Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕАНАЛИТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

В настоящей работе дается метод определения периодических колебаний для квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим систему вида

$$\frac{dx_s}{dt}=a_{s1}x_1+\ldots+a_{sn}x_n+\mu F_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (s=1, \ldots, n) \quad (1.1)$$

Здесь a_{si} — постоянные, F_s — непрерывные и периодические функции времени t периода 2π и непрерывные функции x в некоторой области G и μ при $|\mu|\leqslant\mu^*$, где μ^* — положительное число, функции F_s по отношению к x удовлетворяют условиям Коши-Липшица.

Будем искать периодические решения системы (1.1) периода 2π, которые при $\mu=0$ обращаются в периодическое решение (периода 2π) системы

$$\frac{dx_s}{dt}=a_{s1}x_1+\ldots+a_{sn}x_n \qquad (s=1, \ldots, n) \quad (1.2)$$

В том случае, когда система (1.2) допускает только одно периодическое решение $x_s=0$, говорят, что система (1.1) вдали от резонанса. В этом случае уравнение

$$\| a_{si}-\delta_{si}\lambda \|=0 \quad (1.3)$$

не имеет критических корней (корней вида $\pm N\sqrt{-1}$, где $N=0$, 1, 2, ...). Легко установить, что в этом случае всегда существует при достаточно малых значениях $|\mu|$ единственное периодическое решение, которое при $\mu=0$ обращается в тривиальное решение $x_s=0$ системы (1.2). Это периодическое решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Если система (1.2) имеет периодическое решение периода 2π, зависящее от нескольких параметров, то говорят, что в этом случае имеет место резонанс. Он характеризуется тем, что среди корней уравнения (1.3) имеется несколько критических.

Анализу этого случая были посвящены работы [1–4]. Как в работе И. Г. Малкина [1, 2], так и в работе автора [4] строилось периодическое решение системы (1.1) в случае резонанса, когда выполнены достаточные условия существования единственного периодического решения (особый определитель отличен от нуля). Можно указать много примеров, когда этот определитель равен нулю. Ниже излагается метод построения периодического решения для системы (1.1), который не зависит от этого условия; при этом дается способ построения условий, необходимых и достаточных, чтобы система (1.1) имела периодическое решение, которое при $\mu = 0$ обращается в одно из периодических решений порождающей системы (1.1). Для построения этих условий не надо искать общее решение системы (1.1) в окрестности периодического решения системы (1.2), что предполагают известные условия А. Пуанкаре, а надо найти периодическое решение, зависящее от нескольких параметров, некоторой вспомогательной системы интегро-дифференциальных уравнений.

В работе дается метод приближенного вычисления периодических решений системы (1.1).

§ 2. О периодических решениях линейной неоднородной системы с периодическими коэффициентами. Рассмотрим систему уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n + f_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где a_{si} — постоянные, $f_s(t)$ — периодические и непрерывные функции t периода 2π. Будем искать периодические решения системы (2.1). Если среди корней характеристического уравнения (1.3) нет критических, то система (2.1) при любых f_s имеет единственное периодическое решение, которое можно, например, найти методом неопределенных коэффициентов.

Допустим, что среди корней характеристического уравнения имеются критические. В этом случае система (2.1) имеет периодическое решение, если функции f_s удовлетворяют определенным условиям [1, 2].

Пусть число критических корней k и им соответствует m групп решений вида

$$x_{s1}^{(i)} = \varphi_{s1}^{(i)}$$

$$x_{s2}^{(i)} = \varphi_{s1}^{(i)}t + \varphi_{s2}^{(i)}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{sr_i}^{(i)} = \varphi_{s1}^{(i)}\frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} + \ldots + \varphi_{s,r_i-1}^{(i)}t + \varphi_{sr_i}^{(i)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ s = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

где φ — периодические функции t периода 2π, а r — целые такие, что $r_1 + \ldots + r_m = k$. Обозначим через $\psi_{1i}, \ldots, \psi_{ni}$ периодические решения системы, сопряженной с системой (1.2). Тогда можно показать, что имеют место условия

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi_{s\sigma}^{(i)}\psi_{sj} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m;\; j = 1, \ldots, m \\ \sigma = 1, \ldots, r_i - 1 \end{pmatrix}$$

что касается функций $\varphi_{sr}{}^{i} = \varphi_{si}{}^{*}$, то они могут быть выбраны так, что будут иметь место условия

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi_{si}{}^{*}\psi_{sj} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

Когда $r_i = 1$, тогда $\varphi_{si}{}^{*} = \varphi_{s1}{}^{(i)}$ будет периодическим решением системы (1.2).

