

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАНЕЛИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ГАЗЕ¹

А. А. Мовчан

(Москва)

Задача об устойчивости панели в сверхзвуковом потоке рассматривалась в работах [1-4]. Ниже в линейной постановке исследуются колебания прямоугольной панели, подверженной действию постоянных усилий в своей плоскости и движущейся в газе с большой сверхзвуковой скоростью. Избыточное давление газа учитывается приближенной формулой «поршневой теории» [5].

Выясняются связи между характеристиками собственных колебаний панели и параметрами задачи (скорость невозмущенного движения, величина сжимающих усилий и т. п.), позволяющие делать некоторые выводы об устойчивости движения.

В принятой постановке доказана возможность флаттерных движений как у панелей, свободных от усилий в своей плоскости, так и в общем случае. Обнаружено свойство «упрочнения», состоящее в том, что в ряде случаев неустойчивое состояние покоящейся панели, сжатой сверхкритическими усилиями, может оказаться для тех же усилий устойчивым при полете с большой скоростью. Получены некоторые точные оценки, а также приближенные формулы для критических скоростей флаттера и дивергенции.

Считаю своим долгом выразить благодарность Л. В. Борщевой и Л. С. Грековой за помощь в выполнении расчетов.

1. Основные уравнения. Пусть тонкое тело правильной аэродинамической формы движется в покоящемся газе прямолинейно и равномерно с большой сверхзвуковой скоростью c . На поверхности тела рассмотрим часть его обшивки — прямоугольную панель, которая в невозмущенном состоянии, являясь плоской, движется параллельно двум своим краям без угла атаки относительно газа (фиг. 1). В плоскости этого невозмущенного движения панели введем прямоугольную систему координат x, y , движущуюся вместе с телом прямолинейно и равномерно со скоростью c вдоль оси x . Края панели в любой момент времени t совпадают с отрезками прямых $x=0, x=a, y=0, y=b$.

Под влиянием каких-либо причин невозмущенное движение панели в своей плоскости может быть нарушено и панель начнет совершать возмущенное движение с прогибом $w(x, y, t)$, положительное значение которого определяется осью w на фиг. 1. Считая панель тонкой и изотропной, используем для описания ее малых прогибов $w(x, y, t)$ уравнение изгиба пластинки

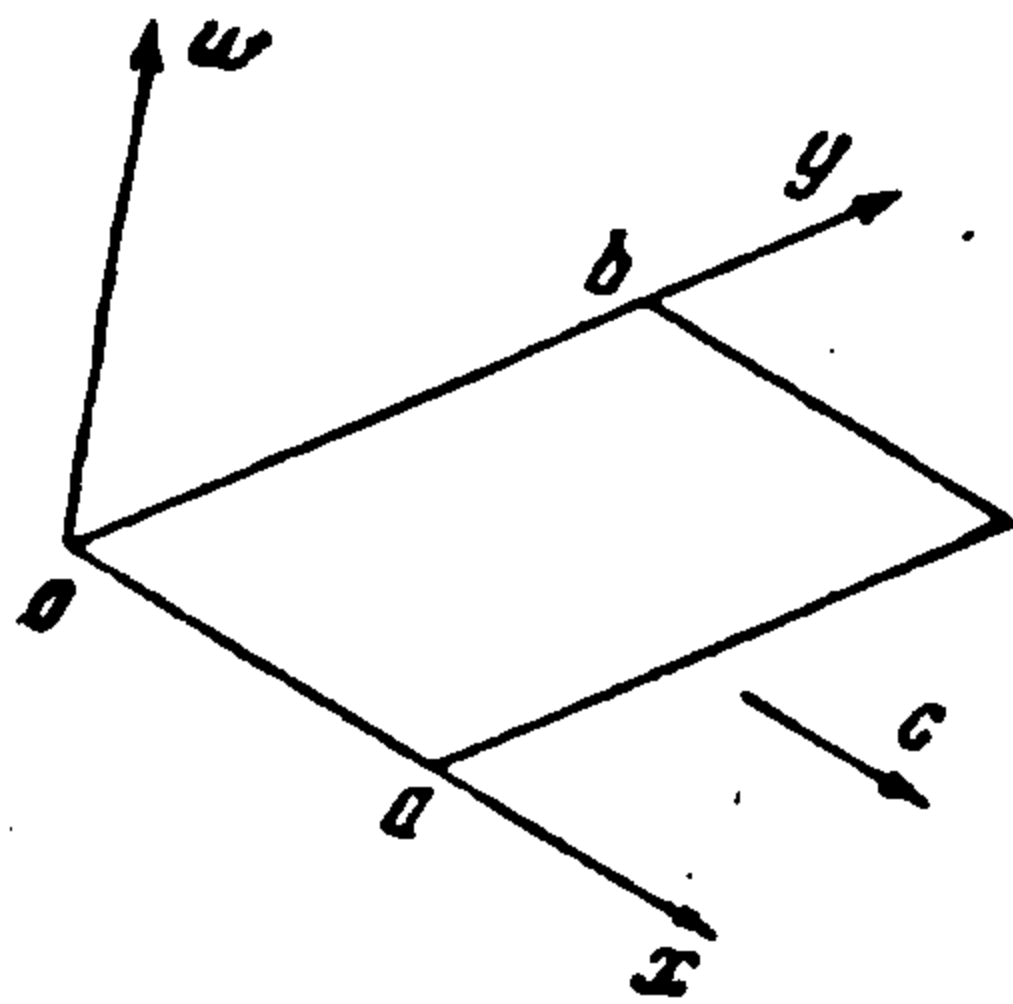
$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

где $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ — жесткость панели, h — ее толщина, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала панели, μ — масса, приходящаяся на единицу площади панели, q — поперечная нагрузка, усилия

¹ Доложена на III-м Всесоюзном математическом съезде в Москве в июне 1956 г.

N_1, N_2 , являющиеся результатом нагрева или каких-либо других причин, предполагаются постоянными во всей панели и не меняющимися с изменением прогиба $w(x, y, t)$.

Прогиб $w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность панели со стороны газа, в котором движется тело, и избыточное давление $\Delta p'$ на нижнюю поверхность со стороны среды, примыкающей к панели изнутри тела:



Фиг. 1

$$\Delta p = -\frac{p_0 \kappa}{c_0} \left(c \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

$$\Delta p' = -\left(k_1 w + k_2 \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

Здесь p_0, c_0 — давление и скорость звука в газе на бесконечности, κ — показатель политропы, k_1 и k_2 — неотрицательные числа, характеризующие свойства среды. Поперечная нагрузка q является результатом указанных давлений, $q = \Delta p' - \Delta p$.

В дальнейшем вместо x, y, w применяются величины $x/a, y/b, w/a$, для которых сохранены обозначения x, y, w .

