ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ЖЕСТКОМ ШТАМПЕ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ВРАЩЕНИЯ, ИЗОБРАЖАЕМОЙ ПОЛИНОМОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ

В. И. Довнорович

(Гомель)

Задачи о вдавливании в упругое полупространство жестких штампов в виде тел вращений рассматривались в работах Л. А. Галина [1], А. И. Лурье [2], М. Я. Леонова [3, 4], И. Я. Штаермана [5] и других.

В настоящей работе рассматривается задача о симметричном давлении на упругое полупространство жесткого штампа в виде кругового цилиндра радиуса r, основанием которого является поверхность вращения:

$$z = b_1\rho^2 + b_2\rho^4 + \ldots + b_k\rho^{2k} \qquad \left(\rho = \sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{1}$$

Контакт жесткого штампа с упругим полупространством может осуществляться как по кругу радиуса $a < r$, так и по кругу радиуса $a = r$.

Рассматриваемая задача, как известно, сводится к отысканию гармонической в полупространстве функции $V = V(x, y, z)$, которая на границе упругого полупространства удовлетворяет следующим предельным условиям:

(а) на бесконечности функция $V(x, y, z)$ обращается в нуль, убывая не медленнее, чем R^{-1};

(б) внутри окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ границы упругого полупространства функции $V(x, y, z)$ принимает заданные значения:

$$V(x, y, 0) = b - \varphi(x, y) = \Phi(x, y) \tag{2}$$

(в) на свободной поверхности границы упругого полупространства вне круга $x^2+y^2=a^2$ при $z=0$

$$\partial V / \partial z = 0 \tag{3}$$

где b — жесткое смещение штампа, $z=\varphi(x, y)$ — уравнение поверхности штампа, причем $\varphi(x, y, z) \geqslant 0$ и ось z направлена внутрь полупространства.

На основании работы польского математика Зарембы [6], как отмечено в работе автора [7] (см. также книгу С. Г. Михлина [8]), вытекает единственное существование гармонической в полупространстве $z<0$ функции $V(x, y, z)$, удовлетворяющей на границе упругого полупространства условиям (а), (б), (в) и представимой в виде потенциала простого слоя

$$V(x, y, z) = \iint\limits_S \frac{\mu(x_1, y_1)\,dx_1dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2}} \tag{4}$$

с плотностью $\mu(x, y)$, распределенной по площади круга $x^2+y^2=a^2$.

Удовлетворение краевым условиям (2) и (3) для потенциала простого слоя (4) приводит к интегральному уравнению первого рода

$$\Phi(x, y) = b - \varphi(x, y) = \iint\limits_S \frac{\mu(x_1, y_1)\,dx_1dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} \tag{5}$$

В работе Л. А. Галина [9] установлено следующее предложение: если аппликата поверхности основания эллиптического (кругового) в плане штампа после погружения его в упругое полупространство есть полином $\Phi(x, y)$ степени n, то плотность $\mu(x, y)$ потенциала простого слоя, т. е. решение интегрального уравнения (5), имеет вид:

$$\mu(x, y) = \frac{L(x, y)}{\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}} \qquad \left(\mu(x, y) = \frac{L(x, y)}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right) \tag{6}$$

где $L(x, y)$ — полином, степень которого также равна n.

Так как поверхность рассматриваемого нами штампа симметрична относительно оси z, то напряжение под штампом, а следовательно, и плотность $\mu(x, y)$ должны быть симметричными функциями относительно начала координат, т. е. $\mu(x, y)$ является функцией только переменной $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. На основании равенства (6), указанного в скобках, следует, что функция $L(x, y)$ зависит только от ρ. Но $L(x, y)$ — полином степени n относительно x и y. Поэтому плотность $\mu(x, y)$, принимая во внимание равенство (1), должна быть полиномом степени k относительно ρ^2, умноженным на $1/\sqrt{a^2-\rho^2}$, т. е.

$$\mu(x, y)=\frac{c_0+c_1\rho^2+\ldots+c_k\rho^{2k}}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \tag{7}$$

Коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_k$ определяются на основании равенства (1), (5) и (7) из условия, чтобы имело место следующее интегральное уравнение первого рода:

$$b-b_1\rho^2-\ldots-b_k\rho^{2k}=\iint\limits_S\frac{(c_0+c_1\rho_1{}^2+\ldots+c_k\rho_1{}^{2k})\,dx_1dy_1}{\sqrt{a^2-\rho_1{}^2}\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} \tag{8}$$

где S — круг радиуса a, по которому осуществляется контакт штампа с упругим полупространством, $\rho_1{}^2=x_1{}^2+y_1{}^2$.