Условия существования периодического решения для системы (2.1) имеют вид[1]:

$$\int_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{n} f_s(t)\,\psi_{si}(t)\,dt=0 \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь систему неоднородных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt}=a_{s1}x_1+\ldots+a_{sn}x_n+f_s(t)+\varphi_{s1}{}^*W_1+\ldots+\varphi_{sm}{}^*W_m \tag{2.3}$$

$$(s=1,\ldots,n)$$

где W_i постоянны. Из условия (2.2) следует, что, для того чтобы система (2.3) имела периодические решения при любых периодических и непрерывных функциях f_s, необходимо и достаточно, чтобы постоянные W определялись формулами

$$W_i=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\sigma=1}^{n} f_\sigma\psi_{\sigma i}dt$$

Это периодическое решение имеет вид:

$$x_s=M_1\varphi_{s1}+\ldots+M_m\varphi_{sm}+L_s\left(t, f_1+\sum_{i=1}^{m}\varphi_{1i}^*w_i,\ldots, f_n+\sum_{i=1}^{m}\varphi_{ni}^*w_i,\ \mu\right)$$

где $\varphi_{si}=\varphi_{si}{}^{(1)}$, а оператор L_s, как легко показать, удовлетворяет тем же условиям, что и оператор L_s в работе[1].

§ 3. Вспомогательная система и ее периодические решения. Рассмотрим теперь систему (1.1) и изменим ее следующим образом:

$$\frac{dx_s}{dt}=a_{s1}x_1+\ldots+a_{sn}x_n+\mu F_s(t,\ x_1,\ldots,x_n\mu)+\sum_{i=1}^{m}\varphi_{si}^*W_i \tag{3.1}$$

$$W_i=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{n}\mu F_s(t,\ x_1,\ldots,x_n\mu)\,\psi_{si}dt \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ldots,m \\ s=1,\ldots,n\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

При этом мы получаем интегро-дифференциальную систему уравнений. Эту систему назовем вспомогательной системой.

Покажем, что система (3.1) имеет всегда при любых функциях (удовлетворяющих условиям, указанным в § 1) периодическое решение. содержащее m произвольных параметров.

Примем за первое приближение периодическое решение однородной системы (1.2)

$$x_s^{(0)}=M_1\varphi_{s1}+\ldots+M_m\varphi_{sm} \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{3.3}$$

где M_i — постоянные, которые мы предполагаем такими, чтобы $x_s^{(0)}$ лежали в области G. За дальнейшие приближения примем периодические решения уравнений

$$\frac{dx_s^{(l)}}{dt}=a_{s1}x_1^{(l)}+\ldots+a_{sn}x_n^{(l)}+\mu F_s\left(t, x_1^{(l-1)},\ldots,x_n^{(l-1)},\mu\right)+\sum_{i=1}^{m}\varphi_{s1}^*W_i^{(l)} \tag{3.4}$$

где

$$W_i^{(l)}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{n}\mu F_s\left(t,\ x_1^{(l-1)},\ \ldots,\ x_n^{(l-1)},\ \mu\right) \qquad \begin{pmatrix} s=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,m\end{pmatrix}$$

Разрешая эту систему, находим периодическое решение $x_s^{(l)}$:

$$x_s^{(l)}=\varphi_{s1}M_1+\ldots+\varphi_{sm}M_m+\mu L_s\left(t,\ F_1^{(l-1)}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_{1i}^{*}W_i^{(l)},\ \ldots,\ \mu\right)$$

$$W_i^{(l)}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{n}\mu F_s^{(l-1)}\psi_{si}\,dt,\quad F_\sigma^{(l-1)}=F_\sigma(t,\ x_1^{(l-1)},\ \ldots,\ x_n^{(l-1)},\ \mu) \quad (3.5)$$

