АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Е. Кузмак

(Москва)

В статье рассматривается уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a(\tau)\,y - b(\tau)\,y^3 = 0 \qquad (\tau = \varepsilon t) \tag{0.1}$$

часто встречающееся в различных технических вопросах. Целью работы является определение первых членов асимптотического разложения решения при малых ε. Аналогичная задача рассматривалась в работах [1, 2].

Примененный в настоящей работе метод состоит в том. что решение этого уравнения выражается через решение некоторого аналогичного уравнения («эталонного уравнения»). Такой способ «эталонных уравнений» разработан в случае линейных уравнений [3, 4]; к нелинейным же уравнениям он, по-видимому, не применялся.

В качестве «эталонного» уравнения в рассматриваемом случае выбрано уравнение для эллиптического синуса (см. (1.7)), которое отличается от (0.1) лишь тем, что в нем медленно меняющиеся коэффициенты заменены постоянными величинами.

§ 1. Вычисление первых членов асимптотического разложения. Для того чтобы найти асимптотическое разложение решения уравнения (0.1), необходимо заранее примерно представить себе зависимость решения от времени и малого параметра.

В том случае, когда коэффициенты a и b постоянны, решением уравнения (0.1) является функция $A\,\mathrm{sn}\,(\varphi t,\ \nu)$, где A, φ и ν — некоторые константы.

В случае медленно изменяющихся коэффициентов решение будет какой-то функцией, близкой к эллиптическому синусу, но уже с переменной амплитудой, частотой и модулем. Поэтому в этом случае решение можно представить в виде[1]

$$y = A(\tau)\,\mathrm{sn}\,[T(\tau)\,\omega,\ \nu(\tau)] + O(\varepsilon) \qquad \left(\omega = \int \varphi(\tau)\,dt\right) \tag{1.1}$$

Рассмотрение (1.1) показывает, что решение зависит от переменных τ и ω, производные которых $d\tau / dt = \varepsilon$ и $d\omega / dt = \varphi(\tau)$ представляют собой величины разного порядка по ε.

Полагая $y = y(\tau,\ \omega,\ \varepsilon)$, будем искать y как функцию двух переменных τ и ω. Уравнение (0.1) примет вид:

$$\varphi^2\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2} + \varepsilon\left(2\varphi\frac{\partial^2 y}{\partial\omega\partial\tau} + \varphi'\frac{\partial y}{\partial\omega}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^2} + a(\tau)\,y - b(\tau)\,y^3 = 0 \tag{1.2}$$

Решение будем искать с точностью до членов порядка ε^2:

$$y = y_0(\tau,\ \omega) + \varepsilon y_1(\tau,\ \omega)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.2), получим

$$\begin{aligned}&\left\{\varphi^2\frac{\partial^2 y_0}{\partial\omega^2} + a(\tau)\,y_0 - b(\tau)\,y_0^3\right\} + \\ &+ \varepsilon\left\{\varphi^2\frac{\partial^2 y_1}{\partial\omega^2} + [a(\tau) - 3b(\tau)\,y_0^2]\,y_1 + 2\varphi\frac{\partial^2 y_0}{\partial\omega\partial\tau} + \varphi'\frac{\partial y_0}{\partial\omega}\right\} + \varepsilon^2\Delta(t) = 0\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь

$$\Delta(t) = -3b(\tau)\,y_0y_1^2 + 2\varphi\frac{\partial^2 y_1}{\partial\omega\partial\tau} + \varphi'\frac{\partial y_1}{\partial\omega} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial\tau^2} + \varepsilon\left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial\tau^2} - b(\tau)\,y_1^3\right]$$

---

[1] Всюду в настоящей работе через ν будем обозначать квадрат модуля эллиптических функций и интегралов. В связи с этим вместо принятых обозначений $\mathrm{sn}\,(u,\ \sqrt{\nu})$, $\mathrm{cn}\,(u,\ \sqrt{\nu})$, $\mathrm{dn}\,(u,\ \sqrt{\nu})$, $K(\sqrt{\nu})$, $E(\sqrt{\nu})$ будем писать $\mathrm{sn}\,(u,\ \nu)$, $\mathrm{cn}\,(u,\nu)$ $\mathrm{dn}\,(u,\nu)$, $K(\nu)$ и $E(\nu)$.

Для того чтобы удовлетворить этому уравнению с точностью до ε^2, достаточно потребовать, чтобы функции $y_0(\tau, \omega)$ и $y_1(\tau, \omega)$ удовлетворяли уравнениям

$$\varphi^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega^2} + a(\tau) y_0 - b(\tau) y_0^3 = 0 \tag{1.4}$$

$$\varphi^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega^2} + [a(\tau) - 3b(\tau) y_0^2] y_1 = -2\varphi \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega \partial \tau} - \varphi' \frac{\partial y_0}{\partial \omega}$$

Чтобы найти решение первого уравнения этой системы, положим

$$y_0 = A(\tau) \operatorname{sn}[T(\tau)\omega, \nu(\tau)] = A(\tau) \operatorname{sn} u, \qquad u = T(\tau)\omega \tag{1.5}$$

Из (1.5) имеем

$$\frac{\partial y_0}{\partial \omega} = AT \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega^2} = AT^2 \frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2} \tag{1.6}$$

Подставляя эти формулы в уравнение для $y_0(\tau, \omega)$, получим

$$AT^2\varphi^2 \frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2} + a(\tau) A \operatorname{sn} u - b(\tau) A^3 \operatorname{sn}^3 u = 0$$