При сделанных допущениях для опертой по всему контуру панели получаются следующие уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{a^4}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{a^2 N_1}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{a^4 N_2}{b^2 D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{a^3 p_0 \kappa c}{D c_0} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + \frac{a^4}{D} \left[\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{p_0 \kappa}{c_0} + k_2 \right) \frac{\partial w}{\partial t} + k_1 w \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$w(0, y, t) = \frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial x^2} = w(1, y, t) = \frac{\partial^2 w(1, y, t)}{\partial x^2} = 0$$

$$w(x, 0, t) = \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} = w(x, 1, t) = \frac{\partial^2 w(x, 1, t)}{\partial y^2} = 0$$

Для получения достаточных признаков неустойчивости невозмущенного движения рассмотрим класс решений¹

$$w(x, y, t) = X(x) \sin n\pi y e^{\omega t} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

где $\omega = p + iq$ — комплексное число, $X(x) = |X(x)| e^{i\psi(x)}$ — комплексная функция вещественной величины x . Подставляя (1.2) в (1.1) и вводя обозначения

$$n_1 = \frac{a^2 N_1}{\pi^2 D}, \quad n_2 = \frac{a^2 N_2}{\pi^2 D}, \quad k = \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{1}{2} n_1 \quad (1.3)$$

$$A = \frac{a^3 p_0 \kappa c}{D c_0}, \quad B = \frac{p_0 \kappa}{c_0} + k_2, \quad \lambda = -\frac{a^4}{D} (\mu \omega^2 + B \omega)$$

$$d = \pi^4 \left[\frac{1}{4} n_1^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} (n_1 - n_2) \right] - \frac{a^4 k_1}{D}, \quad \lambda^0 = \lambda + d$$

¹ Комплексному решению (1.2) соответствуют действительные собственные движения панели с прогибами

$$w(x, y, t) = |X(x)| \sin n\pi y e^{pt} \frac{\cos}{\sin} [\psi(x) + qt]$$

Само решение (1.2) называется в дальнейшем комплексным собственным движением

находим, что функция (1.2) является решением исходной задачи (1.1) тогда и только тогда, когда $X(x)$ является собственной функцией краевой задачи

$$X^{IV} - 2k\pi^2 X'' + k^2\pi^4 X - AX' = (\lambda + d)X = \lambda^0 X \quad (1.4)$$

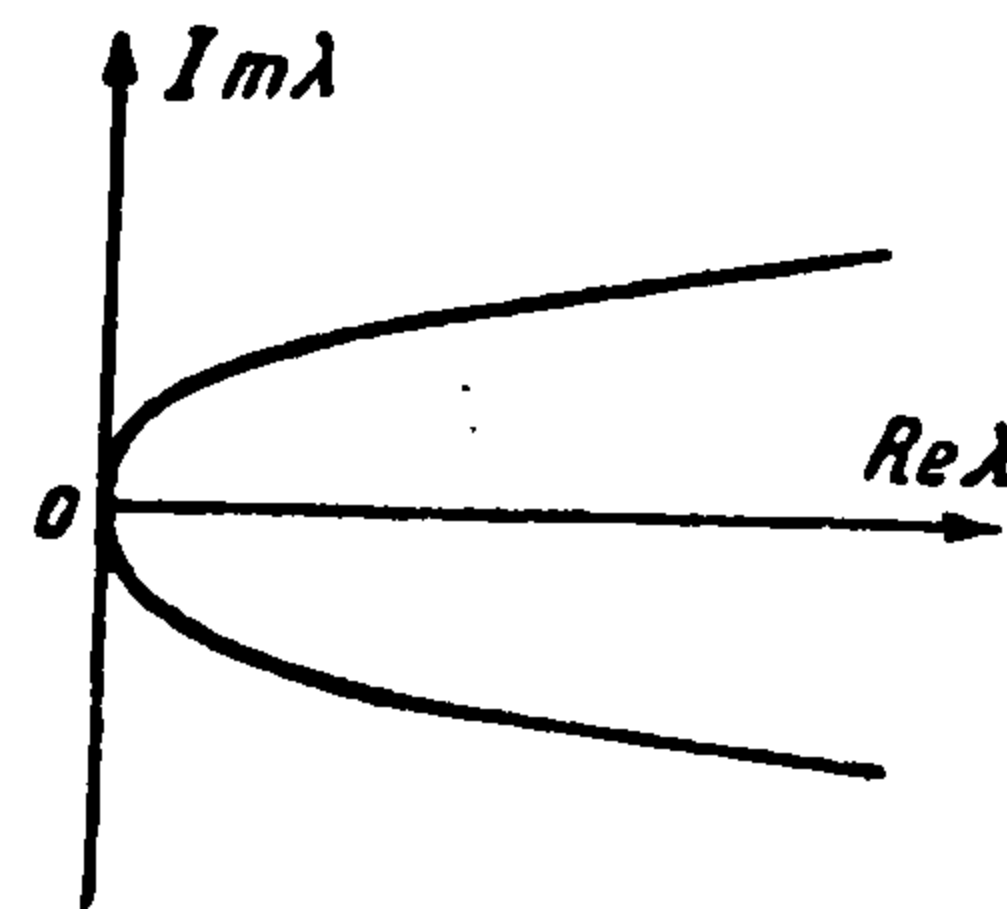
$$X(0) = X''(0) = X(1) = X''(1) = 0$$

а комплексная частота ω определяется формулой

$$\omega = -\frac{B}{\mu} \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{B^2 - \frac{D\mu\lambda}{a^4}} \quad (1.5)$$

В дальнейшем величину A в уравнении (1.4) будем называть приведенной скоростью невозмущенного движения панели, λ и λ^0 — собственными значениями.

Комплексные частоты (1.5) обозначим ω и ω' так, чтобы выполнялось $\operatorname{Re} \omega' \leq \operatorname{Re} \omega$. Частота ω' имеет отрицательную вещественную часть при любом λ , а для частоты ω выполняется $\operatorname{Re} \omega < 0$, $\operatorname{Re} \omega = 0$, или $\operatorname{Re} \omega > 0$ в зависимости от того, находится ли λ внутри, на или вне параболы (фиг. 2):



Фиг. 2

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{D\mu}{a^4 B^2} (\operatorname{Im} \lambda)^2 \quad (1.6)$$

Таким образом, собственному значению λ краевой задачи (1.4) соответствуют два комплексных собственных движения $w'(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$, первое из которых затухает с течением времени, а второе затухает, имеет неизменную амплитуду или неограниченно отклоняется в зависимости от того, находится ли λ внутри, на или вне параболы (1.6). Параболу (1.6) назовем параболой устойчивости.

Для каждого $k = n^2 a^2 / b^2 + 0.5n_1$, $n = 1, 2, \dots$, уравнения (1.4) определяют свою краевую задачу. Рассматривая множество собственных значений всех таких краевых задач, назовем степень неустойчивости невозмущенного движения панели число s собственных значений λ , расположенных вне параболы устойчивости. Очевидно, неравенство $s > 0$ означает, что имеются собственные движения панели, амплитуда которых растет с течением времени неограниченно; равенство $s = 0$ означает отсутствие собственных движений панели с нарастающей амплитудой¹.

2. Собственные значения краевой задачи. Характеристическое уравнение

$$F(k, A, \lambda^0) = 0 \quad (2.1)$$

связывающее величины k , A с собственными значениями λ^0 , можно

¹ Здесь не утверждается, что при $s = 0$ невозмущенное движение устойчиво. Если, кроме собственных движений (1.2), рассматривать «присоединенные движения» вида

$$[X_1(x) + tX(x)] \sin n\pi y e^{\omega t}, \quad \left[X_2(x) + tX_1(x) + \frac{1}{2} t^2 X(x) \right] \sin n\pi y e^{\omega t}, \dots$$

которые могут появиться для кратных λ^0 , то может оказаться, что и при $s = 0$ имеются отклоняющиеся возмущенные движения (это возможно тогда, когда кратное λ находится на параболе устойчивости).