Потенциал простого слоя

$$V(x, y, z)=\iint\limits_S\frac{(c_0+c_1\rho_1{}^2+\ldots+c_k\rho_1{}^{2k})\,dx_1dy_1}{\sqrt{a^2-\rho^2}\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2}} \tag{9}$$

представляет гармоническую функцию вне площади S, при $z=0$ равен интегралу правой части равенства (8) и является симметричной функцией относительно оси z. Поэтому этот потенциал внутри полусферы $R\leqslant a$ и $z\geqslant 0$ можно представить в виде ряда (см., например, книгу В. И. Смирнова [10])

$$V(R, \varphi, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(\cos\theta)\left(\frac{R}{a}\right)^n \tag{10}$$

где R, φ, θ — сферические координаты и $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра.

Для точек оси z выражение (10) принимает вид:

$$V(R, 0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{R}{a}\right)^n \tag{11}$$

Потенциал простого слоя (9) на оси z принимает следующие значения:

$$V_{0z}=\pi\int_0^{a^2}\frac{c_0+c_1t+\ldots+c_kt^k}{\sqrt{(a^2-t)(z^2+t)}}\,dt \tag{12}$$

Замена переменных $u=\sqrt{a^2-t}\,/\sqrt{z^2+t}$ для интегралов (12) дает

$$J=\pi\int_0^{a^2}\frac{t^l}{\sqrt{(a^2-t)(z^2+t)}}\,dt=2\pi\int_0^{a/z}\frac{(a^2+z^2u^2)^l}{(1+u^2)^{l+1}}\,du \qquad (l=0, 1, \ldots, k)$$

или

$$J=2\pi\sum_{p=0}^{l}(-1)^pc_l^pa^{2(l-p)}z^{2p}J_1, \qquad J_1=\int_0^{a/z}\frac{u^{2p}}{(1+u^2)^{l+1}}\,du \tag{13}$$

$$\left(c_l^p=\frac{l(l-1)\ldots[l-(p-1)]}{p!}\right)$$

Для J_1 на основании известных формул приведения [11, 12] имеем

$$J_1=(-1)^p\frac{(2p-1)(2p-3)\ldots5.3\,(2l-1)(2l-3)\ldots5.3}{(2p-1-2l)(2p-3-2l)\ldots(3-2l)(1-2l)\,2l\,(2l-2)\ldots4.2}\times$$

$$\times\left[\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1}\right]+\frac{L_{2l-1}(a/z)(z/a)^{2l}}{[1+(z/a)^2]^l} \tag{14}$$

где $L_{2l-1}(a/z)$ — определенный нечетный полином степени $2l-1$ относительно a/z, которого приводить нет необходимости.

Если выражение $[1+(z/a)^2]^{-l}$ разложить в ряд по степеням $(z/a)^2$, то второе слагаемое правой части равенства (14) при $z < a$ можно представить в виде ряда нечетных степеней z/a. Поэтому второму интегралу (13) можно придать вид:

$$J_1 = (-1)^p \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 5.3\,(2l-1)(2l-3)\ldots 5.3\pi}{2(2p-1-2l)(2p-3-2l)\ldots(3-2l)(1-2l)\,2l\,(2l-2)\ldots 4.2} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1} \qquad (15)$$

Общую формулу для коэффициентов c_{2n+1} приводить нет необходимости.

Подставляя (15) в равенство (13), получим

$$J = \pi^2 a^{2l} \sum_{p=0}^{l} \frac{(-1)^p\, 3\cdot 5\cdot 7\ldots[2(l-p)-1]\,3\cdot 5\cdot 7\ldots(2p-1)}{2^l (l-p)!\,p!}\left(\frac{z}{a}\right)^{2p} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1}$$

или

$$J = \sum_{p=0}^{l} A_p{}^l \left(\frac{z}{a}\right)^{2p} + \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1} \qquad (16)$$

где

$$A_p{}^l = \frac{(-1)^p \pi^2 a^{2l}\, 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2p-1)\,1\cdot 3\cdot 5\ldots[2(l-p)-1]}{2^l (l-p)!\,p!} \qquad (17)$$

$p = 0, 1, 2, \ldots, l$, $l = 0, 1, 2, \ldots, k$, значения коэффициентов E_{2n+1} нет необходимости приводить.