Допустим, что мы нашли $l-1$ приближение $x_s^{(0)}$, $x_{s1}^{(1)}$, ..., $x_s^{(l-1)}$ и $W_i^{(1)}$, ..., $W_i^{(l-1)}$, определенные в области $|\mu|\leqslant\eta$, где η — некоторое положительное число. Все эти приближения $x_s^{(0)}$, $x_s^{(1)}$, ... расположены в области G при $|\mu|\leqslant\eta$

$$|M_i-M_i^\circ|<h \quad (3.6)$$

где M_i° и h — некоторые фиксированные постоянные. При этом предполагаем, что постоянные M_i° таковы, что функции

$$x_s^\circ(t)=\varphi_{s1}M_1^\circ+\ldots+\varphi_{sm}M_m^\circ$$

принадлежат области G.

Тогда формулы (3.5) определят нам $W_i^{(l)}$ и $x_s^{(l)}$. Эти функции будут определены в области $|\mu|\leqslant\eta$ изменения параметра μ, т. е. в той области, где определены функции $x_s^{(0)}$, ..., $x_s^{(l-1)}$; $W_i^{(1)}$, ..., W_i, ..., $W_i^{(l-1)}$.

Существует такое число $H>0$, что при

$$|x_s^{(l)}-x_s^\circ|<H \qquad (s=1,\ \ldots,\ n)$$

$x_s^{(l)}$ расположены в области G. Оценивая разность $|x_s^{(l)}-x_s^\circ|$, найдем

$$|x_s^{(l)}-x_s^\circ|<h(|\varphi_{s1}|+\ldots+|\varphi_{sm}|)+|\mu|BA+$$
$$+(|W_1^{(l)}|+|W_2^{(l)}|+\ldots+|W_m^{(l)}|BC$$

где A, B и C — постоянные такие, что

$$|F_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)|<A \quad \text{в области } G$$

$$|\varphi_{si}(t)|<C, \qquad |\varphi_{si}^{*}(t)|<C \qquad (s=1,\ldots,\ n;\quad i=1,\ \ldots,\ m)$$

$$|L_s(t,\ F,\ \ldots,\ F_n,\ \mu)|<AB \quad \text{при } |F_j|<A$$

B не зависит от вида F. Постоянная h определена в условиях (3.6).

Оценим теперь $|W_i^{(l)}|$:

$$|W_i^{(l)}|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\sum_{\sigma=1}^{n}\mu F_\sigma^{(l-1)}\psi_{\sigma i}\,dt\right|\leqslant|\mu|nAD$$

где D — постоянная, такая, что $|\psi_{\sigma i}|<D$.

Учитывая эту оценку, имеем

$$|x_s^{(l)}-\bar{x}_s|<hnC+|\mu|AB+BCADn^2|\mu|$$

Выберем теперь

$$h<\frac{H}{2nC}, \qquad \eta<\frac{H}{2(BA+BACDn^2)} \quad (3.8)$$

Тогда $x_s^{(l)}$ будут расположены в области G, при выполнении условий (3.6), и определены вместе с $W_i^{(l)}$ в области $|\mu|\leqslant\eta$. Так как постоянные A, B, C, D не зависят от l, то отсюда следует, что в области $|\mu|\leqslant\eta$ будут определены все последовательные приближения $l=1, 2, \ldots$ и при условии (3.6) они будут все расположены в области G.

Оценим теперь степень сближения членов последовательностей. Можно написать

$$|x_s^{(l)}-x_s^{(l-1)}|<\Big|L_s\Big(t, F_1^{(l-1)}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_{1i}^*W_i^{(l)}, \ldots\Big)-$$

$$-L_s\Big(t, F_1^{(l-2)}+\Big|\sum_{i=1}^{m}\varphi_{1i}^*W_i^{(l-1)}\Big)\Big|<a_l$$

$$|W_i^{(l)}-W_i^{(l-1)}|<b_l$$

где a_l и b_l — положительные постоянные, которые ограничены сверху некоторым положительным числом, не зависящим от номера l, так как все $x_s^{(l)}$ и $W_i^{(l)}$ ограничены в области (3.7) на основании предыдущего.

