z^2} = 0 \qquad (2)$$

на плоскости следующим образом. Продифференцируем n раз уравнение (1) по ρ; получим

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho^2} + \frac{2n+1}{\rho} + \frac{\partial u_n}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} = 0 \qquad (3)$$

где

$$u_n = c\,\frac{\partial^n u_0}{\partial (\rho^2)^n} \quad (c \text{ — произвольная постояннная}) \qquad (4)$$

В последнем равенстве возьмем производную порядка $1/2$ по ρ^2 и положим $n = -1/2$. Тогда

$$u_0 = C\,\frac{\partial^{1/2} u_{-1/2}}{\partial (\rho^2)^{1/2}} \qquad (5)$$

а уравнение (3) преобразуется к уравнению (2).

В том, что функция $u_{-1/2}$ будет удовлетворять уравнению (2), можно убедиться, если представить u_n в виде

$$u_n = \frac{1}{\rho^n}\int_0^\infty \frac{f_n(\alpha)}{\alpha^n}\,[AJ_n(\alpha\rho) + BJ_{-n}(\alpha\rho)]\,e^{\alpha z}d\alpha,\ \ldots \qquad (6)$$

которая удовлетворяет уравнению (3) и, следовательно, (2) при $n = -1/2$.

Здесь A и B — произвольные постоянные, J_n и J_{-n} — функции Бесселя.

В этом же можно убедиться непосредственно дифференцированием соотношения (6) по ρ^2 при $n = -1/2$. Действительно, при $n = -1/2$

$$u_{-1/2} = \int_0^\infty \sqrt{\alpha\rho}\, f_{-1/2}(\alpha)\,[AJ_{-1/2}(\alpha\rho) + BJ_{1/2}(\alpha\rho)]\,e^{\alpha z}d\alpha,\ \ldots \qquad (7)$$

Представляя теперь функцию Бесселя порядка $n = \pm 1/2$ в виде ряда и дифференцируя (7) k раз по ρ^2, полагая после чего $k = 1/2$, получим

$$\frac{\partial^{1/2} u_{-1/2}}{\partial (\rho^2)^{1/2}} = D\int_0^\infty f_0(\alpha)\,J_0(\alpha\rho)\,e^{\alpha z}d\alpha = \frac{1}{c}\,u_0$$

где D — произвольная постоянная. Рассмотрим примеры.

а) *Круговой штамп с плоским основанием.* Пусть в упругое полупространство силой P вдавливается абсолютно твердое тело (штамп), имеющее в плане форму круга радиуса a, причем линия действия силы P проходит через центр круга перпендикулярно его плоскости; трения под штампом и нагрузка вне штампа отсутствуют. Определим давление под штампом для случая плоского основания.

Как известно[1, 2] решение этой задачи сводится к отысканию гармонической в полупространстве функции $u_0(\rho, z)$ по условиям на границе

$$u_0(\rho, 0) = h \quad (\text{под штампом}), \qquad \frac{\partial u_0(\rho, 0)}{\partial z} \quad (\text{вне штампа}) \tag{8}$$

где h — просадка под штампом, возникающая под действием силы P. Если воспользоваться формулой

$$\frac{d^k}{d(r^2)^k}(r^2)^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)}(r^2)^{n-k} \tag{9}$$

где Γ — знак гамма-функции, то граничные условия (8) преобразуются по соотношению (5) для функции $u_{-1/2}(\rho, z)$

$$u_{-1/2}(\rho, 0) = g\sqrt{\rho^2} \quad (\text{под штампом}), \qquad \frac{\partial u_{-1/2}(\rho, 0)}{\partial z} = 0 \quad (\text{вне штампа}) \tag{10}$$

где g — произвольная постоянная.

Таким образом, получаем плоскую контактную задачу с указанными граничными условиями. Как известно[3], давление под штампом в этом случае вычисляется по формуле

$$P_{-1/2} = \frac{P_0}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{Eg\sqrt{r^2}}{2(1-\nu^2)\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{11}$$

где P_0 — прижимающая штамп сила, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Дифференцируя последнее равенство k раз по r^2, отбрасывая члены [4], содержащие особенности порядка (-1) и выше, и полагая затем $k = 1/2$, получим, учитывая (9), давление под штампом с круговым основанием:

$$P_0 = \frac{A}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad \text{или} \quad P_0 = \frac{P}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}$$

если произвольную постоянную выбрать так, чтобы

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^a P_0(r)\, r\,dr\,d\varphi$$

Эта известная формула была получена многими авторами другими путями [1].

б) Кольцевой штамп с плоским основанием. Повторяя те же рассуждения, что в случае кругового штампа, для давления под кольцевым штампом с плоским основанием получим

$$P_0 = \frac{Pr}{2\pi J\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}, \qquad J = \int_b^a \frac{r^2 dr}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}$$

где b — внутренний радиус кольца.

При этом соответствующую плоскую задачу надо брать для двух участков контакта.

Поступила 19 V 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., 1955.
2. Моссаковский В. И. и Губенко В. С. О давлении кольцевого штампа на упругое полупространство. Научн. зап. ДГУ, т. XXXV, 1956.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые контактные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
4. Леонов М. Я. Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.