ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Ю. М. Репин

(Свердловск)

В этой работе доказываются некоторые теоремы об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Эти теоремы относятся к вопросам устойчивости по первому приближению и поведения решений при малых изменениях запаздываний. Они аналогичны соответствующим теоремам об устойчивости по первому приближению [1] и устойчивости при постоянно действующих возмущениях [2] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и доказываются по схемам, предложенным впервые в указанных работах.

§ 1. Предварительные замечания. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=X_i(t,\ x_1(t-\tau_1(t)),\dots,\ x_1(t-\tau_m(t)),\dots,\ x_n(t-\tau_1(t)),\dots,\ x_n(t-\tau_m(t)))$$
$$(i=1,\dots,\ n)$$

В дальнейшем для краткости ее будем записывать следующим образом:

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(t,\ x_k(t-\tau_j(t)))\qquad (i,\ k=1,\dots,n;\quad j=1,\dots,\ m)\tag{1.1}$$

Функции $X_i(t,\ x_{kj})$, зависящие от $mn+1$-го аргумента, предполагаем определенными и непрерывными по совокупности аргументов при

$$t\geqslant A \qquad \text{и } |x_{1j}|+\dots+|x_{nj}|<H.$$

Предполагается, кроме того, что $X_i(t,\ 0)\equiv 0$ и что функции $X_i(t,\ x_{kj})$ удовлетворяют условию Липшица по аргументам x_{kj} (равномерно относительно t):

$$\left|X_i(t,\ x_{kj})-X_i(t,\ \overset{\circ}{x}_{kj})\right|\leqslant L\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left|x_{kj}-\overset{\circ}{x}_{kj}\right| \qquad (t\geqslant A)\tag{1.2}$$

Функции $\tau_j(t)$, определенные при $t\geqslant A$, предполагаем неотрицательными, непрерывными и ограниченными: $\tau_j(t)\leqslant\tau$.

Основная начальная задача ставится следующим образом. Пусть даны $t_0\geqslant A$ и система n непрерывных функций $\varphi_i(t)$ на отрезке $[t_0-\tau,\ t_0]$, требуется найти систему n непрерывных функций $x_i(t)$, $t\geqslant t_0$, удовлетворяющих условию $x_i(t_0)=\varphi_i(t_0)$ и системе (1.1), причем если $t-\tau_j(t)\leqslant t_0$, то $x_k(t-\tau_j(t))$ в правых частях системы (1.1) должно заменяться на $\varphi_k(t-\tau_j(t))$.

Как известно [3], если $|\varphi_1(t)|+\dots+|\varphi_n(t)|<H$, эта задача при сделанных предположениях имеет единственное решение, определенное в некоторой правой полуокрестности точки t_0. Будем называть это решение определенным в момент t_0 функциями $\varphi_i(t)$. Очевидно, что условия $\varphi_i(t)\equiv 0$ при $A-\tau\leqslant t\leqslant A$ определяют тривиальное решение системы (1.1) $x_i(t)\equiv 0$, $t\geqslant A$.

В дальнейшем предполагается, что решения, определенные начальными функциями $\varphi_i(t)$ (в любой момент t_0), удовлетворяющими неравенству

$$|\varphi_1(t)|+\dots+|\varphi_n(t)|<\delta<H$$

при достаточно малых δ, продолжаемы на всю полуось $t\geqslant t_0$.

Определение 1. Тривиальное решение системы (1.1) называется равномерно асимптотически устойчивым, если существует такое число $\beta>0$, что для каждого $\eta>0$ существует число $T(\eta)>0$ такое, что если $t-t_0>T(\eta)$, то

$$|x_1(t)|+\dots+|x_n(t)|<\eta, \quad \text{где} \quad x_i(t)$$

определяются из системы (1.1) в момент t_0 функциями $\varphi_i(t)$, удовлетворяющими неравенству $|\varphi_1(t)|+\dots+|\varphi_n(t)|<\beta$. Рассмотрим теперь наряду с системой (1.1) систему

$$\frac{dx_i^\circ}{dt}=X_i(t,\ x_k^\circ(t-\tau_j^\circ(t)))\qquad (i,\ k=1,\dots,\ n;\ j=1,\dots,\ m)\tag{1.3}$$

олученную из системы (1.1) заменой функций $\tau_j(t)$ функциями $\tau_j^\circ(t)$, удовлетворяющими тем же условиям, что и $\tau_j(t)$.