На основании (16) равенству (12) можно придать вид:

$$V_{0z} = \sum_{l=0}^{k} c_l \sum_{p=0}^{l} A_p{}^l \left(\frac{z}{a}\right)^{2p} + \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1} =$$

$$= B_0 + B_1\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \ldots + B_k\left(\frac{z}{a}\right)^{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1} \qquad (18)$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= c_0 A_0{}^0 + c_1 A_0{}^1 + c_2 A_0{}^2 + \ldots + c_k A_0{}^k \\ B_1 &= c_1 A_1{}^1 + c_2 A_1{}^2 + c_3 A_1{}^3 + \ldots + c_k A_1{}^k \\ B_2 &= c_2 A_2{}^2 + c_3 A_2{}^3 + c_4 A_2{}^4 + \ldots + c_k A_2{}^k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{k-1} &= c_{k-1} A_{k-1}{}^{k-1} + c_k A_{k-1}{}^k \\ B_k &= c_k A_k{}^k \end{aligned} \qquad (19)$$

Значения коэффициентов F_{2n+1}, как будет видно ниже, нет необходимости приводить.

Приравнивая коэффициенты в равенствах (11) и (18), получим

$$A_0 = B_0, \quad A_2 = B_2, \ldots, A_{2k} = B_{2k}, \quad A_{2n+1} = F_{2n+1}$$
$$A_{2n} = 0 \quad \text{при} \quad n = k+1, \ k+2, \ldots$$

Таким образом, потенциал простого слоя (9) внутри полусферы $R \leqslant a$ и $z \geqslant 0$ представляется в виде ряда

$$V = B_0 + B_1 P_2(\cos\theta)\left(\frac{R}{a}\right)^2 + B_2 P_4(\cos\theta)\left(\frac{R}{a}\right)^4 + \ldots$$

$$\ldots + B_k P_{2k}(\cos\theta)\left(\frac{R}{a}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta)\left(\frac{R}{a}\right)^{2n+1}$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $z \to 0$, т. е. $\theta \to {}^1/_2\pi$, получим в пределе правую часть равенства (8). Поэтому равенство (8) приводится к виду

$$b - b_1\rho^2 - b_2\rho^4 - \ldots - b_k\rho^{2k} =$$
$$= B_0 - \frac{1}{2a^2} B_1\rho^2 + \frac{3}{8a^4} B_2\rho^4 + \ldots + (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)B_k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2ka^{2k}} \rho^{2k}$$

Приравнивая коэффициенты в обеих частях этого равенства, на основании равенства (19) получаем

$$\begin{aligned}
b &= c_0A_0^0 + c_1A_0^1 + c_2A_0^2 + \ldots + c_kA_0^k \\
b_1 &= \frac{1}{2a^2}(c_1A_1^1 + c_2A_1^2 + c_3A_1^3 + \ldots + c_kA_1^k) \\
b_2 &= -\frac{3}{8a^4}(c_2A_2^2 + c_3A_2^3 + c_4A_2^4 + \ldots + c_kA_2^k) \\
b_3 &= \frac{5}{16}a^6(c_3A_3^3 + c_4A_3^4 + c_5A_3^5 + \ldots + c_kA_3^k) \qquad (20) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{k-1} &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k-2)\, a^{2k-2}}(c_{k-1}A_{k-1}^{k-1} + c_kA_{k-1}^k) \\
b_k &= (-1)^{k+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2ka^{2k}} c_kA_k^k
\end{aligned}$$

Нормальное напряжение под штампом определяется, как известно, формулой

$$\sigma_z = -\frac{2\pi mG\mu(\rho)}{m-1} \qquad (21)$$

где m — величина, обратная коэффициенту Пуассона, $\mu(\rho)$ определяется равенством (7). Сила Q, прижимающая штамп, равна

$$Q = -\int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma_z \rho\, d\rho\, d\varphi$$

Поэтому на основании равенств (21) и (7) получаем

$$Q = \frac{4\pi^2 mG}{m-1}\left[c_0a + \frac{2}{3}c_1a^3 + \frac{8}{15}c_2a^5 + \ldots + \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}c_ka^{2k+1}\right] \qquad (22)$$

Если штамп гладкий, то напряжение σ_z на контуре области контакта штампа с упругой средой равно нулю. Следовательно, на основании равенств (21) и (7) получаем

$$c_0 + c_1a^2 + c_2a^4 + \ldots + c_ka^{2k} = 0 \qquad (23)$$

Таким образом, задача определения плотности $\mu(\rho)$ потенциала простого слоя (4), а следовательно, и напряжения (21) под штампом в случае симметричного вдавливания в упругое полупространство штампа в виде неограниченной поверхности вращения (1) (штамп без краевой линии) сводится к решению простой системы из $k+3$ линейных уравнений (20), (22) и (23) относительно $k+3$ неизвестных,

$$a,\ b,\ c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k$$

В случае штампа с краевой линией решение данной задачи должно выполняться следующим образом.