Учитывая линейность оператора L и то, что функции F_s удовлетворяют условиям Липшица по x с постоянной K, получим следующие оценки:

$$\frac{b_{l+1}}{b_l}=\frac{a_{l+1}}{a_l}=|\mu|\,nKB(1+mnCD\,|\mu|) \tag{3.10}$$

При достаточно малом $|\mu|$ отношения a_{l+1}/a_l и b_{l+1}/b_l будут меньше единицы.

Отсюда непосредственно вытекает, что при достаточно малом $|\mu|$ последовательности $L_s^{(l)}$ и $W_i^{(l)}$ будут равномерно сходиться. Следовательно, последовательность функций $x_s^{(l)}$ также равномерно сходится к некоторым функциям $x_s^*(t, M, \mu)$. Так как все $x_s^{(l)}$ периодические, то и функции x_s^* будут периодическими. Легко показать, что они определяют периодическое решение вспомогательной системы (3.1). Это периодическое решение, как и все последовательные приближения, будет расположено в области G.

Можем указать область изменения параметра μ, где определены периодическое решение вспомогательной системы $x_s^*(t, M_1, \ldots, M_m, \mu)$ и соответствующие ему функции $W_i^*(M_1, \ldots, M_m, \mu)$.

Число η, определяющее область изменения параметра μ, в которой определены все $x_s^{(l)}$, $W_i^{(l)}$ и их пределы x_s^* и W_i^*, ограничено первенством (3.8). Кроме того, η должно быть настолько малым, чтобы отношения (3.10) были менее единицы, если $|\mu|<\eta$. Последнее имеет место если η будет меньше модуля наименьшего корня y_1 уравнения

$$y^2n^2KBmCD+ynKB-1=0$$

Таким образом, находим, что

$$\eta=\min\left\{|y_1|, \frac{H}{2}(BA+BACDn^2)^{-1}, \frac{H}{2nC}\right\}$$

Относительно $M_1, \ldots, M_m\mu$ периодическое решение $x_s^*(tM\mu)$ и функции $W_i^*(M, \mu)$ непрерывны.

§ 4. Условия существования периодического решения исходной системы (1.1) в случае резонанса. Найдем периодическое решение системы (1.1), которое при $\mu=0$ обращается в периодическое решение порождающей системы (1.2);

$$x_s^{(0)}=M_1^\circ\varphi_{s1}+\ldots+M_m^\circ\varphi_{sm} \tag{4.1}$$

где M_i° — постоянные, такие, что $x_s^{(0)}$ расположено в области G. Найдем периодическое решение вспомогательной системы, определенное в области (3.6). Это решение, зависящее от m параметров M_i и параметра μ, можно представить в виде $x_s^*(t, M_1,\ldots, M_m,\mu)$ $(s=1,\ldots, n)$.

Соответствующие W_i имеют вид:

$$W_i^*(M_1,\ldots, M_m, \mu)\equiv\mu P_i(M_1,\ldots, M_m, \mu)\equiv$$

$$\equiv-\frac{\mu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{s=1}^n F_s(t, x_1^*(t, M, \mu),\ldots, \mu)\psi_{si}dt \qquad (i=1,\ldots, m)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$P_i(M_1,\ldots, M_m, \mu)=0 \quad (i=1,\ldots, m) \tag{4.2}$$

определенных в области $|\mu|\leqslant\mu$, $|M_i-M_i^\circ|<h$.

Допустим, что эта система имеет решение $M_i(\mu)$ в некоторой окрестности $|\mu|<\eta_1<\eta$, которое удовлетворяет условию $M_i(0)=M_i^\circ$. Последнее возможно при условии (4.3)

$$P_i(M_1^\circ,\ldots, M_m^\circ 0)\equiv$$

$$\equiv-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{s=1}^n F_s(t, x_1^{(0)},\ldots, x_n^{(0)}, 0)\psi_{si}dt=0 \quad (i=1,\ldots, m)$$

Это условие поэтому является необходимым условием существования искомого периодического решения системы (1.1), которое при $\mu=0$ обращается в порождающее. Подставив найденные корни $M_i(\mu)$ уравнений (4.2) в периодическое решение вспомогательной системы, получим периодическое решение системы (1.1)

$$x_s(t)=x_s^*(t, M(\mu),\ldots, M_m(\mu), \mu) \qquad (s=1,\ldots, n)$$

которое определено в урезанной области $|\mu|\leqslant\eta_1\leqslant\eta$.