Заменяя в этом уравнении $\partial^2 \operatorname{sn} u / \partial u^2$ при помощи уравнения [5]

$$\frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2} + (1 + \nu) \operatorname{sn} u - 2\nu \operatorname{sn}^3 u = 0 \tag{1.7}$$

будем иметь

$$[-T^2\varphi^2(1+\nu) + a(\tau)] + \operatorname{sn}^2 u\, [T^2\varphi^2 2\nu - b(\tau) A^2] = 0$$

Для того чтобы удовлетворить этому соотношению, положим

$$\varphi^2 T^2 (1 + \nu) = a(\tau), \qquad \varphi^2 T^2 2\nu = b(\tau) A^2 \tag{1.8}$$

Недостающие два соотношения для определения $\varphi(\tau)$, $T(\tau)$, $A(\tau)$ и $\nu(\tau)$ получим из условия периодичности функции $y_1(\tau, \omega)$ по ω.

Как будет показано в § 2, это условие оказывается достаточным для того, чтобы члены, которыми мы пренебрегли в (1.3) были $O(\varepsilon^2)$ на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T_0 / \varepsilon$.

Перейдем далее к определению функции $y_1(\tau, \omega)$.

Из (1.6) имеем

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega \partial \tau} = (AT)' \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} + AT \left(\frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u \partial \nu} \nu' \right) \tag{1.9}$$

(штрихом мы обозначили дифференцирование по τ). Отметим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u \frac{T'}{T}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \omega} = T \tag{1.10}$$

Используя соотношения (1.9) и (1.10), перепишем уравнение для $y_1(\tau, \omega)$ в виде

$$\varphi^2 T^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} + [a(\tau) - 3b(\tau) y_0^2] y_1 = F(\tau, u) \tag{1.11}$$

где

$$F(\tau, u) = -[2\varphi(AT)' + \varphi' AT] \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} - 2\varphi AT \left[\frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2} u (\ln T)' + \frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u \partial \nu} \nu' \right] \tag{1.12}$$

Найдем решение однородного уравнения. Продифференцируем для этого первое уравнение системы (1.4):

$$\varphi^2 T^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial y_0}{\partial u} \right) + [a(\tau) - 3b(\tau) y_0^2] \frac{\partial y_0}{\partial u} = 0 \tag{1.13}$$

Отсюда видно, что функция

$$v = \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}$$

является искомой.

Для того чтобы выписать выражение для функции $y_1(\tau, u)$, положим

$$y_1(\tau, u) = v \int_0^u E(\tau, u)\, du \tag{1.14}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.11), после несложных преобразований найдем

$$E(\tau, u) = \frac{1}{v^2} \int_0^u \frac{F(\tau, u)}{\varphi^2 T^2}\, v du$$

Заменяя $F(\tau, u)$ при помощи (1.12), получим

$$E(\tau, u) = -\frac{1}{(\partial \operatorname{sn} u / \partial u)^2} \left\{ \frac{2\varphi (AT)' + \varphi' AT}{\varphi^2 T^2} J_1 + \frac{2A(\ln T)'}{\varphi T} J_2 + \frac{2A\nu'}{\varphi T} J_3 \right\} \tag{1.15}$$

Здесь

$$J_1 = \int_0^u \left(\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}\right)^2 du, \qquad J_2 = \int_0^u u \frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2} \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}\, du, \qquad J_3 = \int_0^u \frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u \partial \nu} \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}\, du \tag{1.16}$$

Вычислим далее производную от эллиптического синуса по модулю. Воспользуемся для этого известным соотношением [5] для

$$\left(\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}\right)^2 = 1 - (1+\nu) \operatorname{sn}^2 u + \nu \operatorname{sn}^4 u \tag{1.17}$$

Продифференцируем его по ν:

$$\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u \partial \nu} = [-(1+\nu) \operatorname{sn} u + 2\nu \operatorname{sn}^3 u] \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial \nu} + \frac{-\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^4 u}{2} =$$

$$= \frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2} \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial \nu} - \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{2}$$

Получившееся соотношение представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\partial \operatorname{sn} u / \partial \nu$. Решая его, имеем

$$\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du \tag{1.18}$$

Для того чтобы выписать условия периодичности, преобразуем интегралы J_2 и J_3 так, чтобы представить их в виде суммы интегралов от положительных функций:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^u u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}\right)^2 du = \frac{1}{2} \left[u \left(\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}\right)^2 - J_1 \right]$$

$$J_3 = \int_0^u \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial \nu}\right) du = \left(\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial \nu}\right)\Bigg|_0^u - \int_0^u \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial \nu} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2}\, du \tag{1.19}$$

Пользуясь (1.18) для $\partial \operatorname{sn} u / \partial \nu$ и интегрируя по частям, приведем выражение для J_3 к виду

$$J_3 = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}\right)^2 \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du - \frac{1}{4} \int_0^u \left(\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u}\right)^2 \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du \tag{1.20}$$

В этих формулах (см. [5])

$$\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \tag{1.21}$$

Подставляя формулы (1.19) и (1.20) в выражение для $E(\tau, u)$, будем иметь

$$E(\tau, u) = -\frac{A\nu'}{\varphi T} \left\{ \left[\frac{d \ln T}{d\nu} u - \frac{1}{2} \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u} \left[\frac{d \ln A^2 \varphi T}{d\nu} \int_0^u \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u\, du - \frac{1}{2} \int_0^u \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u\, du \right] \right\} \tag{1.22}$$