Определение 2. Тривиальное решение системы (1.1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях запаздываний, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta(\varepsilon)$ и $\rho(\varepsilon)$ такие, что если

$$|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)| < \delta(\varepsilon), \qquad |\tau_j(t) - \tau_j^\circ(t)| < \rho(\varepsilon)$$

то

$$|x_1^\circ(t)| + \ldots + |x_n^\circ(t)| < \varepsilon \qquad \text{при } t \geqslant t_0$$

где $x_i^\circ(t)$ определяются из системы (1.3) начальными функциями $\varphi_i(t)$ в момент t_0.

По поводу определения 2 (см. работы [4, 5]). Докажем два вспомогательных предложения.

Лемма 1. Пусть при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ непрерывная функция удовлетворяет неравенству

$$M(t) \leqslant f(t) + C\int_{t_0}^{t} M(\xi)\,d\xi$$

где $f(t)$ непрерывна на $[t_0, T]$. Тогда

$$M(t) \leqslant f(t) + C\int_{t_0}^{t} f(\xi)\,e^{c(t-\xi)}\,d\xi \tag{1.4}$$

В частности, если $f(t)$ имеет непрерывную производную, то

$$M(t) \leqslant f(t)\,e^{c(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} f'(\xi)\,e^{c(t-\xi)}d\xi \tag{1.5}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$M^\circ(t) = f(t) + C\int_{t_0}^{t} f(\xi)\,e^{c(t-\xi)}\,d\xi$$

является решением интегрального уравнения

$$M^\circ(f) = f(t) + C\int_{t_0}^{t} M^\circ(\xi)\,d\xi$$

Для доказательства неравенства (1.4) достаточно установить, что

$$N(t) = M^\circ(t) - M(t) \geqslant 0$$

Но, очевидно,

$$N(t) \geqslant C\int_{t_0}^{t} N(\xi)\,d\xi$$

Поскольку

$$N(\xi) \geqslant C\int_{t}^{\xi} N(\eta)\,d\eta$$

можем записать

$$N(t) \geqslant C^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\xi} N(\eta)\,d\eta d\xi = C^2\int_{t_0}^{t}(t-\xi)\,N(\xi)\,d\xi$$

Продолжая заменять под интегралом $N(\xi)$ на $C\int_{t_0}^{\xi} N(\eta)\,d\eta$, получим

$$N(t) \geqslant \frac{c^n}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{n-1}N(\xi)\,d\xi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $N(t) \geqslant 0$, что и требовалось. Неравенство (1.5) получается отсюда интегрированием по частям.

Лемма 2. Решение системы (1.1), определенное в момент $t_0 \geqslant A$ функциями $\varphi_i(t)$, удовлетворяющими неравенству $|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)| < \delta < H$, удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqslant \delta e^{mnL(t-t_0)} \tag{1.6}$$

пока оно продолжаемо в области $|x_1| + \ldots + |x_n| < H$.

Доказательство. В силу системы (1.1) и начальных условий имеем

$$x_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_i(\xi,\ x_k(\xi - \tau_j(\xi)))\, d\xi$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqslant \delta + nL \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |x_k(\xi - \tau_j(\xi))|\, d\xi$$

причем если $\xi - \tau_j(\xi) \leqslant t_0$, то $x_k(\xi - \tau_j(\xi)) = \varphi_k(\xi - \tau_j(\xi))$.

Пусть $M(t) = \max\{\delta,\ \max[\,|x_1(\xi)| + \ldots + |x_n(\xi)|\,]\}$ при $t_0 \leqslant \xi \leqslant t$. Очевидно, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqslant \delta + mnL \int_{t_0}^{t} M(\xi)\, d\xi$$

Так как правая часть этого неравенства монтонно не убывает и всегда не меньше δ, то функция $M(\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$M(t) \leqslant \delta + mnL \int_{t_0}^{t} M(\xi)\, d\xi.$$

Отсюда по лемме 1 и следует требуемое неравенство.

§ 2. **Устойчивость по первому приближению.** Рассмотрим наряду с системой (1.1) систему

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t,\ y_k(t - \tau_j(t))) \quad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ n;\ \ j = 1,\ \ldots,\ m) \tag{2.1}$$

удовлетворяющую тем же условиям, что и система (1.1) (постоянная Липшица для системы (2.1) может быть, конечно, другой).