Решаем систему уравнений (20), (22) и (23) относительно неизвестных a, b, c_0, c_1, $\ldots$, c_k. Если при этом получим, что $a \leqslant r$, то имеет место рассмотренный выше случай.

Если же $a > r$, то контакт штампа с упругим полупространством может осуществляться только по кругу радиуса $a = r$. Поэтому в этом случае рассматриваемая нами задача об определении плотности $\mu(\rho)$ потенциала простого слоя (4) или напряжения под штампом (21) сводится к решению системы из $k+2$ уравнений (20) и (22) относительно $k+2$ неизвестных.

Рассмотрим задачу о штампе, основанием которого является поверхность, изображаемая уравнением

$$z = b_1\rho^2 + b_2\rho^4 + b_3\rho^6 + b_4\rho^8 + b_5\rho^{10} \tag{24}$$

Уравнения (20) для штампа с поверхностью (24) имеют вид:

$$\begin{aligned}
&b = c_0A_0{}^0 + c_1A_0{}^1 + c_2A_0{}^2 + c_3A_0{}^3 + c_4A_0{}^4 + c_5A_0{}^5\\
&c_1A_1{}^1 + c_2A_1{}^2 + c_3A_1{}^3 + c_4A_1{}^4 + c_5A_1{}^5 = 2a^2b_1\\
&c_2A_2{}^2 + c_3A_2{}^3 + c_4A_2{}^4 + c_5A_2{}^5 = -\frac{8}{3}\,a^4b_2\\
&c_3A_3{}^3 + c_4A_3{}^4 + c_5A_3{}^5 = \frac{16}{5}\,a^6b_3\\
&c_4A_4{}^4 + c_5A_4{}^5 = -\frac{128}{35}\,a^8b_4\\
&c_5A_5{}^5 = \frac{256}{63}\,a^{10}b_5
\end{aligned} \tag{25}$$

На основании равенства (17) получим

$$A_1{}^1 = -\frac{\pi^2a^2}{2},\quad A_1{}^2 = -\frac{\pi^2a^4}{2^2},\quad A_1{}^3 = -\frac{3\pi^2a^6}{2^4},\quad A_1{}^4 = -\frac{5\pi^2a^8}{2^5}$$

$$A_1{}^5 = -\frac{35\pi^2a^{10}}{2^8},\quad A_2{}^2 = \frac{3\pi^2a^4}{2^3},\quad A_2{}^3 = \frac{3\pi^2a^6}{2^4},\quad A_2{}^4 = \frac{9\pi^2a^8}{2^6}$$

$$A_2{}^5 = \frac{15\pi^2a^{10}}{2^7},\quad A_3{}^3 = -\frac{5\pi^2a^6}{2^4},\quad A_3{}^4 = -\frac{5\pi^2a^8}{2^5},\quad A_3{}^5 = -\frac{15\pi^2a^{10}}{2^7}$$

$$A_4{}^4 = \frac{35\pi^2a^8}{2^7},\quad A_4{}^5 = \frac{35\pi^2a^{10}}{2^8},\quad A_5{}^5 = -\frac{63\pi^2a^{10}}{2^8},\quad A_0{}^0 = \pi^2,\quad A_0{}^1 = \frac{\pi^2a^2}{2}$$

$$A_0{}^2 = \frac{3}{8}\,\pi^2a^4,\quad A_0{}^3 = \frac{5}{16}\,\pi^2a^6,\quad A_0{}^4 = \frac{35}{128}\,\pi^2a^8,\quad A_0{}^5 = \frac{63}{256}\,\pi^2a^{10}$$