Отсюда следует, что если функции $d\ln T\,/\,d\nu$ и $d\ln A^2\varphi T\,/\,d\nu$ удовлетворяют условиям

$$\frac{d\ln T}{d\nu}2K(\nu)=\frac{1}{2}\int\limits_u^{u+2K(\nu)}\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u}\,du,\qquad \frac{d\ln A^2\varphi T}{d\nu}\int\limits_u^{u+2K(\nu)}\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_u^{u+2K(\nu)}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 u\,du \tag{1.23}$$

то имеет место соотношение

$$E(\tau,u)=E(\tau,u+2K(\nu)) \tag{1.24}$$

где $K(\nu)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

В силу периодичности подинтегральных функций в (1.23) в симметрии их относительно точки $u=K(\nu)$ имеем

$$\frac{d\ln T}{d\nu}=\frac{1}{2K(\nu)}\int\limits_0^{K(\nu)}\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u}\,du \tag{1.25}$$
$$\frac{d\ln A^2\varphi T}{d\nu}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{K(\nu)}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 u\,du\Big/\int\limits_0^{K(\nu)}\mathrm{dn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 u\,du$$

Вводя новую переменную интегрирования $\zeta=\mathrm{sn}\,u$ и используя формулы [5]

$$\mathrm{cn}^2 u=1-\zeta^2,\qquad \mathrm{dn}^2 u=1-\nu\zeta^2,\qquad \frac{\partial u}{\partial\zeta}=\frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\nu\zeta^2)}}$$

нетрудно преобразовать эти соотношения к виду

$$\frac{d\ln T}{d\nu}=\frac{1}{K(\nu)}\frac{dK(\nu)}{d\nu},\qquad \frac{d\ln A^2\varphi T}{d\nu}=-\frac{1}{L(\nu)}\frac{dL(\nu)}{d\nu} \tag{1.26}$$

Здесь

$$K(\nu)=\int\limits_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\nu\zeta^2)}},\qquad L(\nu)=\int\limits_0^1\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\nu\zeta^2)}\,d\zeta \tag{1.27}$$

Откуда, очевидно,

$$T(\tau)=K(\nu(\tau)),\quad A^2(\tau)\,\varphi(\tau)\,T(\tau)\,L(\nu(\tau))=\mathrm{const} \tag{1.28}$$

Из (1.22) имеем $E(\tau,u)=-E(\tau,-u)$. Откуда

$$\int\limits_{-K(\nu)}^{K(\nu)}E(\tau,u)\,du=0$$

Из периодичности $E(\tau,u)$ [см. (1.24)] следует

$$\int\limits_u^{u+2K(\nu)}E(\tau,u)\,du=\int\limits_{-K(\nu)}^{K(\nu)}E(\tau,u)\,du$$

Рассмотрение этих соотношений и формулы (1.14) позволяет заключить, что $y_1(\tau,u)=y_1(\tau,u+4K(\nu))$.

Для дальнейшего введем следующие обозначения:

$$\rho(\tau)=\frac{A(\tau)\,\nu'(\tau)}{K(\nu(\tau))\,\varphi(\tau)},\qquad S(\nu,\omega)=\mathrm{sn}\,[K(\nu)\,\omega,\ \nu] \tag{1.29}$$

$$G(\nu,\omega)=-K(\nu)\,\mathrm{cn}\,K(\nu)\,\omega\,\mathrm{dn}\,K(\nu)\,\omega\left\{\int\limits_0^\omega\left[\frac{dK(\nu)}{d\nu}\omega_1-\frac{K(\nu)}{2}\int\limits_0^{\omega_1}\frac{\mathrm{sn}^2 K(\nu)\,\omega_2}{\mathrm{dn}^2 K(\nu)\,\omega_2}\,d\omega_2\right]d\omega_1+\right.$$
$$+\int\limits_0^\omega\frac{K(\nu)}{\mathrm{cn}^2 K(\nu)\,\omega_1\,\mathrm{dn}^2 K(\nu)\,\omega_1}\left[-\frac{d\ln L(\nu)}{d\nu}\int\limits_0^{\omega_1}\mathrm{cn}^2 K(\nu)\,\omega_2\,\mathrm{dn}^2 K(\nu)\,\omega_2 d\omega_2-\right. \tag{1.30}$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\omega_1}\mathrm{sn}^2 K(\nu)\,\omega_2\,\mathrm{cn}^2 K(\nu)\,\omega_2 d\omega_2\right]d\omega_1\right\}$$

В этих обозначениях в силу (1.5), (1.14) и (1.22) формулы для $y_0(\tau, \omega)$ и $y_1(\tau, \omega)$ принимают вид:

$$y_0(\tau, \omega) = A(\tau) S[\nu(\tau), \omega], \qquad y_1(\tau, \omega) = \rho(\tau) G[\nu(\tau), \omega] \tag{1.31}$$

Для того чтобы определить $y_0(\tau, \omega)$ и $y_1(\tau, \omega)$ как функции t, необходимо в формулах (1.31) заменить τ и ω при помощи соотношений

$$\tau = \varepsilon t, \quad \omega = \int \varphi(\tau)\, dt$$

§ 2. **Теоремы об оценках.** *Лемма 1.* Пусть

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} + m(\omega) y = n(\omega), \qquad y\Big|_{\omega=0} = \alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0} = \beta$$