Теорема 1. Пусть тривиальное решение системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво, причем существуют постоянные $\alpha > 0$, $B \geqslant 1$ такие, что для всех достаточно малых δ из неравенства $|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)| < \delta$ следует неравенство

$$|x_1(t)| + \ldots + |x_n(t)| < B\delta e^{-\alpha(t - t_0)} \tag{2.2}$$

где $x_i(t)$ определяются из системы (1.1) функциями $\varphi_i(t)$ в момент t_0. Пусть далее правые части систем (1.1) и (2.1) удовлетворяют неравенству

$$|X_i(t,\ x_{kj}) - Y_i(t,\ x_{kj})| \leqslant \sigma \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |x_{kj}| \quad \text{при} \sum_{k=1}^{n} |x_{kj}| < h < H \tag{2.3}$$

Тогда при достаточно малом σ тривиальное решение системы (2.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим в момент t_0 некоторую систему начальных функций $\varphi_i(t)$, удовлетворяющую условию $|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)| < \delta$, где $\delta < h$ и настолько мало, что решение системы (1.1), определенное функциями $\varphi_i(t)$, продолжаемо на всю полуось $t \geqslant t_0$ и удовлетворяет неравенству (2.2). Теми же начальными функциями определим и решение системы (2.1) в некоторой правой полуокрестности точки t_0. Покажем, что, пока $|y_1(t)| + \ldots + |y_n(t)| < h$, будет справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - y_i(t)| \leqslant \frac{\sigma\delta B}{L + \sigma} \left(e^{mn(L+\sigma)(t - t_0)} - 1\right) \tag{2.4}$$

Действительно, в силу (1.1) и (2.1) имеем

$$x_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_i(\xi,\ x_k(\xi - \tau_j(\xi)))\, d\xi$$

$$y_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y_i(\xi,\ y_k(\xi - \tau_j(\xi)))\, d\xi$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i(t) - y_i(t) | \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} | X_i(\xi, x_k(\xi - \tau_j(\xi))) - Y_i(\xi, y_k(\xi - \tau_j(\xi))) | d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} | X_i(\xi, x_k(\xi - \tau_j(\xi))) - X_i(\xi, y_k(\xi - \tau_j(\xi))) | d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} | X_i(\xi, y_k(\xi - \tau_j(\xi))) - Y_i(\xi, y_k(\xi - \tau_j(\xi))) | d\xi \leqslant$$

$$\leqslant n \Big[L \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} | x_k(\xi - \tau_j(\xi)) - y_k(\xi - \tau_j(\xi)) | + \sigma \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} | y_k(\xi - \tau_j(\xi)) | d\xi \Big] \leqslant$$

$$\leqslant n \int_{t_0}^{t} \Big[(L + \sigma) \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} | x_k(\xi - \tau_j(\xi)) - y_k(\xi - \tau_j(\xi)) | + \sigma \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} | x_k(\xi - \tau_j(\xi)) | \Big] d\xi$$

Пусть $M(t) = \max \sum_{i=1}^{n} | x_i(\xi) - y_i(\xi) |$ для $t_0 \leqslant \xi \leqslant t$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i(t) - y_i(t) | \leqslant \sigma m n B \delta (t - t_0) + mn (L + \sigma) \int_{t_0}^{t} M(\xi) d\xi$$

Отсюда

$$M(t) \leqslant mn\sigma\delta B (t - t_0) + mn (L + \sigma) \int_{t}^{t} M(\xi) d\xi$$

Применяя лемму 1, получим требуемое неравенство.

Возьмем теперь произвольное число $\varepsilon < h$ настолько малое, что если

$$| \varphi_1(t) | + \ldots + | \varphi_n(t) | < \varepsilon / 2B$$

то к разности решений системы (1.1) и (2.1), определенных функциями $\varphi_i(t)$, можно применить только что полученную оценку.