Решая систему уравнений (25), имеем

$$\begin{aligned}
&c_0 = \frac{1}{\pi^2}\left(b + \frac{1792}{63^2}\,a^{10}b_5 + \frac{640}{35^2}\,a^8b_4 + \frac{16}{25}\,a^6b_3 + \frac{8}{9}\,a^4b_2 + 2a^2b_1\right)\\
&c_1 = \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{640}{63^2}\,a^8b_5 + \frac{256}{35^2}\,a^6b_4 + \frac{8}{25}\,a_4b_3 + \frac{8}{9}\,a^2b_2 - b_1\right)\\
&c_2 = \frac{64}{\pi^2}\left(\frac{64}{63^2}\,a^6b_5 + \frac{32}{35^2}\,a^4b_4 + \frac{2}{25}\,a^2b_3 - \frac{1}{9}\,b_2\right)\\
&c_3 = \frac{256}{\pi^2}\left(\frac{32}{63^2}\,a^4b_5 + \frac{32}{35^2}\,a^2b_3 - \frac{1}{25}\,b_3\right)\\
&c_4 = \frac{128^2}{7^2\pi^2}\left(\frac{2}{81}\,a^2b_5 - \frac{1}{25}\,b_4\right),\qquad c_5 = -\frac{256\,b_5}{63^2\pi^2}
\end{aligned} \tag{26}$$

Сила, производящая давление на штамп, на основании (22) равна

$$Q = \frac{4\pi^2mG}{m-1}\left(c_0a + \frac{2}{3}\,c_1a^3 + \frac{8}{15}\,c_2a^5 + \frac{16}{35}\,c_3a^7 + \frac{128}{315}\,c_4a^9 + \frac{256}{693}\,c_5a^{11}\right) \tag{27}$$

Если штамп без краевой линии, то на основании равенств (23) и (26) имеем

$$c_0 = \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{4480}{63^2}\,a^{10}b_5 + \frac{1280}{35^2}\,a^8b_4 + \frac{24}{25}\,a^6b_3 + \frac{8}{9}\,a^4b_2 + a^2b_1\right) \tag{28}$$

Жесткое перемещение штампа в этом случае на основании первого равенства (26) и (28) равно

$$b = \frac{256}{63} a^{10} b_5 + \frac{128}{35} a^8 b_4 + \frac{16}{5} a^6 b_3 + \frac{8}{3} a^4 b_2 + 2 b_1 a^2 \tag{29}$$

Частные случаи. 1. Задача Буссинеска — плоский круговой штамп радиуса a. На основании (7), (21), (26) и (27) получаем

$$\sigma_z = -\frac{2mbG}{\pi (m-1)\sqrt{a^2-\rho^2}} \quad \text{или} \quad \sigma_z = -\frac{Q}{2\pi a \sqrt{a^2-\rho^2}}$$

что совпадает с решением Буссинеска [13].

2. Круговой штамп радиуса r, основанием которого является поверхность $z = A\rho^2$. Если предполагать штамп без краевой линии, то, воспользовавшись (7), (21), (26), (27), (28) и (29), получаем результаты Герца [14]:

$$b = 2Aa^2, \qquad \sigma_z = -\frac{8mGA}{\pi(m-1)}\sqrt{a^2-\rho^2}, \qquad Q = \frac{16ma^3GA}{3(m-1)} \tag{30}$$

Если сила Q, прижимающая штамп, такова, что на основании последней формулы (30) $a > r$, то приведенными решениями (30) пользоваться нельзя. В этом случае края штампа будут оказывать давление на упругое полупространство и контакт штампа с упругим полупространством будет осуществляться по кругу радиуса $a = r$.

На основании (7), (21), (26) и (27) получаем

$$\sigma_z = -\frac{2mG(b + 2Ar^2 - 4A\rho^2)}{\pi(m-1)\sqrt{r^2-\rho^2}}, \qquad b = \frac{Q(m-1)}{4mGr} + \frac{2}{3}Ar^2$$

причем $b > 2Ar^2$. Из первой формулы замечаем, что напряжение на контуре круга $\rho = r$ (под краями штампа) обращается в бесконечность.

3. Круговой штамп радиуса r, основанием которого является поверхность

$$z = A(112a^2\rho^2 - 45\rho^4)$$

Если края штампа не оказывают давления на упругое полупространство, то на основании (7), (21), (26), (27), (28) и (29) получаем

$$b = 104a^4A, \qquad \sigma_z = -\frac{64mGA}{\pi(m-1)}(9a^2 - 10\rho^2)\sqrt{a^2-\rho^2}, \qquad Q = \frac{640ma^5GA}{3(m-1)} \tag{31}$$

Полученное выражение для σ_z совпадает с результатом, опубликованным в литературе.