Если функции $m(\omega)$ и $n(\omega)$ ограничены при $\omega \geqslant 0$ так, что $|m(\omega)| \leqslant M$ и $|n(\omega)| \leqslant N$, то для $y(\omega)$ и $\partial y / \partial \omega$ при $\omega \geqslant 0$ имеют место оценки

$$|y(\omega)| \leqslant |\alpha| \operatorname{ch} \sqrt{M}\, \omega + \frac{|\beta|}{\sqrt{M}} \operatorname{sh} \sqrt{M}\, \omega + \frac{N}{M} (\operatorname{ch} \sqrt{M} \omega - 1) \tag{2.1}$$

$$\left| \frac{\partial y}{\partial \omega} \right| \leqslant |\alpha| \sqrt{M} \operatorname{sh} \sqrt{M} \omega + |\beta| \operatorname{ch} \sqrt{M} \omega + \frac{N}{\sqrt{M}} \operatorname{sh} \sqrt{M} \omega$$

Доказательство легко провести при помощи метода последовательных приближений.

Лемма 2. Пусть

$$1 - Q^2 \leqslant \nu \leqslant 1 - q^2 \tag{2.2}$$

где q — сколь угодно малое число, а Q — сколь угодно большое.

Тогда при $-\infty < \omega < \infty$ имеют место оценки

$$|S(\nu, \omega)| \leqslant 1, \qquad \left| \frac{\partial S(\nu, \omega)}{\partial \nu} \right| \leqslant C_\nu(q, Q), \qquad \left| \frac{\partial^2 S(\nu, \omega)}{\partial \nu^2} \right| \leqslant C_{\nu,\nu}(q, Q)$$

$$|G(\nu, \omega)| \leqslant D(q, Q), \qquad \left| \frac{\partial G(\nu, \omega)}{\partial \omega} \right| \leqslant D_\omega(q, Q) \tag{2.3}$$

$$\left| \frac{\partial G(\nu, \omega)}{\partial \nu} \right| \leqslant D_\nu(q, Q), \qquad \left| \frac{\partial^2 G(\nu, \omega)}{\partial \omega \partial \nu} \right| \leqslant D_{\omega,\nu}(q, Q)$$

$$\left| \frac{\partial^2 G(\nu, \omega)}{\partial \nu^2} \right| \leqslant D_{\nu,\nu}(q, Q)$$

Для доказательства отметим прежде всего, что при условии (2.2) из определения (1.27) функций $K(\nu)$ и $L(\nu)$ следует, что

$$\left| \frac{d^r K(\nu)}{d\nu^r} \right| \leqslant E_r(q, Q), \qquad \left| \frac{d^r L(\nu)}{d\nu^r} \right| \leqslant F_r(q, Q) \qquad (r = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.4}$$

В силу того что при рассматриваемых значениях ν и ω функции $\operatorname{sn} K(\nu)\omega$, $\operatorname{cn} K(\nu)\omega$, $\operatorname{dn} K(\nu)\omega$ принимают только действительные значения из известных формул

$$\operatorname{sn}^2 K(\nu)\omega + \operatorname{cn}^2 K(\nu)\omega = 1, \quad \operatorname{dn}^2 K(\nu)\omega + \nu \operatorname{sn}^2 K(\nu)\omega = 1$$

следуют оценки

$$|\operatorname{sn} K(\nu)\omega| \leqslant 1, \qquad |\operatorname{cn} K(\nu)\omega| \leqslant 1, \qquad |\operatorname{dn} K(\nu)\omega| \leqslant \sqrt{1 + |\nu|}$$

Пользуясь этими неравенствами, получим [см. (1.21) и (1.29)]

$$|S(\nu, \omega)| \leqslant 1, \qquad \left| \frac{\partial S(\nu, \omega)}{\partial \omega} \right| \leqslant K(\nu) \sqrt{1 + |\nu|} \tag{2.5}$$

Докажем теперь неравенства (2.3) для значений ω, заключенных в интервале $0 \leqslant \omega \leqslant 4$. Из (1.7) имеем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \omega^2} + K^2(\nu)[(1 + \nu) S - 2\nu S^3] = 0, \qquad S(\nu, \omega)\Big|_{\omega=0} = 0, \qquad \frac{\partial S(\nu, \omega)}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0} = K(\nu)$$

Дифференцируя это уравнение и начальные условия два раза по ν, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right) + m(\nu, \omega)\left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right) = -\frac{dK^2(\nu)(1 + \nu)}{d\nu} S + 2\frac{dK^2(\nu)\nu}{d\nu} S^3$$

$$\frac{\partial S(\nu, \omega)}{\partial \nu}\Big|_{\omega=0} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\partial S(\nu, \omega)}{\partial \nu}\right)\Big|_{\omega=0} = \frac{dK(\nu)}{d\nu} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\nu^2}\right)+m(\nu,\ \omega)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\nu^2}\right)=\left[-\frac{dK^2(\nu)(1+\nu)}{d\nu}+6S^2\frac{dK^2(\nu)\nu}{d\nu}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial m(\nu,\ \omega)}{\partial\nu}\right]\frac{\partial S}{\partial\nu}-\frac{d^2K^2(\nu)(1+\nu)}{d\nu^2}S+2\frac{d^2K^2(\nu)\nu}{d\nu^2}S^3 \tag{2.7}$$
$$\left.\frac{\partial^2 S(\nu,\ \omega)}{\partial\nu^2}\right|_{\omega=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial^2 S(\nu,\ \omega)}{\partial\nu^2}\right)\right|_{\omega=0}=\frac{d^2K(\nu)}{d\nu^2}$$