Пусть $| \varphi_1(t) | + \ldots + | \varphi_n(t) | < \varepsilon / 2B$, а величина $T = (1/\alpha) \ln 4B$ и σ настолько малы, что

$$\frac{\sigma B}{L + \sigma} \left(e^{mn (L + \sigma)(T + \tau)} - 1 \right) < \frac{1}{4}$$

Докажем, что решение $y_i(t)$ системы (2.1), определенное в момент t_0 начальными функциями $\varphi_i(t)$, при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T + \tau$ не может выйти из ε-окрестности начала координат (здесь и в дальнейшем под ε-окрестностью начала координат понимается совокупность точек, удовлетворяющих неравенству $| x_1 | + \ldots + | x_n | < \varepsilon$), а при $t_0 + T \leqslant t \leqslant t_0 + T + \tau$ лежит в $\varepsilon / 4B$-окрестности начала координат. Отсюда, в частности, следует и продолжаемость решения $y_i(t)$ на отрезок $[t_0, t_0 + T + \tau]$.

В самом деле, пусть в момент $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_0 + T + \tau$ решение $y_i(t)$ впервые выходит из ε-окрестности начала координат. Тогда, если $x_i(t)$ определяется из системы (1.1) теми же начальными функциями, что и $y_i(t)$, то

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} | y_i(t_1) | \leqslant \sum_{i=1}^{n} | x_i(t_1) | + \sum_{i=1}^{n} | x_i(t_1) - y_i(t_1) | < \frac{\varepsilon}{2B} +$$

$$+ \frac{\varepsilon \sigma B}{2B (L + \sigma)} \left(e^{mn (L + \sigma)(t_1 - t_0)} - 1 \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8B} < \varepsilon$$

а это является противоречием. Теперь при $t_0 + T \leqslant t \leqslant t_0 + T + \tau$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(t) < \frac{\varepsilon}{2} e^{-\alpha T} + \frac{\varepsilon}{8B} = \frac{\varepsilon}{4B}$$

Если рассматривать теперь $y_i(t)$ на отрезке $[t_0 + T, t_0 + T + \tau]$ как начальные функции в момент $t_0 + T + \tau$, то относительно продолжения решения $y_i(t)$ таким же точно путем придем к выводу, что при $t_0 + T + \tau \leqslant t \leqslant t_0 + 2(T + \tau)$ оно не выходит из $^1/_2$ ε-окрестности начала координат, а при $t_0 + 2T + \tau \leqslant t \leqslant t_0 + 2(T + \tau)$ лежит в $\varepsilon / 8B$-окрестности начала координат.

Продолжая этот процесс последовательными шагами длины $T+\tau$, придем к выводу, что если $\varphi_i(t)$ лежит в $\varepsilon/2B$-окрестности начала координат, то решение системы (2.1) на отрезке $[t_0+n(T+\tau),\ t_0+(n+1)(T+\tau)]$ лежит в $\varepsilon/2^n$-окрестности начала координат. Очевидно теперь, что тривиальное решение системы (2.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Следствие 1. Если система (2.1) удовлетворяет условию

$$|X_i(t,\ x_{kj})-Y_i(t,\ x_{kj})|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|x_{kj}|\,\psi\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|x_{kj}|\Big)\quad\text{при}\quad\sum_{k=1}^{n}|x_{kj}|<H$$

где $\psi(x)\to 0$ при $x=0$, то в тех же предположениях относительно системы (1.1) тривиальное решение системы (2.1) равномерно асимптотически устойчиво. В частности, система (1.1) может быть системой, полученной в результате обычной линеаризации системы (2.1).

В самом деле, для любого $\sigma>0$ неравенство (2.3) выполняется при достаточно малом h.

Следствие 2. Пусть для функций $Y_i(t,\ x_{kj})$ существуют такие функции $X_i(x_{kj})$, что для любого $\sigma>0$ существует число $A(\sigma)\geqslant A$ такое, что при $t\geqslant A(\sigma)$ выполняется неравенство

$$|Y_i(t,x_{kj})-X_i(x_{kj})|<\sigma\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|x_{kj}|$$

Если решения системы

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_k(t-\tau_j(t))) \tag{2.5}$$

удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 1 на решения системы (1.1), то тривиальное решение системы (2.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Действительно, выберем σ, как при доказательстве теоремы 1, затем будем рассматривать системы (2.1) и (2.5) при $t\geqslant A(\sigma)$ Применяя теорему 1 и лемму 2, получим требуемое.