Таким образом, чтобы система (1.1) имела периодическое решение, обращающееся при $\mu=0$ в порождающее, достаточно, чтобы система уравнений (4.2) допускала решение $M_i(\mu)$, которое при $\mu=0$ удовлетворяет условию $M_i(0)=M_i^\circ$.

Вместе с этим выполнение уравнений (4.2) является необходимым условием существования периодического решения системы (1.1), которое при $\mu=0$ обращается в порождающее (4.1). В самом деле, допустим, что существует такое решение системы (1.1) $x_s(t, \mu)$, которое при $\mu=0$ обращается в (4.1). Подставив это решение в вспомогательную систему (3.1), получим систему тождеств

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{si}^* W_i\equiv 0 \qquad (s=1,\ldots, n)$$

где

$$W_i\equiv-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{s=1}^n \mu F_s(t, x_1(t, \mu),\ldots, x_n(t, \mu))\psi_{si}dt$$

Так как функции φ_{si}^* независимы, то $W_i \equiv 0$. Отсюда следует, что условия (4.2), являясь достаточными, будут также и необходимыми условиями существования периодического решения системы (1.1) указанного вида.

Таким образом, чтобы система (1.1) имела периодическое решение, которое при $\mu = 0$ обращается в порождающее решение (4.1), необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (4.2) допускала решение $M_i(\mu)$ такое, что $M_i(0) = M_i^\circ$. При этом система (1.1) будет иметь столько решений, сколько решений имеет система (4.2).

Допустим теперь, что функции $F_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu)$ допускают непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n, \mu$, до r-го порядка. Тогда этими же свойствами будут обладать и функции $W(M_1, \ldots, M_m, \mu)$ и $P_i(M_1, \ldots, M_m, \mu)$ по отношению к $M_1, \ldots, M_m, \mu$.

Из теоремы о неявных функциях следует, что система уравнений (4.2) допускает единственное решение $M_i(\mu)$ $(M_i(0) = M_i^\circ)$, если

$$\left.\frac{\partial(P_1, \ldots, P_m)}{\partial(M_1, \ldots, M_m)}\right|_{M_i=M_i^\circ,\ \mu=0} = \left.\frac{\partial(Q_1^\circ, \ldots, Q_m^\circ)}{\partial(M_1, \ldots, M_m)}\right|_{M_i=M_i^\circ} \neq 0, \quad P_i\,|_{\mu=0} = Q_i^{(0)} \qquad (4.4)$$

Отсюда следует, что если M_i° удовлетворяет системе уравнений (4.3) и условию (4.4), то система (1.1) имеет единственное периодическое решение, которое обращается[2] в порождающее решение (4.1).

Допустим теперь, что

$$Q_i^{(0)} \equiv P_i(M_1^\circ, \ldots, M_m^\circ) \equiv 0 \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

Тогда составим функции $Q_1^{(k)}(M_1, \ldots, M_m)$, где

$$Q_i^{(k)} = \left[\frac{d^k}{d\mu^k} P_i(M_1, \ldots, M_m, \mu)\right]_{\mu=0}$$

Тогда, если $Q_i^{(0)} \equiv 0$ и $Q^{(k)} \equiv 0$ при $k < \sigma$, $M_i = M_i^\circ$ является решением системы уравнений

$$Q_i^{(\sigma)}(M_1, \ldots, M_m) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

таким, что имеет место условие

$$\left.\frac{\partial(Q_1^{(\sigma)}, \ldots, Q_m^{(\sigma)})}{\partial(M_1, \ldots, M_m)}\right| \neq 0 \qquad \text{при } M_1 = M_1^\circ, \ldots, M_m = M_m^\circ$$

и функции $M_1^\circ\varphi_{s1} + \ldots + M_m^\circ\varphi_{sm}$ расположены в области G, т. е. система (1.1) имеет единственное решение, которое при $\mu = 0$ обращается в порождающее решение (4.1).

