Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЯХ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

С. С. Григорян

(Москва)

В недавно появившейся работе А. Ю. Ишлинского [1] были даны уравнения, описывающие плоское движение сыпучей среды, и решены некоторые задачи. Одной из главных гипотез, на которые опирается вывод системы уравнений работы [1], является предположение о том, что движение сыпучей среды возникает в момент установления в среде предельного напряженного состояния, которое и сохраняется в процессе последующего движения. Как известно, уравнения статики сыпучей среды замыкаются, кроме случая плоской задачи, и при осесимметричном напряженном состоянии, если сделать предположение о том, что в среде осуществлено полное предельное напряженное состояние [2]. Предположив, следуя А. Ю. Ишлинскому, что движение сыпучей среды возникает в момент установления в среде предельного напряженного состояния, которое сохраняется в процессе последующего движения, можно написать уравнения, описывающие осесимметричное движение сыпучей среды; дополнительной гипотезой, позволяющей замкнуть систему уравнений, как и в случае статической задачи, может быть принято предположение о том, что предельное напряженное состояние является полным. Настоящая заметка посвящена выводу системы уравнений, основанной, кроме прочих, на двух указанных выше гипотезах, и рассмотрению простейших задач.

§ 1. Будем считать, что при осесимметричном движении сыпучей среды выполняются все гипотезы, сформулированные в работе [1], кроме последней, которая заменяется гипотезой о полном предельном напряженном состоянии, характеризующем рассматриваемое движение. Выведем связи, налагаемые на компоненты тензора напряжений этой гипотезой. Рассматривая эти компоненты в цилиндрической системе координат z, r, θ с осью z, совпадающей с осью симметрии напряженного состояния, будем иметь в силу осевой симметрии

$$\tau_{r\theta}=\tau_{z\theta}=0 \tag{1.1}$$

Таким образом, кольцевое напряжение $\sigma_\theta=\sigma_2$ является главным. Для других главных напряжений σ_1, σ_3, лежащих в плоскости rz

$$\sigma_r=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\varphi,\qquad \tau_{rz}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\varphi \tag{1.2}$$
$$\sigma_z=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\varphi,$$

где φ — угол между направлением σ_1 и осью r и $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3>0$. Сделанное выше допущение $\sigma_\theta=\sigma_2$ не является ограничительным, ибо окончательные результаты не зависят от этого предположения.

Считая среду лишенной сцепления, будем иметь условие предельного напряженного состояния в виде

$$|\tau_n|=\sigma_n \operatorname{tg}\rho \tag{1.3}$$

где ρ — угол внутреннего трения.

Требование $\max[|\tau_n|-\sigma_n \operatorname{tg}\rho]=0$ приводит к соотношениям[2]

$$\frac{1}{\cos\rho}\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}-\operatorname{tg}\rho\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{\cos\rho}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}-\operatorname{tg}\rho\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=0 \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{\cos\rho}\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}-\operatorname{tg}\rho\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}=0 \tag{1.6}$$

причем одновременно могут выполняться либо (1.4) и (1.5), либо (1.4) и (1.6), чему соответствуют два полных предельных напряженных состояния[2]. В первом случае имеем $\sigma_2=\sigma_3$, во втором $\sigma_2=\sigma_1$. Таким образом, мы видим, что (поскольку в дальнейшем будем рассматривать лишь полные предельные напряженные состояния) предположение $\sigma_\theta=\sigma_2$ не является ограничительным, ибо все возможные случаи выбора σ_θ сводятся к приравниванию σ_θ к одному из двух главных напряжений, лежащих в плоскости r, z.

Формула (1.4) дает

$$\sigma_1=\frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho}\sigma_3=\frac{1}{k}\sigma_3 \qquad \left(k=\frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho}<1\right) \tag{1.7}$$

Из формул (1.2) имеем

$$\sigma_1=\frac{1}{1+k}(\sigma_r+\sigma_z), \qquad \sigma_3=\frac{k}{1+k}(\sigma_r+\sigma_z) \tag{1.8}$$

и далее

$$\left(\frac{\sigma_r-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{rz}^2=\left(\frac{1-k}{1+k}\frac{\sigma_r+\sigma_z}{2}\right)^2 \tag{1.9}$$

что совпадает с формулой (8) работы[1].

Дополнительным условием, характеризующим полноту предельного напряженного состояния, будет в случаях (1.4), (1.5) и (1.4), (1.6) соответственно

$$\sigma_\theta=\frac{k}{1+k}(\sigma_r+\sigma_z), \qquad \sigma_\theta=\frac{1}{1+k}(\sigma_r+\sigma_z) \tag{1.10}$$

Таким образом, приняв первые три гипотезы А. Ю. Ишлинского[1] и заменив четвертую гипотезой об осуществлении полного предельного напряженного состояния при осесимметричном движении сыпучей среды, получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right)=\rho F_r-\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}-\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}\\
\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=\rho F_z-\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}-\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}-\frac{\tau_{rz}}{r}\\
\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{V_r}{r}=0, \qquad \frac{\partial V_r/\partial z+\partial V_z/\partial r}{\partial V_r/\partial r-\partial V_z/\partial z}=\frac{2\tau_{rz}}{\sigma_r-\sigma_z}\\
\left(\frac{\sigma_r-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{rz}^2=\left(\frac{1-k}{1+k}\frac{\sigma_r+\sigma_z}{2}\right)^2\\
\sigma_\theta=\frac{k}{1+k}(\sigma_r+\sigma_z), \qquad \sigma_\theta=\frac{1}{1+k}(\sigma_r+\sigma_z)
\end{gathered} \tag{1.11}$$

где обозначения не требуют разъяснений.