Замечание. Теорема 1 отличается от теоремы Райта [4, 6] об устойчивости по первому приближению, в частности, тем, что в ней учитывается и нестационарный случай. Однако, строго говоря, она не является обобщением теоремы Райта хотя бы потому, что в последней рассматриваются не только уравнения с запаздывающим аргументом, но и уравнения «нейтрального типа» [4].

§ 3. Сохранение устойчивости при малых изменениях запаздываний. Рассмотрим системы (1.1) и (1.3).

Теорема 2. Если решения системы (1.1) удовлетворяют условиям, наложенным на них в теореме 1, и $|\tau_j(t)-\tau_j^\circ(t)|<\rho$, то при достаточно малом ρ тривиальное решение системы (1.3) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Предположим, что функции $\varphi_i(t)$, определяющие решения $x_i(t)$ и $x_i^\circ(t)$ систем (1.1) и (1.3) в момент t_0, обладают непрерывными производными и пусть

$$|\varphi_1(t)|+\ldots+|\varphi_n(t)|<\delta,\qquad |\dot\varphi_1(t)|<\gamma$$

Пусть δ настолько мало, что решение $x_i(t)$ системы (1.1) продолжаемо на всю полуось $t\geqslant t_0$ и удовлетворяет неравенству $|x_1(t)|+\ldots+|x_n(t)|\leqslant B\delta e^{-\alpha(t-t_0)}$.

Покажем, что справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)-x_i^\circ(t)|\leqslant\rho n(\gamma+\delta mLB)(e^{mnL(t-t_0)}-1) \tag{3.1}$$

пока решение $x_i^\circ(t)$ продолжаемо в H-окрестности начала координат. В силу (1.1) и (1.3) имеем

$$x_i(t)=\varphi_i(t_0)+\int_{0}^{t}X_i(\xi,\ x_k(\xi-\tau_j(\xi)))\,d\xi$$

$$x_i^\circ(t)=\varphi_i(t_0)+\int_{t_0}^{t}X_i(\xi,\ x_k^\circ(\xi-\tau_j^\circ(\xi)))\,d\xi$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)-x_i^\circ(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} |X_i(\xi, x_k(\xi-\tau_j(\xi)))-X_i(\xi, x_k^\circ(\xi-\tau_j^\circ(\xi)))|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant nL\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |x_k(\xi-\tau_j(\xi))-x_k^\circ(\xi-\tau_j^\circ(\xi))|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant nL\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |x_k(\xi-\tau_j(\xi))-x_k(\xi-\tau_j^\circ(\xi))|\, d\xi +$$

$$+nL\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |x_k(\xi-\tau_j^\circ(\xi))-x_k^\circ(\xi-\tau_j^\circ(\xi))|\, d\xi$$

Оценим теперь отдельно

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{n} |x_k(\xi-\tau_j(\xi))-x_k(\xi-\tau_j^\circ(\xi))|\, d\xi =$$

$$=(t-t_0)\sum_{k=1}^{n} |x_k(\theta-\tau_j(\theta))-x_k(\theta-\tau_j^\circ(\theta))| \qquad (t_0\leqslant\theta\leqslant t)$$

Здесь могут представиться три случая.

Первый случай, когда

$$\theta-\tau_j(\theta)\leqslant t_0, \qquad \theta-\tau_j^\circ(\theta)\leqslant t_0$$

При этом

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k(\theta-\tau_j(\theta))-x_k(\theta-\tau_j^\circ(\theta))| \leqslant \rho\gamma n$$

так как $x_k(t)$ при $t\leqslant t_0$ совпадает с $\varphi_k(t)$.

Второй случай, когда

$$\theta-\tau_j(\theta)\geqslant t_0 \quad \text{и} \quad \theta-\tau_j^\circ(\theta)\geqslant t_0$$

Здесь

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k(\theta-\tau_j(\theta))-x_k(\theta-\tau_j^\circ(\theta))| = \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\theta-\tau_j^\circ(\theta)}^{\theta-\tau_j(\theta)} X_k(\eta, x_\nu(\eta-\tau_\mu(\eta)))\, d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant nL\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{\theta-\tau_j^\circ(\theta)}^{\theta-\tau_j(\theta)} |x_\nu(\eta-\tau_\mu(\eta))|\, d\eta\right| \leqslant \rho\delta mnLB$$