получить способом, обсужденным в [6]. Применение переменных α , β работы [6] упрощает исследования и приводит к уравнениям¹

$$F(k, \alpha, \beta) \equiv \frac{\alpha^2 (\operatorname{ch} 2\alpha - \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2} \cos \beta)}{(\beta^2 - 3\alpha^2 + k\pi^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(\beta^2 - \alpha^2 + k\pi^2)^2 + 2\alpha^2(\alpha^2 - k\pi^2)}{(\beta^2 - 3\alpha^2 + k\pi^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2}}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2}} \frac{\sin \beta}{\beta} = 0 \quad (2.2)$$

$$A = 4\alpha(\beta^2 - \alpha^2 + k\pi^2) \quad (2.3)$$

$$\lambda^\circ = k^2\pi^4 + (\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 - 3\alpha^2 + 2k\pi^2) \quad (2.4)$$

Характеристическая система двух уравнений (2.2), (2.3), в которой k , A считаются заданными, а α , β искомыми, обладает тем свойством, что каждому ее решению

$$\alpha = \alpha(k, A), \quad \beta = \beta(k, A) \quad (2.5)$$

соответствует по формуле (2.4) собственное значение

$$\lambda^\circ = \lambda^\circ(k, A) \quad (2.6)$$

т. е. решение уравнения (2.1); каждому собственному значению (2.6) соответствует несколько решений (2.5) характеристической системы. При фиксированном k и меняющемся A решения (2.5), (2.6) можно трактовать как кривые, которые назовем ветвями. Используя аналитические свойства уравнений (2.1) — (2.4), можно показать, что ветви (2.5), (2.6) непрерывны и «неуничтожимы», если их рассматривать как в вещественной, так и в комплексной областях [6].

Элементарный анализ характеристической системы показывает, что при $A = 0$ все собственные значения λ° даются формулами

$$\lambda^\circ = \pi^4(m^2 + k)^2 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

причем каждое собственное значение (2.7) [дает начало некоторой ветви (2.6). Отсюда и из свойств неуничтожимости следует существование счетного множества непрерывных ветвей

$$\lambda^\circ = \lambda_m^\circ(k, A) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

которые нумеруем таким образом, чтобы ветвь (2.8) с номером m проходила при $A = 0$ через точку (2.7) с тем же номером m .

Докажем, что при любом фиксированном k и $A \neq 0$ всякое вещественное собственное значение $\lambda^\circ(k, A)$ строго больше наименьшего собственного значения $\lambda^\circ(k, 0)$, имеющегося при $A = 0$. Умножая уравнение (1.4) на $\bar{X}(x)$ и интегрируя по частям с использованием граничных условий, легко получить соотношение

$$\lambda^\circ(k, A) = (k^2\pi^4 J_0 + 2k\pi^2 J_1 + J_2 - AJ_3) : J_0$$

$$J_0 = \int_0^1 dx X \bar{X}, \quad J_1 = \int_0^1 dx \frac{dX}{dx} \frac{d\bar{X}}{dx}, \quad J_2 = \int_0^1 dx \frac{d^2 X}{dx^2} \frac{d^2 \bar{X}}{dx^2}, \quad J_3 = \int_0^1 dx \frac{dX}{dx} \bar{X}$$

¹ Существование флаттера панелей доказано нами при помощи уравнений (2.2), (2.3), (2.4) в диссертации «Некоторые вопросы колебаний пластинки, движущейся в газообразной среде», МГУ, июнь 1954 г. Часть результатов, полученных в диссертации, опубликована в Трудах Института механики АН СССР, выпуск 1, 1955 г., Издательство АН СССР, изданных ограниченным тиражом.

связывающее собственное значение $\lambda^\circ(k, A)$ с соответствующей собственной функцией $X(x)$. Отсюда

$$\operatorname{Re} \lambda^\circ(k, A) = (k^2 \pi^4 J_0 + 2k \pi^2 J_1 + J_2) : J_0, \quad |\operatorname{Im} \lambda^\circ(k, A)| = |AJ_3| : J_0$$

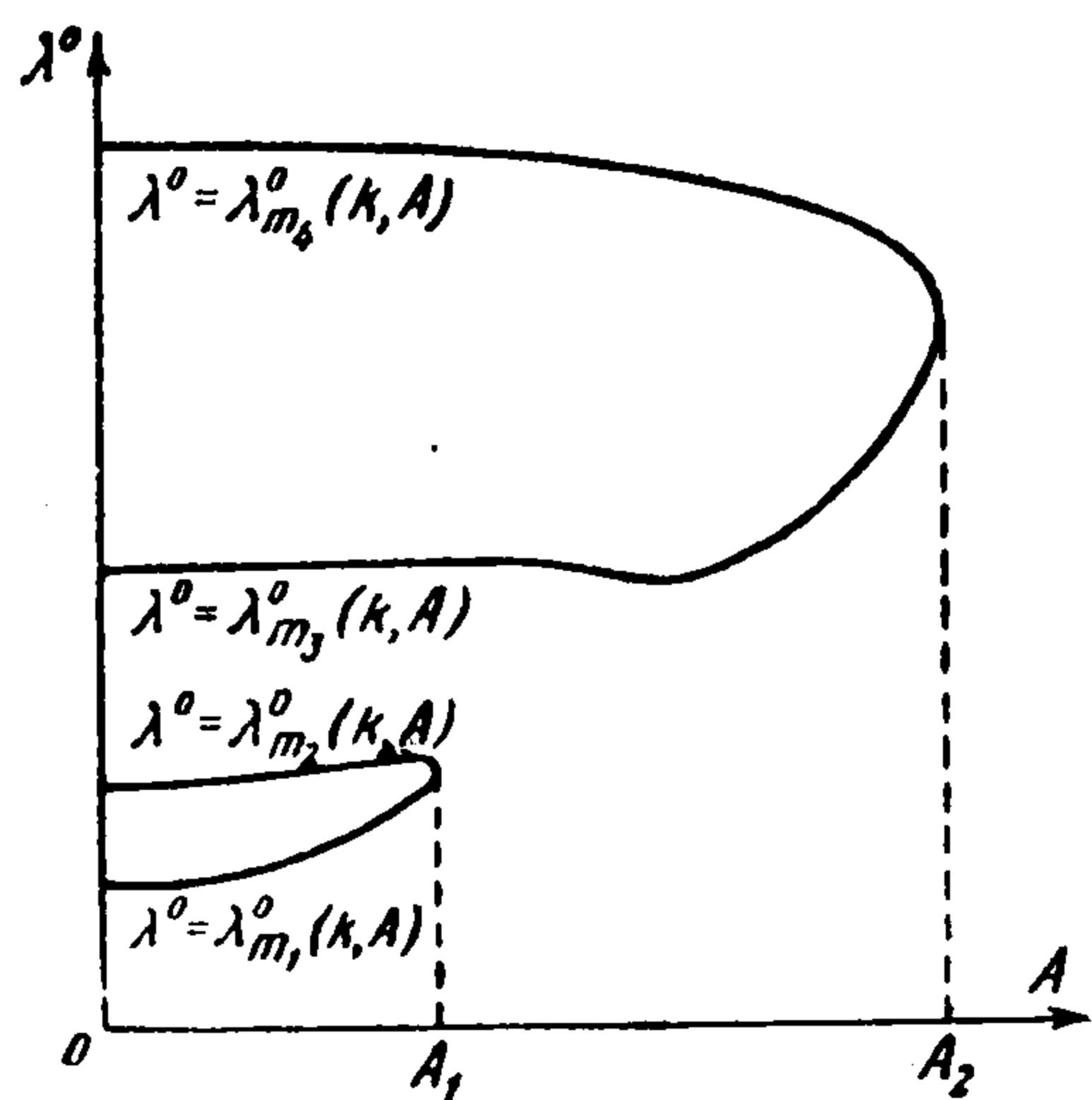
В классе функций $X(x)$, непрерывных вместе с производными четвертого порядка и удовлетворяющих граничным условиям (1.4), минимум $\operatorname{Re} \lambda^\circ(k, A)$ равен минимуму по m $\min_m \pi^4 (m^2 + k)^2$ и достигается для решения $X(x) = \sin m \pi x$ краевой задачи (1.4) при $A = 0$; для всякого решения при $A \neq 0$ выполняется строгое неравенство

$$\operatorname{Re} \lambda^\circ(k, A) > \min_m \pi^4 (m^2 + k)^2 = \min_m \lambda_m^\circ(k, 0) \quad (2.9)$$

Отсюда и следует доказываемое.†

Рассмотрение вещественной плоскости α , β и линий, определяемых на ней уравнениями (2.2) — (2.4), позволяет без выполнения каких-либо приближенных расчетов установить следующее.