В самом деле, в этом случае функции имеют вид:

$$P_i(M_1, \ldots, M_m, \mu) = \frac{\mu^\sigma}{\sigma!} Q_i^{(\sigma)}(M_1, \ldots, M_m) + \ldots$$

и высказанное утверждение вытекает из теоремы о неявных функциях

§ 5. О приближенном определении периодического решения системы (1.1). Найдем приближение периодического решения вспомогательной системы — периодические функции $x_s^{(l)}(t, M, \mu)$ и соотвествующие им функции $P_i^{(l)}(M\mu)$. В настоящем параграфе мы показываем, что в некоторых случаях знание этих функций достаточно для установления факта существования периодических решений системы (1.1), а также для приближенного определения этих периодических решений.

При этом далее мы будем предполагать, что функции F_s, входящие в правые части уравнений (1.1), допускают частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n$, μ, а производные их по $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют условиям Коши-Липшица. Тем же условиям будут удовлетворять и все $x^{(l)}$ и $P^{(l)}$ по отношению к аргументам M и μ. Рассмотрим систему

$$P_i^{(l)}(M_1, \ldots, M_m, \mu) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5.1}$$

и допустим, что мы нашли решение этой системы:

$$M_i = M_i^{(l)}(\mu) \tag{5.2}$$

которое при $\mu = 0$ обращается в постоянные M_i°. Таких решений может быть несколько. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если решение (5.2) системы (5.1) таково, что в области его определения имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial (P_1^{(l)}, \ldots, P_m^{(l)})}{\partial (M_1, \ldots, M_m)} \right| > C_1 |\mu|^k \qquad \text{при } M = M^{(l)}(\mu) \tag{5.3}$$

где C_1 — положительная постоянная, а $2k < l$, то система (4.2) $P_i(M_1, \ldots, M_m, \mu) = 0$ допускает решение $M_i = M_i(\mu)$ $(M_i(0) = M_i^\circ)$, удовлетворяющее неравенству

$$|M_i(\mu) - M_i^{(l)}(\mu)| < K_1 \mu^k \tag{5.4}$$

(K_1 — положительное число) в окрестности точки $\mu = 0$, в которой определено решение $M_i(\mu)$. (Последняя окрестность может быть меньше окрестности точки $\mu = 0$, где определено решение $M_i^{(l)}(\mu)$.)

Доказательство. Будем искать решение системы (4.2) в виде

$$M_i = M_i^{(l)}(\mu) + \mu^{k+\varepsilon} y_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

где y_i — новые переменные, $2\varepsilon < l - 2k$. Из оценок (3.9) и (3.10) § 3 следует, что функции P_i можно представить в виде

$$P_i = P_i^{(l)}(M_1, \ldots, M_m, \mu) + \mu^l R_i^{(l)}(M_1, \ldots, M_m, \mu)$$

где $R_i^{(l)}\mu^l$ — непрерывные функции M, μ в той же области, что и функции P_i. Функции $\mu^l R_i^{(l)}$ и $P_i^{(l)}$ дифференцируемы по M и их производные удовлетворяют условиям Коши-Липшица, если этим же предположениям удовлетворяют функции $F_s(x, t)$ в правых частях уравнений (1.1) по отношению к переменным x.