Третий случай, когда одно из чисел $\theta-\tau_j(\theta)$, $\theta-\tau_j^\circ(\theta)$ больше t_0, другое же меньше t_0. Тогда напишем неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k(\theta-\tau_j(\theta))-x_k(\theta-\tau_j^\circ(\theta))| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k(\theta-\tau_j(\theta))-x_k(t_0)| + \sum_{k=1}^{n} |x_k(t_0)-x_k(\theta-\tau_j^\circ(\theta))|$$

и оценим каждую из сумм в правой части этого неравенства, как в первом и во втором случаях; получим

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k(\theta-\tau_j(\theta))-x_k(\theta-\tau_j^\circ(\theta))| \leqslant \rho n(\gamma+\delta mLB)$$

Очевидно, последнее неравенство имеет место в любом случае. Пусть теперь

$$M(t)=\max\sum_{k=1}^{n} |x_k(\xi)-x_k^\circ(\xi)| \quad \text{при } t_0\leqslant\xi\leqslant t$$

Тогда получаем

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - x_i^\circ(t)| \leqslant \rho mn^2 (\gamma + \delta mLB) L (t - t_0) + mnL \int_{t_0}^{t} M(\xi)\, d\xi$$

Отсюда

$$M(t) \leqslant \rho mn^2 (\gamma + \delta mLB) L (t - t_0) + mnL \int_{t_0}^{t} M(\xi)\, d\xi$$

и, применяя лемму 1, получаем неравенство (3.1).

Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что неравенство (3.1) можно применять, если

$$|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)| < \varepsilon/2B$$

Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(t)| < \frac{\varepsilon}{2Be^{mnL\tau}}, \qquad t_0 \geqslant A, \qquad T = \frac{\ln 4B}{\alpha}, \ \rho$$

настолько мало, что $\rho mnL(1 + B)(e^{mnL(T+2\tau)} - 1) < 1/4$.

Докажем, что на отрезке $[t_0 + \tau,\ t_0 + T + 3\tau]$ решение $x_i^\circ(t)$ системы (1.3), определенное функциями $\varphi_i(t)$ в момент t_0, не может выйти из ε-окрестности начала координат, на отрезке же $[t_0 + T + \tau,\ t_0 + T + 3\tau]$ лежит в $\varepsilon/4B$-окрестности начала координат. В самом деле, на отрезке $[t_0,\ t_0 + \tau]$ справедливо неравенство

$$|x_1^\circ(t)| + \ldots + |x_n^\circ(t)| < \varepsilon/2B$$

в силу неравенства (1.6).

Определим теперь функциями $x_i^\circ(t)$ в момент $t_0 + \tau$ решение $x_i(t)$ системы (1.1). Очевидно, $x_i^\circ(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[t_0,\ t_0 + \tau]$, причем

$$dx_i^\circ/dt = X_i(t,\ x_k^\circ(t - \tau_j^\circ(t)))$$

Из последнего равенства следует, что

$$\left|\frac{dx_i^\circ}{dt}\right| \leqslant L \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |x_k^\circ(t - \tau_j^\circ(t))| \leqslant \frac{EmL}{2B}$$

На отрезке $[t_0 + \tau,\ t_0 + T + 3\tau]$ имеем теперь всюду неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i^\circ(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| + \sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - x_i^\circ(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} e^{-\alpha(t-t_0-\tau)} +$$

$$+ \rho n \left(\frac{\varepsilon mL}{2B} + \frac{\varepsilon mL}{2}\right)(e^{mnL(t-t_0-\tau)} - 1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} e^{-\alpha(t-t_0-\tau)} + \frac{\varepsilon}{8B}$$

Первое слагаемое всюду на рассматриваемом отрезке не превосходит $1/2\varepsilon$, если же $t_0 + T + \tau \leqslant t \leqslant t_0 + T + 3\tau$, то оно не превосходит $1/2\varepsilon e^{-\alpha T} = \varepsilon / 8B$. Отсюда и следует наше утверждение о поведении $x_i^\circ(t)$.