Здесь

$$m(\nu,\ \omega)=K^2(\nu)\left[(1+\nu)-6\nu S^2(\nu,\ \omega)\right]$$

В силу неравенств (2.4) и (2.5) в уравнении (2.6) коэффициенты, правая часть и начальные условия ограничены. Поэтому при помощи леммы 1 можно указать такие константы $C_\nu(q,\ Q)$ и $c_{\nu,\ \omega}(q, Q)$, что при $0\leqslant\omega\leqslant 4$

$$\left|\frac{\partial S(\nu,\ \omega)}{\partial\nu}\right|\leqslant C_\nu(q,\ Q),\qquad \left|\frac{\partial^2 S(\nu,\ \omega)}{\partial\omega\partial\nu}\right|\leqslant C_{\nu,\ \omega}(q,\ Q) \tag{2.8}$$

Далее вследствие неравенств (2.4), (2.5) и (2.8) в уравнении (2.7) коэффициенты, правая часть и начальные условия ограничены. Поэтому также при помощи леммы 1 можно указать такие константы $C_{\nu,\ \nu}(q,\ Q)$ и $C_{\nu,\ \nu,\ \omega}(q,\ Q)$, что при $0\leqslant\omega\leqslant 4$

$$\left|\frac{\partial^2 S(\nu,\ \omega)}{\partial\nu^2}\right|\leqslant C_{\nu,\ \nu}(q,\ Q),\qquad \left|\frac{\partial^3 S(\nu,\ \omega)}{\partial\omega\partial\nu^2}\right|\leqslant C_{\nu,\ \nu,\ \omega}(q,\ Q) \tag{2.9}$$

Далее, из формул (1.4) и (1.31) имеем

$$\frac{\partial^2 G}{\partial\omega^2}+m(\nu,\ \omega)\,G=K(\nu)\left[\frac{d\ln L(\nu)\,K(\nu)}{d\nu}\frac{\partial S}{\partial\omega}-2\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial\nu}\right] \tag{2.10}$$
$$\left.G(\nu,\ \omega)\right|_{\omega=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial G(\nu,\ \omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=0}=0$$

Дифференцируя эти соотношения два раза по ν, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(\frac{\partial G}{\partial\nu}\right)+m(\nu,\ \omega)\left(\frac{\partial G}{\partial\nu}\right)=-\frac{\partial m}{\partial\nu}G+\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{K(\nu)\left[\frac{d\ln L(\nu)\,K(\nu)}{d\nu}\frac{\partial S}{\partial\omega}-2\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial\nu}\right]\right\}$$
$$\left.\frac{\partial G(\nu,\ \omega)}{\partial\nu}\right|_{\omega=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial G(\nu,\ \omega)}{\partial\nu}\right)\right|_{\omega=0}=0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial\nu^2}\right)+m(\nu,\ \omega)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial\nu^2}\right)= \tag{2.12}$$
$$=-\frac{\partial m}{\partial\nu}\frac{\partial G}{\partial\nu}-\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{\partial m}{\partial\nu}G\right]+\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left\{K(\nu)\left[\frac{d\ln L(\nu)\,K(\nu)}{d\nu}\frac{\partial S}{\partial\omega}-2\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial\nu}\right]\right\}$$
$$\left.\frac{\partial^2 G(\nu,\ \omega)}{\partial\nu^2}\right|_{\omega=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial^2 G(\nu,\ \omega)}{\partial\nu^2}\right)\right|_{\omega=0}=0$$

В силу неравенств (2.4), (2.5), (2.8) и (2.9) для функции $S(\nu,\ \omega)$ и ее производных мы можем, так же как и ранее, оценить функцию $G(\nu,\ \omega)$ и ее производные, применяя последовательно лемму 1 к уравнениям (2.10), (2.11) и (2.12).

Таким образом, неравенства (2.3) доказаны для конечного интервала изменения ω. Для того чтобы установить их для $-\infty<\omega<\infty$, заметим, что функции $S(\nu,\ \omega)$ и $G(\nu,\ \omega)$ имеют период по ω, не зависящий от ν и равный 4 [см. (1.29)]. В силу этого все производные этих функций по ν и ω также периодичны по ω с тем же периодом. (Для того чтобы в этом убедиться, достаточно продифференцировать равенства $S(\nu,\ \omega)=S(\nu,\ \omega+4)$; $G(\nu,\ \omega)=G(\nu,\ \omega+4)$ нужное количество раз по ν и по ω.) Поэтому оценки, установленные для $0\leqslant\omega\leqslant 4$, справедливы при $-\infty<\omega<\infty$. Таким образом, лемма доказана.

Сформулируем далее условия, которые надо наложить на $a(\tau)$ и $b(\tau)$ для того, чтобы члены, которыми мы пренебрегаем в уравнении (1.3), были порядка ε^2 на интервале времени $0\leqslant t\leqslant T_0/\varepsilon$.

Теорема I. Если функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ таковы, что функции $\nu(\tau)$, $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ определяются из системы уравнений (1.8) и (1.28) так, что при $0 \leqslant t \leqslant T_0/\varepsilon$:

1) Функции $\nu(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $A(\tau)$ и $\rho(\tau)$ ограничены вместе со своими первыми и вторыми производными;

2) $1 - Q^2 \leqslant \nu(\tau) \leqslant 1 - q^2$, то функция $y^*(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T_0/\varepsilon$ удовлетворяет уравнению (0.1) с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$.