Для любого фиксированного значения A и для достаточно больших m все точки ветвей $\lambda^\circ = \lambda_m^\circ(k, A)$ вещественны и положительны, причем с ростом m они асимптотически приближаются к собственным значениям (2.7), имеющимся при $A = 0$; для любого фиксированного A и для достаточно больших k все точки ветвей $\lambda^\circ = \lambda_m^\circ(k, A)$, $m = 1, 2, \dots$ вещественны и положительны, причем с ростом k они асимптотически приближаются к собственным значениям (2.7), имеющимся при $A = 0$.



Фиг. 3

Существует на вещественной плоскости A , λ° счетное множество изолированных один от другого овалов l_{mk} конечной протяженности (на фиг. 3 показаны части этих овалов в правой полуплоскости), состоящих из вещественных кусков ветвей (2.8). В общем случае прямая $A = 0$ пересекает каждый овал в каких-либо двух точках (2.7). Для некоторых отрицательных значений $k \leq -2.5$ какой-либо из овалов может стягиваться в точку, лежащую на оси $A = 0$ (например, нижний овал при $k = -2.5, -6.5, -12.5, \dots$, второй овал при $k = -8.5, -14.5, \dots$). При $m^2 > -0.5k$ на каждом из овалов l_{mk} находится точка

$$\begin{aligned} \lambda_m^{\circ'}(k) &= \pi^4 \left[(m^2 + k)^2 + \frac{1}{3} (5m^2 + k)^2 \right] \\ A_m'(k) &= \frac{8}{3\sqrt{3}} \pi^3 (5m^2 + k) \sqrt{2m^2 + k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

соответствующая решению $\alpha = \pi \sqrt{(2m^2 + k)/3}$, $\beta = 2m\pi$ характеристической системы.

Докажем существование комплексных собственных значений λ° в исследуемой краевой задаче. Пусть $A_m = A_m(k)$ есть верхняя грань тех значений A , при которых овал l_{mk} имеет вещественные пересечения с прямыми $A = \text{const}$. Рассмотрим какой-нибудь из этих овалов, причем для простоты предположим, что это нижний овал и что в некоторой окрестности значения $A = A_1$ для $A < A_1$ части овала образованы двумя ветвями:

$$\lambda^\circ = \lambda_{m_1}^\circ(k, A), \quad \lambda^\circ = \lambda_{m_2}^\circ(k, A) \quad (2.11)$$

При $A = A_1$ ветви (2.11) пересекаются в точке (A_1, λ_1°) . В ее окрестности уравнение (2.1) представимо в виде

$$F(k, A, \lambda^\circ) \equiv [(\lambda^\circ - \lambda_1^\circ)^2 - 2\varphi_1(k, A)(\lambda^\circ - \lambda_1^\circ) + \varphi_2(k, A)]\Phi(k, A, \lambda^\circ) = 0$$

где аналитическая функция $\Phi(k, A, \lambda^\circ)$ не обращается в нуль в рассматриваемой окрестности, а аналитические функции $\varphi_1(k, A)$, $\varphi_2(k, A)$ обращаются в нуль при значении $A = A_1$. Отсюда для ветвей (2.11) получается представление

$$\lambda^\circ = \varphi_1(k, A) \pm \sqrt{\varphi_1^2(k, A) - \varphi_2(k, A)} + \lambda_1^\circ \quad (2.12)$$

доказывающее существование ветвей (2.11) в некоторой окрестности значения $A = A_1$ также и для $A > A_1$. Поскольку в силу определения чисел $A_m = A_m(k)$ в окрестности значения $A = A_1$ для $A > A_1$ ветви (2.11) не могут быть вещественными, они комплексны¹.

В тех случаях, когда овал стягивается в точку ($A_m = 0$), комплексные собственные значения λ° имеются при сколь угодно малом $A \neq 0$. Например, при $k = -8.5$, когда второй овал стягивается в точку, ветви $\lambda^\circ = \lambda_{m_3}^\circ(k, A)$, $\lambda^\circ = \lambda_{m_4}^\circ(k, A)$ комплексны при сколь угодно малом $A \neq 0$. Этот пример показывает, между прочим, что при монотонном росте A комплексными могут стать впервые не обязательно те ветви, которые дают наименьшие вещественные собственные значения.

Учитывая неравенство $A_m(k) \geq A_m'(k)$, можно показать, что для данного $k > -2$ и для любого A из промежутка

$$0 \leq A \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} \pi^3 (5 + k) \sqrt{2 + k} \quad (2.13)$$

все собственные значения $\lambda_m^\circ(k, A)$, $m = 1, 2, \dots$ вещественны.

Вещественные части ветвей, образующих овалы l_{1k} , l_{2k} , ..., а также комплексные части этих ветвей могут быть построены по точкам, нахождение которых методом последовательных приближений не представляет принципиальных затруднений. Для ряда значений k из промежутка $-16 \leq k \leq 16$ такие расчеты были выполнены, и для обработки их результатов было использовано представление (2.12). При этом для всех рассмотренных k оказалось возможным подобрать такие значения постоянных $a_1 = a_1(k)$, $b_1 = b_1(k)$, что выражение

$$\lambda^\circ = a_1(A^2/A_1^2 - 1) \pm b_1 \sqrt{1 - A^2/A_1^2} + \lambda_1^\circ \quad (2.14)$$

полученное из (2.12) при

$$\varphi_1 = a_1(A^2/A_1^2 - 1), \quad \varphi_2 = \varphi_1^2 + b_1^2(A^2/A_1^2 - 1)$$

с достаточной для практических расчетов точностью аппроксимирует ветви (2.11), образующие нижний овал l_{1k} , равномерно на всем промежутке $0 \leq A \leq A_1$, а также в некотором промежутке $A_1 < A \leq A_1^*$, где A_1^* определяется условиями точности. Иллюстрацией к сказанному является приведенная ниже таблица, где для $k = -1$ даны истинные величины собственных значений (2.11), а под ними для сравнения приведены значения, найденные при помощи (2.14). Из таблицы видно, что в данном случае при не очень точных расчетах заведомо можно считать $A_1^* \sim 2A_1$.

¹ Обозначая краевую задачу (1.4) кратко $L_4(X) = 0$, можно показать, что $X_1 \equiv \operatorname{Re} X$ и $X_2 \equiv \operatorname{Re} X$ являются решениями одной и той же задачи: $L_8(X_1) = 0$, $L_8(X_2) = 0$. Авторы работы [4] делают отсюда вывод о неизбежности соотношения $X_2 \equiv \mu X_1$, где μ — какое-нибудь число. Из этого вытекает вещественность (с точностью до числового множителя) любой собственной функции краевой задачи (1.4) и невозможность комплексных собственных значений. В приведенном рассуждении недоказанной является неизбежность соотношения $X_2 \equiv \mu X_1$. Любопытно отметить, что для случая мембраны все собственные значения соответствующей краевой задачи вещественны.