Рассмотрим теперь решение системы (1.1), определенное функциями $x_i^\circ(t)$ в момент $t_0 + T + 3\tau$. Снова $x_i^\circ(t)$ имеют непрерывные производные, причем так как $|x_1^\circ(t)| + \ldots + |x_n^\circ(t)| < \varepsilon / 4B$ на отрезке $[t_0 + T + \tau,\ t_0 + T + 3\tau]$, то

$$|dx_i^\circ / dt| < \varepsilon mL / 4B$$

Повторяя и далее такие шаги (временной длины $T + 2\tau$), приходим к выводу, что на отрезке

$$[t_0 + nT + (2n+1)\tau,\quad t_0 + (n+1)T + (2n+3)\tau]$$

имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i^\circ(t)| < \frac{\varepsilon}{2^n}, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(t)| < \frac{\varepsilon}{2Be^{mnL}}$$

Отсюда и следует заключение теоремы о равномерной асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.3).

Следствие. Пусть в системе (1.1) $\tau_j(t) \to \tau_j$ при $t \to \infty$. Если тривиальное решение системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_k(t - \tau_j)) \tag{3.2}$$

равномерно асимптотически устойчиво, причем справедливо неравенство (2.2), то тривиальное решение системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво. Действительно, выберем ρ, как при доказательстве теоремы 2, и пусть $|\tau_j(t) - \tau_j| < \rho$ при $t \geqslant A(\rho) \geqslant A$ для всех j. Рассматривая системы (1.1) и (3.2) при $t \geqslant A(\rho)$ и применяя теорему 2 и лемму 2, получим требуемое.

§ 4. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях запаздываний.

Теорема 3. Если тривиальное решение системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво, то оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях запаздываний.

Доказательство. Рассмотрим систему (1.3) наряду с системой (1.1) и оценим разность между их решениями, определенными в момент t_0 одними и теми же функциями $\varphi_i(t)$, допускающими непрерывные производные, причем

$$|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)| < \delta < H, \qquad |d\varphi_i(t)/dt| < \gamma$$

Докажем, что в этих предположениях имеет место неравенство

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - x_i^\circ(t)| \leqslant \rho\gamma n\,(e^{mnL(t-t_0)} - 1) + \\ + \rho\delta m^2 n^2 L^2 (t - t_0)\left(1 + \frac{mnL(t - t_0)}{2}\right) e^{mnL(t-t_0)}\end{gathered} \tag{4.1}$$

пока оба решения продолжаемы в H-окрестности начала координат. Оценка проводится точно так же, как и в § 3, исключая только второй случай, возникающий при оценке

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} |x_k(\xi - \tau_j(\xi)) - x_k(\xi - \tau_j^\circ(\xi))|\, d\xi$$

Здесь имеем неравенство (1.6)

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} |x_k(\theta - \tau_j(\theta)) - x_k(\theta - \tau_j^\circ(\theta))| \leqslant \\ \leqslant nL \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{\theta-\tau_j^\circ(\theta)}^{\theta-\tau_j(\theta)} |x_\nu(\eta - \tau_\mu(\eta))|\, d\eta \right| \leqslant \rho\delta mnLe^{mnL(t-t_0)}\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} |x_k(\xi - \tau_j(\xi)) - x_k(\xi - \tau_j^\circ(\xi))|\, d\xi \leqslant (t - t_0)\,\rho n\,(\gamma + \delta mLe^{mnL(t-t_0)})$$

и окончательно

$$M(t) \leqslant L\rho mn^2 (\gamma + \delta mLe^{mnL(t-t_0)})(t - t_0) + mnL \int_{t_0}^{t} M(\xi)\, d\xi$$

Неравенство (4.1) получаем отсюда применением леммы 1.

Докажем теперь, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если начальные функции $\varphi_i(t)$ удовлетворяют условию $|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)| < \delta$, то решение системы (1.1), определенное ими, будет при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворять неравенству $|x_1(t)| + \ldots + |x_n(t)| < \varepsilon$. В самом деле, для ε существует число $T(\varepsilon)$ такое, что при $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ будет $|x_1(t)| + \ldots + |x_n(t)| < \varepsilon$ (если $\delta < \beta$).

Пусть $\delta < \varepsilon / e^{mnLT(\varepsilon)}$. Тогда и при $t_0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon) + t_0$ будет

$$|x_1(t)| + \ldots + |x_n(t)| < \varepsilon$$

в силу неравенства (1.6).