Для доказательства необходимо показать, что функция $\Delta(t)$ [см. (1.3)] ограничена при $0 \leqslant t \leqslant T_0/\varepsilon$.

Выпишем выражения

$$\begin{gathered}
y_0(t) = A(\tau)\, S\,[\nu(\tau),\ \omega(t)], \qquad y_1(t) = \rho(\tau)\, G\,[\nu(\tau),\ \omega(t)] \\
\frac{\partial^2 y_0}{\partial \tau^2} = A'' S(\nu,\ \omega) + (2A'\nu' + A\nu'')\frac{\partial S(\nu,\ \omega)}{\partial \nu} + A\nu'^2\frac{\partial^2 S(\nu,\ \omega)}{\partial \nu^2} \\
\frac{\partial y_1}{\partial \omega} = \rho\,\frac{\partial G(\nu,\ \omega)}{\partial \omega}, \qquad \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega \partial \tau} = \rho'\,\frac{\partial G(\nu,\ \omega)}{\partial \omega} + \rho\nu'\,\frac{\partial^2 G(\nu,\ \omega)}{\partial \nu \partial \omega} \\
\frac{\partial^2 y_1}{\partial \tau^2} = \rho'' G(\nu,\ \omega) + (2\rho'\nu' + \rho\nu'')\frac{\partial G(\nu,\ \omega)}{\partial \nu} + \rho\nu'^2\frac{\partial^2 G(\nu,\ \omega)}{\partial \nu^2}
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Из условий нашей теоремы и леммы 2 следует, что все величины, входящие в формулы (2.13), ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T_0/\varepsilon$. Обращаясь к выражению для $\Delta(t)$ [см. (1.3)], видим, что нетрудно вычислить такое число P, что при $0 \leqslant t \leqslant T_0/\varepsilon$

$$|\Delta(t)| \leqslant P \tag{2.14}$$

Из неравенства (2.14) в силу уравнения (1.3) следует утверждение нашей теоремы.

Доказанная теорема позволяет предположить, что функции

$$y_0(t) = A(\tau)\, S\,[\nu(\tau),\ \omega(\tau)], \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = A(\tau)\,\varphi(\tau)\,\frac{\partial S\,[\nu(\tau),\ \omega(t)]}{\partial \omega} \tag{2.15}$$

являются соответственно главными членами асимптотических разложений решения уравнения (0.1) и его производной.

Для того чтобы это доказать, положим

$$y(t) = y_0(\tau,\ \omega) + \varepsilon y_1(\tau,\ \omega) + \varepsilon Y(t), \qquad Y\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{dY}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \tag{2.16}$$

Подставляя это выражение в (1.2) и пользуясь уравнениями (1.4), получим

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \Phi(t,\ Y), \qquad Y\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{dY}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \tag{2.17}$$

Здесь

$$\Phi(t,\ Y) = -\{\varepsilon\Delta(t) + (a - 3by_0^2 - \varepsilon 6by_0y_1 - 3by_1^2\varepsilon^2)\,Y - (\varepsilon 3by_0 + \varepsilon^2 3by_1)\,Y^2 - \varepsilon^2 bY^3\}$$

Из неравенства (2.14) имеем, что при $0 \leqslant t \leqslant T_0/\varepsilon$

$$|\Phi(t,\ 0)| \leqslant \varepsilon P \tag{2.18}$$

Обозначим через W некоторое положительное число. При условиях теоремы I функции $y_0(t)$ и $y_1(t)$ ограничены. Поэтому, если мы рассматриваем функцию $\Phi(t,\ Y)$ при

$$|Y| < W \tag{2.19}$$

то при $0 \leqslant t \leqslant T_0/\varepsilon$ функция $\Phi(t,\ y)$ удовлетворяет условию Липшица по Y:

$$|\Phi(t,\ Y'') - \Phi(t,\ Y')| \leqslant L\,|Y'' - Y'| \tag{2.20}$$

Сформулируем теорему.

Теорема II. Если выполняются условия теоремы I, то при

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon), \qquad \left(T(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{L}}\ln\left[1 + \frac{LW}{P}\,\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$$

имеют место неравенства

$$|y(t) - A(\tau)\, S(\nu,\ \omega)| \leqslant H\varepsilon, \qquad \left|\frac{dy}{dt} - A(\tau)\,\varphi(\tau)\,\frac{\partial S(\nu,\ \omega)}{\partial \omega}\right| \leqslant H_t\varepsilon$$

Для доказательства перепишем уравнение (2.17) в виде

$$Y = \int_0^t \int_0^{t_1} \Phi(\eta, Y)\, d\eta\, dt_1 \qquad (2.21)$$

и применим к нему метод последовательных приближений:

$$Y^{(0)} = \int_0^t \int_0^{t_1} \Phi(\eta, 0)\, d\eta dt_1, \ \ldots, \qquad Y^{(n+1)} = \int_0^t \int_0^{t_1} \Phi(\eta, Y^{(n)})\, d\eta dt_1$$

Оценивая функции $Y^{(0)}$, $[Y^{(n+1)} - Y^{(n)}]$ при помощи неравенств (2.18) и (2.20), получим

$$|Y^{(0)}| \leqslant \varepsilon P \frac{t^2}{2!}, \qquad |Y^{(n+1)} - Y^{(n)}| \leqslant \varepsilon P L^{n+1} \frac{t^{2n+4}}{(2n+4)!} \qquad (2.22)$$