A	0	50	100	150	A	190.95	200	250	300	400	500
λ°	877	867	834	760	Re λ°	519.5	528	578	714	800	1011
	877	867	834	760		519.5	527	577	711	794	995
λ°	0	20.7	86.6	216	Im λ°	0	137	374	635	826	1104
	0	20.9	87.2	217		0	136	370	673	807	1061

Входящие в (2.14) число b_1 и комбинация $(\lambda_1^\circ - a_1)$ находятся немедленно:

$$b_1 = \frac{1}{2} [\lambda_{m_2}^\circ(k, 0) - \lambda_{m_1}^\circ(k, 0)], \quad \lambda_1^\circ - a_1 = \frac{1}{2} [\lambda_{m_2}^\circ(k, 0) + \lambda_{m_1}^\circ(k, 0)] \quad (2.15)$$
поскольку известны ординаты $\lambda_{m_1}^\circ(k, 0)$, $\lambda_{m_2}^\circ(k, 0)$ точек пересечения овала l_{1k} с прямой $A=0$. Выражение (2.14) становится определенным, если, кроме (2.15), известна пара чисел A_1 , λ_1° (координаты самой правой точки овала) или A_1 , a_1 .

При $k \geq -4$ значение чисел A_1 , a_1 с достаточной для практических расчетов точностью дается формулами

$$A_1^2 = \frac{8\pi^6}{243} \frac{(5+2k)^2}{10-k} [9\sqrt{8161+1640k+40k^2} + 679 - 20k - 20k^2] \quad (2.16)$$

$$a_1 = \frac{5\pi^4}{54} (5+2k)^2$$

В каждой конкретной задаче параметр k пробегает последовательность значений $k = n^2 a^2 / b^2 + 0.5n_1$, $n = 1, 2, \dots$. Фиксируя n , мы фиксируем k , а также те ветви $\lambda^\circ = \lambda_m^\circ(k, A)$, $m = 1, 2, \dots$, которые имеются при этом k . В дальнейшем ветви, соответствующие фиксированному номеру n , будем обозначать $\lambda^\circ = \lambda_{mn}^\circ(A)$.

3. Степень неустойчивости и критические скорости. Собственным значениям λ_{mn}° по формуле (1.3) отвечают собственные значения

$$\lambda_{mn}(A) = \lambda_{mn}^\circ(A) - \pi^4 \left[\frac{1}{4} n_1^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} (n_1 - n_2) \right] + \frac{a^4 k_1}{D} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

Степень неустойчивости невозмущенного движения панели равна числу собственных значений (3.1), расположенных на комплексной плоскости за пределами параболы устойчивости (1.6). Каждому такому собственному значению, расположенному за пределами параболы устойчивости, соответствует отклоняющееся движение панели: отрицательному λ — дивергентное движение (выпучивание), комплексному λ — флаттерное движение.

При фиксированных значениях параметров, входящих в задачу, за пределами параболы устойчивости может находиться лишь конечное число собственных значений (3.1). Действительно, в силу сведений, полученных об асимптотическом поведении собственных значений $\lambda_{mn}^\circ(A)$, все $\lambda_{mn}(A)$ с достаточно большими номерами m или n вещественны, причем $\lambda_{mn}(A) \rightarrow \lambda_{mn}^\circ(0)$, если хотя бы одно из чисел m или $n \rightarrow \infty$. Из (3.1) при помощи (2.7) получается

$$\lambda_{mn}(0) = \pi^4 \left[\left(m^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} \right)^2 + m^2 n_1 + \frac{n^2 a^2}{b^2} n_2 \right] + \frac{a^4 k_1}{D} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

Отсюда видно, что для достаточно больших m или n собственные значения $\lambda_{mn}(0)$ и стремящиеся к ним $\lambda_{mn}(A)$ положительны и расположены внутри параболы устойчивости. Соответствующие собственные движения панели суть колебания с затухающей амплитудой.

Докажем, что в принятой постановке задачи флаттер панели существует. Для доказательства рассмотрим совокупность параметров

$$n_1, n_2, a/b, a^4 k_1 / D, A \quad (3.2)$$

однозначно определяющую множество собственных значений (3.1). Пусть эта совокупность такова, что среди собственных значений есть комплексные (как установлено ранее, всегда существуют такие A , для которых краевая задача (1.4) имеет комплексные собственные значения). Не меняя параметров (3.2) и, следовательно, расположения собственных значений (3.1) на комплексной плоскости λ , станем увеличивать параметр

$$\frac{\mu D}{a^4 B^2} \equiv \frac{\mu D}{a^4 (\rho_0 x / c_0 + k_2)^2} \quad (3.3)$$

Это достигается, например, путем увеличения массы μ или путем уменьшения коэффициента демпфирования k_2 среды, примыкающей к панели изнутри. С увеличением параметра (3.3) ветви параболы устойчивости (1.6) приближаются к вещественной оси, причем ясно, что каково бы ни было фиксированное комплексное (невещественное) собственное значение, оно при достаточном увеличении параметра (3.3) окажется за пределами параболы устойчивости и соответствующее собственное движение будет флаттерным. Таким образом, каковы бы ни были усилия N_1, N_2 , сжимающие или растягивающие, флаттер панели возможен.

Преыдущие рассуждения дают полезные сведения о влиянии массы μ и демпфирования k_2 : утяжеление панели и уменьшение демпфирования увеличивают опасность флаттера, облегчение панели и увеличение демпфирования уменьшают ее. Заметим, что облегчение панели и увеличение демпфирования не могут уничтожить ее дивергентных собственных движений, а также тех флаттерных движений, которые соответствуют собственным значениям λ с неположительными вещественными частями.

Рассмотрим влияние коэффициента упругого основания k_1 и усилий N_1, N_2 . Как видно из формулы (3.1), увеличение k_1 (при неизменности других параметров) перемещает на комплексной плоскости все собственные значения $\lambda_{mn}(A)$ вправо. При этом степень неустойчивости если и меняется, то лишь в сторону уменьшения. Достаточным увеличением k_1 можно сделать степень неустойчивости равной нулю, устранив опасность всех дивергентных и флаттерных движений. Такой же эффект вызывает увеличение усилия N_2 . Это легко вывести из формулы (3.1), если помнить, что $\lambda_{mn}^0(A)$ не зависит от N_2 . Напротив, уменьшение N_2 вызывает перемещение всех собственных значений $\lambda_{mn}(A)$ влево, что увеличивает опасность возникновения отклоняющихся собственных движений панели. Большое растягивающее усилие N_1 делает степень неустойчивости равной нулю. Действительно, каковы бы ни были фиксированные значения остальных параметров, увеличением N_1 можно вызвать такое увеличение параметра k , что все собственные значения $\lambda_{mn}(A)$ будут вещественными и близкими к $\lambda_{mn}(0)$, которые при достаточно большом k все положительны.

Докажем, что если при $A=0$ сжимающие усилия не превосходят критических усилий выпучивания, то для тех же сжимающих усилий

при любом $A \neq 0$ дивергентные собственные движения невозможны. Доказательство легко получить из неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda_{mn}(A) > \min_m \lambda_{mn}(0) \quad (3.4)$$

являющегося следствием (2.9). В самом деле, из того, что при $A=0$ сжимающие усилия не превосходят критических, следует $\lambda_{mn}(0) \geq 0$, $m, n = 1, 2, \dots$. Но тогда из (3.4) получается $\operatorname{Re} \lambda_{mn}(A) > 0$, $m, n = 1, 2, \dots$, что является достаточным условием отсутствия дивергентных движений. Заметим, что у такой панели отклоняющиеся собственные движения в полете могут быть лишь движениями флаттерного типа. Их нельзя обнаружить статическими исследованиями, так как при статических исследованиях пришлось бы в уравнении (1.4) положить $\lambda(A) = 0$, что ошибочно, ибо противоречит неравенству $\operatorname{Re} \lambda(A) > 0$.