Возьмем теперь $\varepsilon > 0$ и по числу $^1/_2\varepsilon$ найдем $\delta_1 > 0$ такое, что если

$$|\varphi_1(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)| < \delta_1, \text{ то } |x_1(t)| + \ldots + |x_n(t)| < {}^1/_2\varepsilon$$

Далее по числу $^1/_2\delta_1$ найдем такое T, что если $t-t_0>T$, то

$$|x_1(t)|+\ldots+|x_n(t)|<{}^1/_2\delta_1$$

Покажем, что если

$$|\varphi_1(t)|+\ldots+|\varphi_n(t)|<\delta_1 e^{-mnL\tau}$$

и ρ настолько мало, что

$$\rho mLn\left\{(e^{mnL(T+2\tau)}-1)+mnL(T+2\tau)\left(1+\frac{mnL(T+2\tau)}{2}\right)e^{mnL(T+2\tau)}\right\}<\frac{1}{2}$$

то решение $x_i^\circ(t)$ системы (1.3), определенное функциями $\varphi_i(t)$, удовлетворяет неравенству $|x_1^\circ(t)|+\ldots+|x_n^\circ(t)|<\varepsilon$ при $t\geqslant t_0$.

Действительно, $|x_1^\circ(t)|+\ldots+|x_n^\circ(t)|<\delta_1$ на отрезке $[t_0,\ t_0+\tau]$. Покажем что

$$|x_1^\circ(t)|+\ldots+|x_n^\circ(t)|<\varepsilon \quad \text{на} \quad \text{отрезке}\quad [t_0+\tau,\ t_0+T+3\tau]$$

$$|x_1^\circ(t)|+\ldots+|x_n^\circ(t)|<\delta_1$$

на отрезке $[t_0+T+\tau,\ t_0+T+3\tau]$.

В самом деле, взяв в качестве начальных функций для системы (1.1) функции $x_i^\circ(t)$ на отрезке $[t_0,\ t_0+\tau]$, определим ими решение этой системы. Применяя неравенство (4.1) с $\gamma=\delta_1 mL$ (что получается, как и в § 3), имеем

$$\sum_{i=1}^n|x_i^\circ(t)|\leqslant\sum_{i=1}^n|x_i(t)|+\sum_{i=1}^n|x_i(t)-x_i^\circ(t)|<\frac{\varepsilon}{2}+\rho\delta_1 mnL\left\{(e^{mnL(t-t_0-\tau)}-1)+\right.$$

$$\left.+mnL(t-t_0-\tau)\left(1+\frac{mnL(t-t_0-\tau)}{2}\right)e^{mnL(t-t_0-\tau)}\right\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta_1}{2}<\varepsilon$$

На отрезке же $[t_0+T+\tau,\ t_0+T+3\tau]$ по выбору T имеем

$$\sum_{i=1}^n|x_i^\circ(t)|<\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_1}{2}=\delta_1$$

Рассмотрим опять решение системы (1.1), определенное функциями $x_i^\circ(t)$, взятыми на отрезке $[t_0+T+2\tau,\ t_0+T+3\tau]$.

Теми же рассуждениями получаем, что $|x_1^\circ(t)|+\ldots+|x_n^\circ(t)|<\varepsilon$ и на отрезке $[t_0+T+3\tau,\ t_0+2T+5\tau]$, а на отрезке $[t_0+2T+3\tau,\ t_0+2T+5\tau]$ будет $|x_1^\circ(t)|+\ldots+|x_n^\circ(t)|<\delta_1$.

Продолжая и далее этот процесс, получим, что

$$|x_1^\circ(t)|+\ldots+|x_n^\circ(t)|<\varepsilon \quad \text{при}\quad t\geqslant t_0$$

что и требовалось. Доказанная теорема является обобщением локальной части теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях запаздываний из [5].

Поступила 27 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А., Скалкина М. А. К вопросу об устойчивости по первому приближению. ПММ, т. XIX, вып. 3, 1955.
2. Горшин С. П. Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями. Известия АН Казахской ССР, № 56, 1948.
3. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. УМН, т. IV, вып. 5, 1949.
4. Эльсгольц Л. Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений. УМН, т. IX, вып. 4, 1954.
5. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.
6. Wright E. M. The stability of solutions of nonlinear difference — differential equations Proc. Roy. Soc., Edinburgh, v. 63, N 1, 1950.