Эти оценки справедливы при условии, что $|Y^{(n+1)}(t)|$ не превосходит W. Ниже мы определим число $T(\varepsilon) \leqslant T_0/\varepsilon$ так, что при $0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ это условие всегда будет выполняться. Функция $Y(t)$ может быть представлена в виде

$$Y(t) = Y^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} [Y^{(n+1)} - Y^{(n)}] \qquad (2.23)$$

Применяя неравенства (2.22) при $0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, получим

$$|Y(t)| \leqslant \varepsilon \frac{P}{L} \left(e^{\sqrt{L}\, t} - 1\right) \qquad (2.24)$$

Определим теперь число $T(\varepsilon)$. В силу равенства

$$Y^{(n+1)} = Y^{(0)} + \sum_{n=0}^{n+1} [Y^{(n+1)} - Y^{(n)}]$$

имеем, что $|Y^{(n+1)}(t)| \leqslant \varepsilon (P/L [\exp(\sqrt{L}t) - 1]$. Поэтому если мы определим число $T(\varepsilon)$ так, чтобы $\varepsilon (P/L)[\exp(\sqrt{L}\,T(\varepsilon)) - 1] = W$, то $|Y^{(n+1)}(t)|$ при $0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ не будет превосходить W. Итак имеем

$$T(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{L}} \ln\left(1 + \frac{LW}{P} \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Число ε_0 выберем так, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{L}} \ln\left(1 + \frac{LW}{P} \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \leqslant \frac{T_0}{\varepsilon_0}$$

Тогда очевидно, что $T(\varepsilon) \leqslant T_0/\varepsilon$ при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Из (2.21) имеем

$$\left|\frac{dY}{dt}\right| \leqslant \int_0^t |\Phi(t, 0)|\, dt + \int_0^t |\Phi(t, Y) - \Phi(t, 0)|\, dt \qquad (2.25)$$

Пользуясь неравенствами (2.18), (2.20) и (2.24) при $0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, получим

$$\left|\frac{dY}{dt}\right| \leqslant \varepsilon t P + L \int_0^t |Y|\, dt \leqslant \varepsilon \frac{P}{\sqrt{L}} \left(e^{\sqrt{L}t} - 1\right) \leqslant \varepsilon \frac{P}{\sqrt{L}} \left(e^{\sqrt{L}\,T(\varepsilon)} - 1\right) = \sqrt{L}\, W \qquad (2.26)$$

Из (2.16) имеем

$$Y(t) - A(\tau) S(\nu, \omega) = \varepsilon [\rho G(\nu, \omega) + Y(t)] \qquad (2.27)$$

$$\frac{dY}{dt} - A(\tau)\varphi(\tau) \frac{\partial S(\nu, \omega)}{\partial \omega} = \varepsilon \Bigg[A' S(\nu, \omega) + A\nu' \frac{\partial S(\nu, \omega)}{\partial \nu} + \rho\varphi \frac{\partial G(\nu, \omega)}{\partial \omega} + $$

$$+ \frac{dY}{dt} + \varepsilon\rho\nu' \frac{\partial G(\nu, \omega)}{\partial \nu} + \varepsilon\rho' G(\nu, \omega) \Bigg]$$

В силу условий доказанной теоремы, леммы 2 и неравенств (2.24) и (2.26) функции, стоящие в квадратных скобках в правых частях равенств (2.27), ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Обозначая

$$H = \max\left[\rho\, G(\nu, \omega) + Y(t)\right]$$

$$H_t = \max\left[A' S(\nu, \omega) + A \nu' \frac{\partial S(\nu, \omega)}{\partial \nu} + \rho\varphi \frac{\partial G(\nu, \omega)}{\partial \omega} + \frac{dY}{dt} + \varepsilon\rho\nu' \frac{\partial G(\nu, \omega)}{\partial \nu} + \varepsilon\rho' G(\nu, \omega)\right]$$

из формул (2.27) получим неравенства

$$t) - A(\tau) S(\nu, \omega)| \leqslant H\varepsilon, \qquad \left|\frac{dy}{dt} - A(\tau)\varphi(\tau)\frac{\partial S(\nu, \omega)}{\partial \omega}\right| \leqslant H_t \varepsilon$$

справедливые при $0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Таким образом, теорема доказана.

§ 3. Исследование формул для функций $\nu(\tau)$, $A(\tau)$ **и** $\varphi(\tau)$. Пусть $\psi(\tau) = K(\nu(\tau))\varphi(\tau)$, тогда система (1.8) и (1.28) примет вид:

$$\psi^2(\tau)(1 + \nu(\tau)) = a(\tau), \quad \psi^2(\tau)\, 2\nu(\tau) = b(\tau) A^2(\tau), \quad \psi(\tau) A^2(\tau) L(\nu(\tau)) = B \tag{3.1}$$

Здесь B — постоянная. Функция $L(\nu)$ [см. (1.27)] может быть выражена через эллиптические интегралы [5]

$$L(\nu) = \frac{(1 + \nu) E(\nu) - (1 - \nu) K(\nu)}{3\nu}$$

Из первого, третьего, а затем второго уравнений (3.1) последовательно имеем

$$\psi^2(\tau) = \frac{a(\tau)}{1 + \nu(\tau)}, \quad A^2(\tau) = \sqrt{\frac{1 + \nu(\tau)}{a(\tau)}}\, \frac{B}{L(\nu(\tau))}, \quad \frac{4\nu^2(\tau) L^2(\nu(\tau))}{(1 + \nu(\tau))^3} = \frac{B^2 b^2(\tau)}{a^3(\tau)} \tag{3.2}$$