Неравенство (3.4) позволяет также обосновать возможность таких случаев, когда сжатая сверхкритическими усилиями панель, заведомо неустойчивая при $A=0$ ($s > 0$ при $A=0$), не имеет ни дивергентных, ни флаттерных собственных движений при полете с некоторой скоростью $A \neq 0$ ($s = 0$ при $A \neq 0$). Такая возможность случаев «упрочнения» невозмущенного движения с ростом скорости полета будет проиллюстрирована примером.

Используем теперь формулы (2.10) для получения некоторых оценок, а также сведений, относящихся к формам собственных движений. Согласно (2.10) значению приведенной скорости

$$A_{m'n} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \pi^3 \left(5m^2 + n^2 a^2 / b^2 + \frac{1}{2} n_1 \right) \sqrt{2m^2 + n^2 a^2 / b^2 + \frac{1}{2} n_1} \quad (3.5)$$

отвечает наряду с бесконечным множеством других точное решение характеристического уравнения

$$\lambda_{m'n} = \pi^2 \left[\left(m^2 + n^2 a^2 / b^2 + \frac{1}{2} n_1 \right)^2 + \frac{1}{3} \left(5m^2 + n^2 a^2 / b^2 + \frac{1}{2} n_1 \right)^2 \right] - d \quad (3.6)$$

Легко найти соответствующую собственную функцию

$$X_{m'n}(x) = \sin m\pi x \sin (m\pi x + \chi) \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{2m^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2}} x \right) \quad (3.7)$$

$$\chi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ 3^{1/2} \left[2 + \frac{1}{m^2} \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2} \right) \right]^{-1/2} \right\}$$

Можно показать, что при $m=1$ и $k = n^2 a^2 / b^2 + 0.5n_1 \geq -1$ формулы (3.5), (3.6), (3.7) дают имеющиеся для данного n и $A = A_{1'n}$ наименьшее вещественное собственное значение $\lambda_{1'n}$ и соответствующую собственную функцию $X_{1'n}(x)$. Сравним выражения $\lambda_{1'n}$, $X_{1'n}(x)$ с выражениями

$$\lambda_{1n}(0) = \pi^4 \left(1 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{1}{2} n_1 \right)^2 - d, \quad X_{1n}(x) = \sin \pi x$$

дающими для $k \geq -1$ наименьшее вещественное собственное значение $\lambda_{1n}(0)$ и соответствующую собственную функцию $X_{1n}(x)$ при $A=0$. Замечаем, во-первых, факт увеличения $\lambda_{1'n}$ по сравнению с $\lambda_{1'n}(0)$ и, во-вторых, что, в то время как при $A=0$ собственная функция $X_{1n}(x)$ не имеет нулей во внутренних точках интервала $0 < x < 1$, при $A = A_{1'n}$

собственная функция $X_{1n}'(x)$ непременно обращается в нуль во внутренней точке того же интервала. Следовательно, в полете собственные движения панели, отвечающие наименьшим собственным значениям, еще до того, как эти движения станут флаттерными, могут значительно отличаться как формой, так и частотой от тех, которые имеются при нулевой скорости невозмущенного движения. Это особенно важно помнить при применении к флаттерным задачам приближенных методов¹.

Если приведенная скорость невозмущенного движения не превышает A'_{1n} , то, как это вытекает из смысла неравенства (2.13), для тех n , которые удовлетворяют неравенству $n^2 a^2 / b^2 + 0.5 n_1 > -2$, все собственные значения $\lambda_{mn}(A)$, $m = 1, 2, \dots$ вещественны и флаттер соответствующих собственных движений невозможен. Отсюда, принимая во внимание (1.3), получаем формулу «дофлаттерной» скорости

$$c_n' = \frac{c_0 D}{\rho_0 \chi a^3} \frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}} \left(5 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{a^2 N_1}{2\pi^2 D} \right) \sqrt{2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{a^2 N_1}{2\pi^2 D}} \quad (3.8)$$

В ряде случаев формула (3.8) позволяет выявить существенную часть области с нулевой степенью неустойчивости. Например, если $N_2 \geq 0$ (дивергентные собственные движения панели в этом случае отсутствуют), для любой скорости c в промежутке $0 \leq c \leq c_1'$, где c_1' находится из (3.8) при $n = 1$, флаттерные собственные движения невозможны и степень неустойчивости невозмущенного движения равна нулю.

Формула (3.8) позволяет сделать полезное предостерегающее замечание относительно метода расчета панелей, сильно вытянутых в направлении невозмущенного движения. Несколько отступая от принятой постановки задачи, предположим (в этом абзаце), что прямоугольная панель, свободная от усилий в своей плоскости, обтекается газом с двух сторон. Тогда, применяя (3.8) с множителем 0.5 перед правой частью, находим, что как бы велика ни была длина a панели в направлении невозмущенного движения, ее критическая скорость флаттера всегда будет больше, чем

$$c_1' = \frac{\pi^3}{9\sqrt{3}} \frac{c_0 E}{\rho_0 \chi (1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^3 \quad (3.9)$$

С другой стороны, если в исходной задаче панель считать заранее бесконечно длинной и не поставить на бесконечно удаленном конце панели никакого условия, кроме условия произвольной малости начальных возмущений, то для нее можно доказать существование флаттерных движений, когда скорость превосходит величину

$$c = \pi \sqrt{\frac{E}{3(1 - \nu^2)\rho}} \frac{h}{b} \quad \left(\rho = \frac{\mu}{h} \right) \quad (3.10)$$

Значение (3.10) может быть меньше, чем значение (3.9), что свидетельствует о неприменимости формулы (3.10) для ограниченных панелей.

¹ В связи с применением приближенных методов полезно также помнить, что в соответствии с результатами п. 2 при наличии достаточного сжимающего усилия с монотонным ростом A комплексные собственные значения и флаттер могут появиться впервые не у тех ветвей $\lambda = \lambda_{mn}(A)$, которые при $A = 0$ дают наименьшие собственные значения.

Приведенный пример показывает, что результаты, полученные путем рассмотрения теоретически бесконечных по направлению невозмущенного движения панелей, цилиндров и т. п., далеко не всегда приложимы к случаю конечных размеров, даже если эти размеры достаточно велики.

Все выясненные до сих пор особенности поведения панели в потоке получены путем качественного исследования точной характеристической системы (2.2), (2.3) без каких-либо ссылок на результаты численных расчетов. В дальнейших выводах, относящихся к ветвям $\lambda = \lambda_{m_1 n}(A)$, $\lambda = \lambda_{m_2 n}(A)$, дающим для каждого фиксированного n наименьшие собственные значения, будет использовано представление этих ветвей приближенной формулой (2.14), из которой получается

$$\lambda = a_1 \left(\frac{A^2}{A_1^2} - 1 \right) \pm r \sqrt{a_1 \left(1 - \frac{A^2}{A_1^2} \right) + \lambda_1} \quad \left(r^2 = \frac{b_1^2}{a_1}, \quad \lambda_1 = \lambda_1^0 - d \right) \quad (3.11)$$

При любом A из промежутка $0 \leq A \leq A_1$ собственные значения (3.11) вещественны. В этом промежутке критическими являются такие значения A , при переходе через которые одно из собственных значений (3.11) меняет знак. Эти значения A , называемые критическими скоростями дивергенции, обращают в нуль правую часть (3.11) и легко определяются:

$$A_{\text{div}}^2 = A_1^2 \left[1 - (r \pm \sqrt{r^2 + 4\lambda_1})^2 : 4a_1 \right]$$

Отсюда

$$c_{\text{div}} = \frac{c_0 D A_1}{\rho_0 \chi a^3} \sqrt{1 - (r \pm \sqrt{r^2 + 4\lambda_1})^2 : 4a_1} \quad (3.12)$$