Если при решении последнего равенства (31) получаем $a > r$, то решениями (31) пользоваться нельзя (края штампа оказывают давление на упругое полупространство). Поэтому, как и прежде, полагая $a = r$ и воспользовавшись (7), (21), (26) и (27), получаем

$$\sigma_z = -\frac{2mG(b + 184Ar^4 - 608Ar^2\rho^2 + 320A\rho^4)}{\pi(m-1)\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

$$b = \frac{Q(m-1)}{4mGr} + \frac{152}{3}Ar^4$$

4. Круговой штамп радиуса r, основанием которого является поверхность $z = (63^2/256)A\rho^{10}$.

Если края штампа не производят давления на упругое полупространство, то, воспользовавшись (7), (21), (26), (27), (28) и (29), получаем

$$b = 63Aa^{10}, \qquad Q = \frac{2520ma^{11}GA}{11\pi(m-1)} \tag{32}$$

$$\sigma_z = -\frac{2mGA}{\pi(m-1)}(70a^8 + 80a^6\rho^2 + 96a^4\rho^4 + 128a^2\rho^6 + 256\rho^8)\sqrt{a^2-\rho^2}$$

Вычисление жесткого перемещения по формуле Л. А. Галина [15]

$$b = Ba^{\lambda} 2^{\lambda-2} \lambda \Gamma (^1/_2 \lambda)^2 / \Gamma (\lambda)$$

где $B = (63^2 / 256) A$ и $\lambda = 10$, дает результат, совпадающий с первой формулой (32).

Если же края штампа оказывают давление на упругое полупространство, т. е. в результате решения последнего уравнения (32) получаем $a > r$, то, полагая $a = r$ и воспользовавшись (7), (21), (26) и (27), получаем

$$\sigma_z = -\frac{2mG\,(b + 7r^{10}A + 10r^8A\rho^2 + 16r^6A\rho^4 + 32r^4A\rho^6 + 128r^2A\rho^8 - 256A\rho^{10})}{\pi\,(m-1)\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

$$b = \frac{(m-1)\,Q}{4mrG} + \frac{63}{11} Ar^{11}$$

5. Штамп с поверхностью

$$z = A\,(a^8\rho^2 - 720a^6\rho^4 + 500a^4\rho^6 - 3.35^2a^2\rho^8 + 63^2\rho^{10})$$

Если края штампа не оказывают давления на упругое полупространство, то, принимая во внимание (7), (21), (26), (28) и (29), получим

$$b = 2370Aa^{10}$$

$$\sigma_z = -\frac{2mGA}{\pi\,(m-1)}\,(1924a^8 - 512a^6\rho^2 + 5120a^4\rho^4 - 128^2a^2\rho^6 + 256^2\rho^8)\sqrt{a^2-\rho^2}$$

Если же края штампа производят давление на упругое полупространство, то

$$a = r$$

Поэтому, воспользовавшись (7), (21) и (26), получаем

$$\sigma_z = -\frac{2mGA\,(b/A - 446r^{10} - 2436r^8\rho^2 + 5632r^6\rho^4 - 84\cdot 256r^4\rho^6 + 5.128^2r^2\rho^8 - 256^2\rho^{10})}{\pi\,(m-1)\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

Здесь жесткое перемещение штампа должно удовлетворять условию $b > 2370\,Ar^{10}$.

Поступила 3 IV 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., 1953.
2. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости М., 1955.
3. Леонов М. Я. К теории расчета упругих оснований. ПММ, т. III, вып. 2, 1939.
4. Леонов М. Я. Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство. ПММ, т. XVII, вып. 1, стр. 87, 1953.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости, М.—Л., 1949.
6. Заремба С. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа. Успехи математических наук, т. I, вып. 3—4, 1946.
7. Довнорович В. И. Давление жесткого штампа на упругое полупространство. Ученые записки ЛГУ, серия математических наук. Механика, № 114, вып. 17, стр. 155—188, 1949.
8. Михлин С. Г. Интегральные уравнения, М.—Л., 1949, стр. 326—332.
9. Галин Л. А. О давлении штампа эллиптической формы в плане на упругое полупространство. ПММ, т. XI, вып. 2, 1947.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. II. М.—Л., 1949.
11. Тимофеев А. Ф. Интегрирование функций. М.—Л., 1948.
12. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., 1948.
13. Boussinesg. Applications des potentiels a' l'équilibre et du mouvement des solides e'lastiques. Paris, 1885.
14. Hertz H. Gesammelte Werke, Bd. I, 1895.
15. Галин Л. А. Пространственные контактные задачи теории упругости для штампов круговой формы в плане. ПММ, т. X, вып. 4, 1946, 425—448.