В новых переменных y_i уравнения могут быть представлены в виде

$$\left[\left(\frac{\partial P_i^{(l)}}{\partial M_1}\right)_{M=M^{(l)}} y_1 + \ldots + \left(\frac{\partial P_i^{(l)}}{\partial M_m}\right)_{M=M^{(l)}} y_m\right] \mu^{k+\varepsilon} =$$
$$= \varphi_i(y_1, \ldots, y_m, \mu) - \mu^l R_i^{(l)}(M^{(l)} + \mu^{k+\varepsilon} y, \mu) \tag{5.5}$$

где

$$\varphi_i(y, \mu) \equiv -P_i^{(l)}(M^{(l)} + \mu^{k+\varepsilon} y, \mu) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial P_i^{(l)}}{\partial M_j}\right)_{M=M^{(l)}} y_j \mu^{k+\varepsilon} \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{m} \left[\left(\frac{\partial P_i^{(l)}}{\partial M_j}\right)_{M=M^{(l)}+\theta_i y \mu^{k+\varepsilon}} - \left(\frac{\partial P_i^{(l)}}{\partial M_j}\right)_{M=M^{(l)}}\right] y_j \mu^{k+\varepsilon} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

где θ_i — некоторые функции $\mu^{k+\varepsilon} y_j$, удовлетворяющие условию $|\theta_i| < 1$.

Функции φ_i удовлетворяют условиям Коши-Липшица по отношению к переменным $y_1, \ldots, y_m$ и непрерывны относительно μ, так как этим условиям удовлетворяют функции $P_i^{(l)}$. Кроме того, функции φ_1 имеют порядок $\mu^{2k+2\varepsilon}$. Последнее вытекает из того, что имеет место условие

$$\left|\left(\frac{\partial P_i^{(l)}}{\partial M_j}\right)_{M=M^{(l)}+\theta_i y \mu^{k+\varepsilon}} - \left(\frac{\partial P_i^{(l)}}{\partial M_j}\right)_{M=M^{(l)}}\right| < K_2 \sum_{j=1}^{m} |\theta_i| \, |y_j| \, |\mu|^{k+\varepsilon}$$

где K_2 — коэффициент в условиях Липшица, которым удовлетворяют частные производные функции $P_i^{(l)}$.

Решая систему (5.5) относительно y_i и учитывая при этом условие (5.3), получим систему

$$y_i = \mu^{\varepsilon} \Phi_i (y_1, \ldots, y_m) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

где функции Φ_i удовлетворяют условиям Коши-Липшица по переменным $y_1, \ldots, y_n$ и непрерывны относительно параметра μ в некоторой окрестности точки $\mu = 0$, в которой определено решение $M^{(l)}(\mu)$.

Легко показать существование и единственность непрерывного решения для системы (5.6) методом последовательных приближений. При этом можно также оценить и область существования решения y_j. Так как везде в области существования решения системы (5.6) последнее ограничено некоторой постоянной, то имеет место оценка (5.4). Таким образом, теорема доказана.

Следствие. Если решение уравнений (5.1) удовлетворяет условию (5.3), то этому решению соответствует периодическое решение системы (1.1).

Рассмотрим приближенное определение периодического решения, существование которого установлено. Допустим, что решение $M_i^{(l)}(\mu)$ системы (5.1), удовлетворяющее условию (5.3), найдено. Тогда система (4.2) допускает решение $M_i(\mu)$ и уравнения (1.1) имеют периодическое решение

$$x_i(t, \mu) = x_i^*(t, M_1(\mu), \ldots, M_m(\mu), \mu)$$

где x^* — решение вспомогательной системы.

Теорема 2. Если решение $M_i^{(l)}(\mu)$ системы (5.1) удовлетворяет условиям (5.3), то имеют место неравенства (5.7)

$$| x_s^*(t, M_1(\mu), \ldots, M_m(\mu), \mu) - x_s^{(l)}(t, M_1^{(l)}(\mu), \ldots, M_m^{(l)}(\mu), \mu)| < D_1 |\mu|^k$$

где D_1 — постоянная. Поэтому формулы

$$x_s^{(l)}(t, M_1^{(l)}(\mu), \ldots, M_m^{(l)}(\mu), \mu)$$

определяют приближенно искомое периодическое решение.

Поступила 5 I 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. К теории колебаний квазилинейных систем со многими степенями свободы. ПММ, т. XIV, вып, 4, 1950.
2. Малкин И. Г. Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. ПММ т. XIV, вып. 1, 1950.
3. Coddington E. A. and Levinson N. Perturbations of linear systems with constant coefficients possessing periodic solutions. Contributions to the theory of nonlinear oscillations vol. II, edited by S. Lefschetz, Princeton, 1952.
4. Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.