Остановимся на случае, когда уравнение (0.1) линейное и $a(\tau) > 0$. Полагая в формулах (3.2) $b(\tau) \equiv 0$, получим

$$\nu(\tau) \equiv 0, \quad \psi_л^2(\tau) = a(\tau), \quad A_л^2(\tau) = \frac{B}{L(0)} \frac{1}{\sqrt{a(\tau)}} \tag{3.3}$$

Формулы (3.3) совпадают с формулами, полученными в работе [4]. Пользуясь (3.3), можно первые две формулы (3.2) записать в виде

$$\psi^2(\tau) = \psi_л^2(\tau) \frac{1}{1 + \nu(\tau)}, \quad A^2(\tau) = A_л^2(\tau) \frac{L(0)\sqrt{1 + \nu(\tau)}}{L(\nu(\tau))} \tag{3.4}$$

Индексом «*л*» обозначаются величины, относящиеся к линейному уравнению.

Эти формулы позволяют представить себе роль нелинейного члена в уравнении (0.1).

Рассмотрим случай, когда $a(\tau) > 0$, $b(\tau) \geqslant 0$. При этом система, описываемая уравнением (0.1), может потерять устойчивость. Это, очевидно, может произойти в тот момент, когда $a(\tau) = b(\tau) A^2(\tau)$.

Из первых двух уравнений системы (3.1) следует, что в этом случае $\nu(\tau) = 1$. Пользуясь этим, из последнего уравнения (3.2) получим условие устойчивости

$$\frac{B^2 b^2(\tau)}{a^3(\tau)} < \frac{4L^2(1)}{2^3} = \frac{2}{9} \qquad \left(L(1) = \int_0^1 (1 - \zeta^2)\, d\zeta = \frac{2}{3}\right) \tag{3.5}$$

Так как постоянная B определяется начальными условиями $B = B(y_{t=0}, (dy/dt)_{t=0})$, то при помощи условия (3.5) по заданному отрезку времени $[0, t_1]$ можно на фазовой плоскости определить такую область σ, что если при $t = 0$ изображающая точка находилась внутри σ, то при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ система устойчивости не потеряет. Область σ, очевидно, определяется неравенством

$$B^2\left(y\Big|_{t=0}, \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}\right) < \frac{2}{9} \min\left[\frac{a^3(\tau)}{b^2(\tau)}\right] \tag{3.6}$$

Для того чтобы сравнить полученные нами условия устойчивости с условием устойчивости, которое получается из квазистатического рассмотрения уравнения (0.1), проанализируем случай

$$y\Big|_{t=0}=\alpha, \qquad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0, \qquad b(0)=0 \tag{3.7}$$

При этом для простоты предположим, что

$$\min\left[\frac{a^3(\tau)}{b^2(\tau)}\right]=\frac{[\min a(\tau)]^3}{[\max b(\tau)]^2} \tag{3.8}$$

Для анализа воспользуемся формулами (2.15). Подставляя в них

$$\omega(t)=\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{K(\nu(\tau))}\,dt+\omega_0 \tag{3.9}$$

перепишем их в виде

$$y_0(t)=A(\tau)\,\mathrm{sn}\,K(\nu)\left[\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{K(\nu)}\,dt+\omega_0\right] \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0=A(\tau)\,\psi(\tau)\,\mathrm{cn}\,K(\nu)\left[\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{K(\nu)}\,dt+\omega_0\right]\mathrm{dn}\,K(\nu)\left[\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{K(\nu)}\,dt+\omega_0\right]$$

Полагая в них $t=0$, получим $\omega_0=1$, $A(0)=\alpha$.

Так как $b(0)=0$, то вторая и третья формулы (3.2) при $t=0$ дают

$$\nu(0)=0, \qquad B(\alpha)=A^2(0)\sqrt{a(0)}\,L(0)=\frac{1}{4}\pi\sqrt{a(0)}\,\alpha^2$$

Подставляя $B(\alpha)$ в условие (3.6) и пользуясь (3.8), получим

$$\alpha^2<\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\min a(\tau)}{a(0)}}\;\frac{\min a(\tau)}{\max b(\tau)} \tag{3.11}$$

Условие устойчивости, которое получается из квазистатического рассмотрения уравнения (0.1), имеет вид:

$$\alpha^2<\frac{\min a(\tau)}{\max b(\tau)}$$

Из того, что стоящий в правой части неравенства (3.11) множитель

$$\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\min a(\tau)}{a(0)}}<1$$

следует, что система, устойчивая с квазистатической точки зрения, может оказаться неустойчивой в действительности.

В заключение работы автор выражает благодарность А. А. Дородницыну за постановку задачи и внимание.

Поступила 3 XII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А., Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд. АН УССР, Киев, 1955.
2. Волосов В. М., К вопросу о дифференциальных уравнениях с малым параметром при старшей производной, ДАН СССР, т. XXIII, № 5, 1950.
3. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. Успехи математических наук, вып. 6, 1952.
4. Horn J. Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter. Math. Ann., 52, 1899.
5. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям, Изд. АН СССР, 1941.