При $A > A_1$ формула (3.11) дает комплексные сопряженные значения

$$\lambda = a_1 (A^2/A_1^2 - 1) \pm ir \sqrt{a_1 (A^2/A_1^2 - 1) + \lambda_1} \quad (3.13)$$

располагающиеся на комплексной плоскости вдоль параболы второй степени

$$\text{Re } \lambda = \frac{1}{r^2} (\text{Im } \lambda)^2 + \lambda_1 \quad (3.14)$$

В промежутке $A_1 < A < A_1^*$, где выражение (3.13) с достаточной точностью аппроксимирует куски ветвей $\lambda = \lambda_{m_1 n}(A)$, $\lambda = \lambda_{m_2 n}(A)$, критическим является такое значение A , при переходе через которое собственные значения (3.13) пересекают параболу устойчивости (1.6). Это значение, называемое критической скоростью флаттера, находится из условия пересечения парабол (1.6) и (3.14):

$$A_{fl}^2 = A_1^2 \left[1 + \frac{\lambda_1}{a_1 (R - 1)} \right] \quad \left(R = \frac{r^2 D \mu}{a^4 B^2} \right)$$

Отсюда

$$c_{fl} = \frac{c_0 D A_1}{\rho_0 \chi a^3} \sqrt{1 + \frac{\lambda_1}{a_1} : \left[\frac{D \mu r^2}{a^4 B^2} - 1 \right]} \quad (3.15)$$

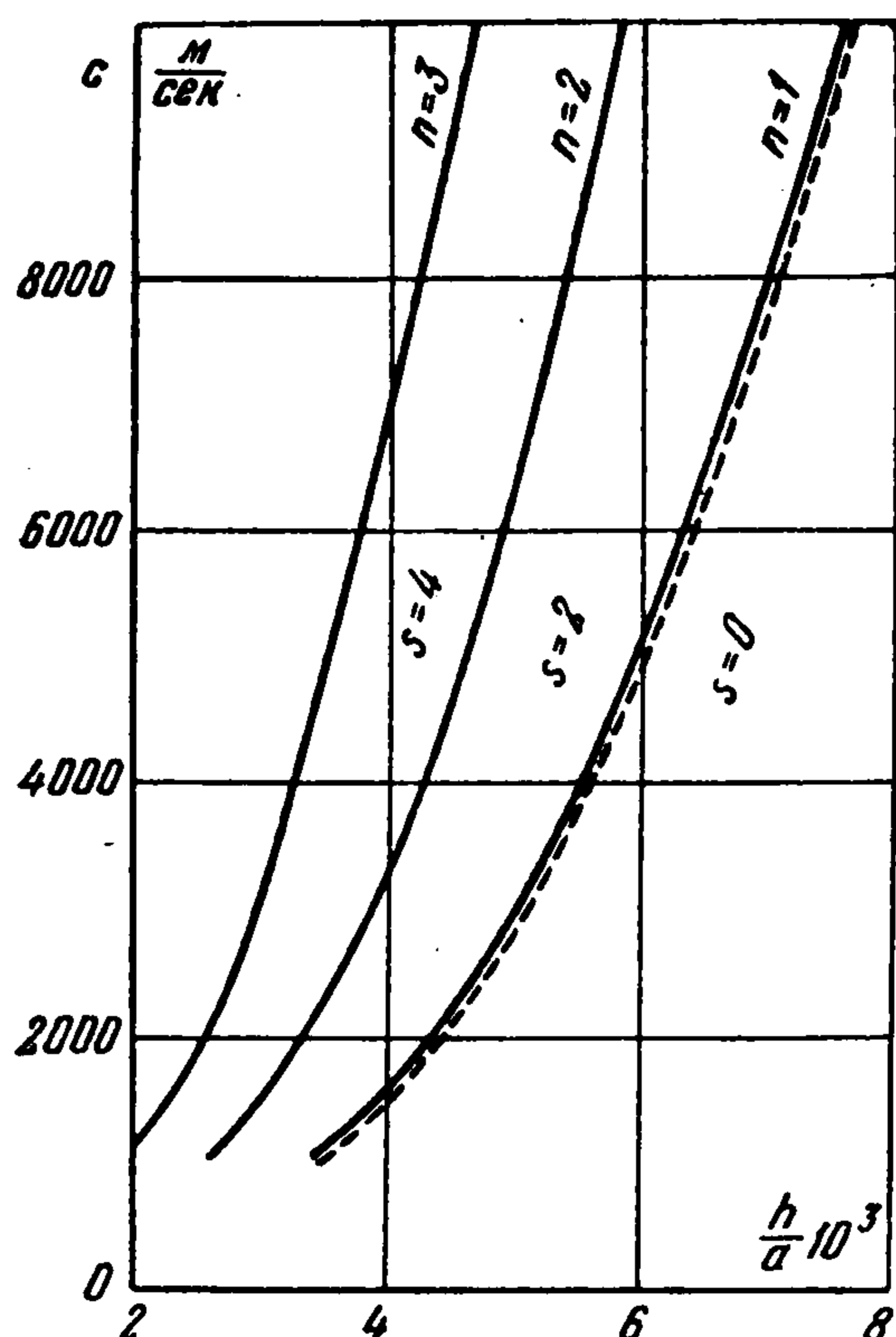
Каждому $n = 1, 2, \dots$ отвечает определенное значение величин A_1 , a_1 , λ_1 , r , зависящих лишь от аргумента $k = n^2 a^2 / b^2 + 0.5 n_1$, и, следовательно, определенное значение критической скорости флаттера (3.15) (разумеется, если значение (3.15) вещественно).

Опуская за недостатком места подробное истолкование различных возможностей, возникающих при применении формул (3.12), (3.15), приведем лишь примеры, дающие некоторое представление о порядках критических скоростей. Во всех примерах принимаются следующие значения постоянных:

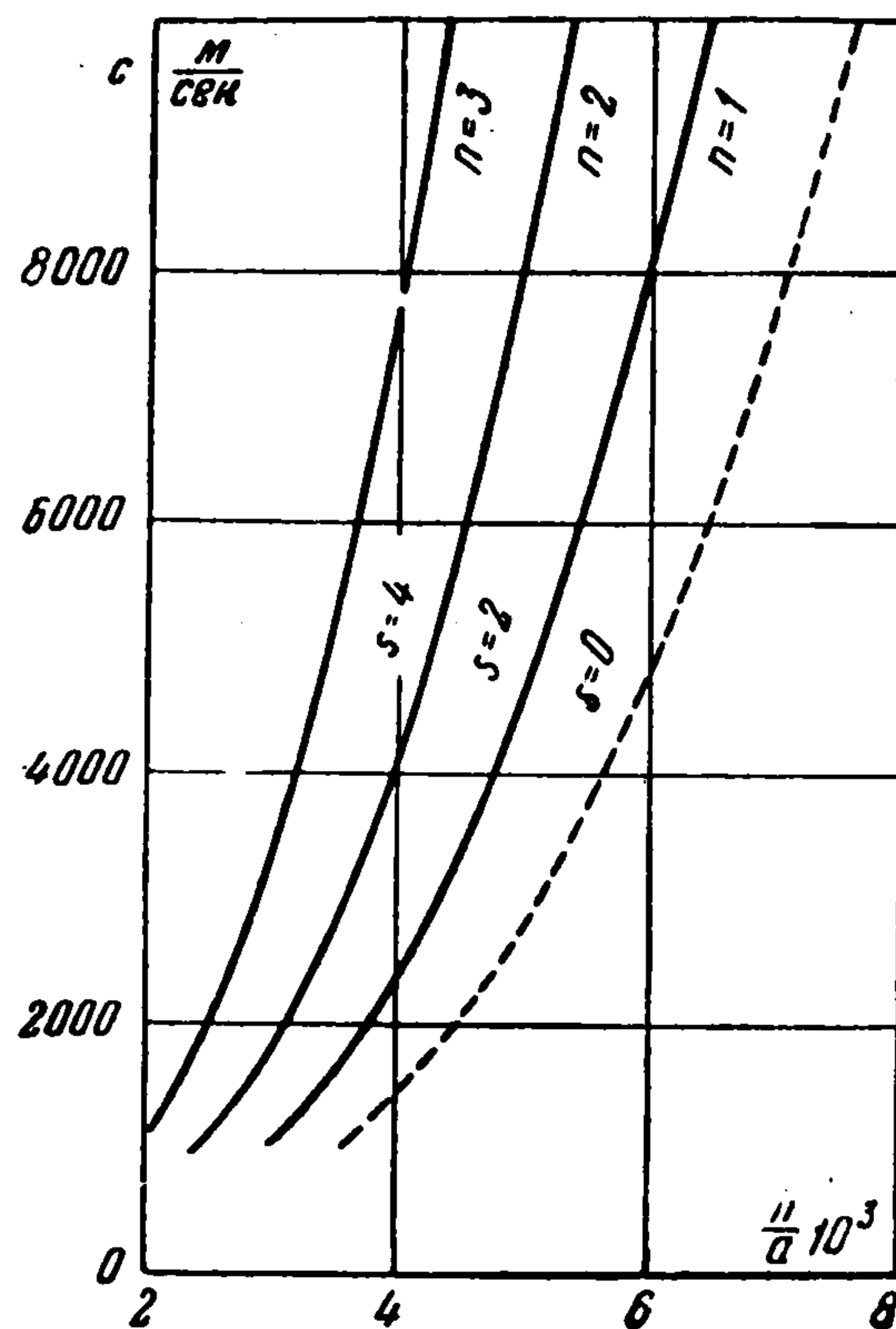
$$\begin{aligned} \nu &= 0.3 & \chi &= 1.4 & k_1 &= 0 \\ E &= 2.1 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^2 & \rho_0 &= 103 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3 & B &= 2\rho_0 \chi / c_0 \\ \frac{\mu}{h} &= 7.8 \text{ г/см}^3 & c_0 &= 340 \text{ м/сек} \end{aligned}$$

Пример 1. Квадратная панель ($a = b$), свободная от усилий в своей плоскости ($N_1 = N_2 = 0$). Результаты представлены графически сплошными линиями фиг. 4, изображающими для $n = 1, 2, 3$ зависимость критической скорости флаттера (3.15) в м/сек от величины отношения h/a . Пунктирная линия дает значение дофлаттерной скорости c_1' , найденной по формуле (3.8). В областях, ограниченных сплошными кривыми, указана степень неустойчивости s . Для панели толщиной $h = 5 \cdot 10^{-3}a$ имеем, например,

$$s(0 \leq c \leq 2900) = 0, \quad s(2900 < c \leq 6300) = 2, \quad s(6300 < c \leq 13300) = 4$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Пример 2. Квадратная панель ($a = b$) толщиной $h = 5 \cdot 10^{-3}a$, сжатая усилиями $N_1 = -4\pi^2 D/a^2$, $N_2 = -\pi^2 D/a^2$. При $c = 0$ такая панель заведомо неустойчива, выпучиваясь при малейшем начальном возмущении. Выпучивание становится невозможным после достижения критической скорости дивергенции $c_{div} = 600$ м/сек, найденной из (3.12) при $n = 1$. Формула (3.15) дает для $n = 1, 2, 3$ критические скорости флаттера 1100, 4000, 10 500. Степень неустойчивости дается соотношениями

$$s(0 \leq c \leq 600) = 1, \quad s(600 \leq c \leq 1100) = 0, \quad s(1100 < c \leq 4000) = 2 \\ s(4000 < c \leq 10\,500) = 4$$

Сравнивая со случаем панели, свободной от усилий в своей плоскости, видим, что сжимающие усилия не только сделали возможным появление дивергентного собственного движения, но и значительно снизили критические скорости флаттера.

Рассмотренный пример замечателен тем, что в нем неустойчивое состояние покоящейся панели, сжатой сверхкритическими усилиями, оказывается для тех же усилий устойчивым при полете со сверхзвуковой скоростью (из промежутка $600 < c < 1100$).

4. Другие граничные условия. Метод исследования прямоугольной опертой по всему контуру панели переносится без изменения на те случаи, когда две стороны панели, параллельные скорости невозмущенного движения, оперты, а две другие закреплены произвольно или свободны.

В случае, если стороны $x = 0$, $x = a$ заземлены, характеристическое уравнение (2.2) принимает вид:

$$F(k, \alpha, \beta) \equiv \frac{\text{ch } 2\alpha - \text{ch } \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2} \cos \beta}{(\beta^2 - 3\alpha^2 + k\pi^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} + \\ + \frac{k\pi^2 - 3\alpha^2}{(\beta^2 - 3\alpha^2 + k\pi^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \frac{\text{sh } \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2} \sin \beta}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2} \beta} = 0$$

Добавляя к нему соотношения (2.3), (2.4), можно, как и в случае опертой по всему контуру панели, выяснить основные свойства ветвей $\lambda = \lambda_{mn}(A)$: непрерывность и неуничтожимость, асимптотическое поведение ($\lambda_{mn}(A) \rightarrow \lambda_{mn}(0)$ при $m, n \rightarrow \infty$), существование комплексных собственных значений и возможность флаттера, свойство упрочнения движения определяемое неравенством (3.4). (Из результатов^[6] следует, что это свойство в задачах с другими граничными условиями может не выполняться). Остаются в силе выводы о влиянии на степень неустойчивости параметров k_1, N_1, k_2, N_2, μ . Как и прежде, значению приведенной скорости (3.5) отвечает точное решение характеристического уравнения (3.6), причем соответствующая собственная функция имеет вид:

$$X_{mn}'(x) = \sin^2 m\pi x \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{2m^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{n_1}{2}} x\right)$$

Сохраняются также формулы критических скоростей (3.12), (3.15). На фиг. 5 показаны кривые, аналогичные кривым фиг. 4, позволяющие судить о степени неустойчивости квадратных панелей различной толщины, свободных от усилий в своей плоскости. Для панели толщиной $h = 5 \cdot 10^{-3} a$ имеем, например,

$$s(0 \leq c \leq 4600) = 0, \quad s(4600 < c \leq 8100) = 2 \\ s(8100 < c \leq 15200) = 4$$

Сравнивая со случаем панели, опертой по всему контуру, замечаем, что в рассматриваемом примере защемление двух сторон привело к значительному увеличению критических скоростей флаттера.

Поступила 12 VII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Goland M. and Luke Y. L., An Exact Solution for Two-Dimensional Linear Panel Flutter at Supersonic Speeds, J. Aeron. Sc. vol. 21, N 4, pp. 275—276, April, 1954.
2. Hedgereth J. M., Budiansky B., and Leonard R. W., Analysis of Flutter in Compressible Flow of a Panel on Many Supports, J. Aeron. Sc., vol. 21, N 7, p. 475, July, 1954.
3. Fung Y. C., The Static Stability of a Two-Dimensional Curved Panel in a Supersonic Flow, with an Application to Panel Flutter, J. Aeron. Sc., vol. 21, N 8, August, 1954.
4. Ashley H. and Zartarian G., Piston Theory—a New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, Presented at the 24th Annual Meeting, Preprint, January, 1956.
5. Ильюшин А. А., Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, ПММ, т. XX, в. 6, 1956.
6. Мовчан А. А., О колебаниях пластинки, движущейся в газе, ПММ, т. XX, в. 2, 1956.