Рассмотрим примеры осесимметричного движения сыпучей среды.

1. Пусть движение установившееся и происходит параллельно оси z, т. е. $V_r = 0$, и при отсутствии внешних массовых сил. Уравнение неразрывности дает $\partial V_z/\partial z = 0$, четвертое уравнение системы (1.11) превращается в

$$\frac{\partial V_z / \partial r}{0} = \frac{2\tau_{rz}}{\sigma_r - \sigma_z}$$

что может иметь место либо при $\partial V_z / \partial r = 0$, т. е. когда среда движется, как твердое тело, и задача сводится к статической, либо при $\sigma_r - \sigma_z = 0$. В последнем случае имеем

$$\sigma_r = \sigma_z = \sigma, \qquad \tau_{rz} = \frac{1-k}{1+k}\sigma$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1-k}{1+k}\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{1-k}{1+k}\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1-k}{1+k}\frac{\sigma}{r} = 0$$

что дает единственное решение $\sigma \equiv 0$. Для скорости при этом получается $V_z = f(r)$, где $f(r)$ — произвольная функция. Таким образом, в этом случае среда свободна от напряжений и движется концентрическими слоями с произвольным распределением скоростей по радиусу — частный случай более общего возможного движения несвязной среды по инерции.

2. В качестве второго примера рассмотрим плоское движение с цилиндрической симметрией при отсутствии внешних массовых сил. Система уравнений (1.11) переходит в

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) = -\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = 0, \qquad \tau_{rz} = 0$$

$$\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-k}{1+k}\frac{\sigma_r + \sigma_z}{2}\right)^2$$

$$\sigma_\theta = \frac{k}{1+k}(\sigma_r + \sigma_z), \qquad \sigma_\theta = \frac{1}{1+k}(\sigma_r + \sigma_z)$$

Отсюда имеем

$$\sigma_r - \sigma_z = \pm\frac{1-k}{1+k}(\sigma_r + \sigma_z) \quad \text{или} \quad \sigma_r = \frac{1}{k}\sigma_z, \quad \sigma_r = k\sigma_z$$

соответственно с выбором знаков плюс или минус. Для σ_θ это дает

$$\sigma_\theta = k\sigma_r, \qquad \sigma_\theta = \sigma_r, \qquad \sigma_\theta = \frac{1}{k}\sigma_r.$$

Выбор первого и третьего из последних соотношений приводит к задаче о цилиндрическом движении песка, многие варианты которой рассмотрены в работе [1], т. е. в этом случае уравнения плоского и осесимметричного движений сыпучей среды приводят к одинаковым результатам, только осесимметричная трактовка движения дает дополнительное сведение, знание величины σ_z. Выбор же второго из них приводит к задаче цилиндрического движения идеальной несжимаемой жидкости.

§ 2. Движение сыпучей среды со сферической симметрией можно рассматривать как частный случай осесимметричного движения, однако система уравнений, описывающая это движение, может быть получена без дополнительной гипотезы о полноте предельного напряженного состояния, на которую существенно опирается система уравнений осесимметричных движений (1.11) и которая может служить источником сомнений. В самом деле, здесь дополнительные соотношения между компонентами тензора напряжений доставляются просто геометрической симметрией задачи, и система уравнений при прежних гипотезах, кроме гипотезы о полноте предельного напряженного состояния, сводится к следующей (массовые силы отсутствуют):

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{2\sigma_r-(\sigma_\theta+\sigma_\varphi)}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}=0,\qquad \tau_{r\theta}=\tau_{r\varphi}=\tau_{\theta\varphi}=0,\qquad \sigma_\theta=\sigma_\varphi$$

$\sigma_r=k^{-1}\sigma_\theta$ — в случае движения среды от центра симметрии, $\sigma_r=k\sigma_\theta$ — в случае движения среды к центру (по поводу соответствия, устанавливаемого последними утверждениями, см.[1]), т. е. к

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{2(1-k)\sigma_r}{r},\qquad \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}=0 \tag{2.1}$$

при движении от центра симметрии и

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{2(1-1/k)\sigma_r}{r},\qquad \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}=0 \tag{2.2}$$

при движении к центру.

Общими решениями систем (2.1) и (2.2) являются

$$u=\frac{Q(t)}{r^2},\qquad Q(t)\geqslant 0 \tag{2.3}$$

$$\sigma_r=f(t)\,r^{-2(1-k)}+\rho\frac{dQ}{dt}\frac{1}{(2k-1)r}-\rho\frac{Q^2}{(1+k)r^4}$$

$$u=\frac{Q(t)}{r^2},\qquad Q(t)\leqslant 0 \tag{2.4}$$

$$\sigma_r=f(t)\,r^{-2(1-1/k)}+\rho\frac{dQ}{dt}\frac{1}{(2/k-1)r}-\rho\frac{Q^2}{(1+1/k)r^4}$$

соответственно, где $Q(t)$ и $f(t)$ — произвольные функции. В случае $k={}^1/_2$ вторая формула в (2.3) заменяется формулой

$$\sigma_r=\frac{f(t)}{r}-\rho\frac{dQ}{dt}\frac{\ln r}{r}-\frac{2}{3}\rho Q^2\frac{1}{r^4} \tag{2.5}$$

Отметим, что при $k\to 1$ формулы (2.3), (2.4) дают общее решение задачи о центрально-симметричных движениях идеальной несжимаемой жидкости.

Произвольные функции $Q(t)$ и $f(t)$ определяются при решении конкретных краевых задач. В общем случае это задачи о движении сферического слоя (который, в частности, может простираться до бесконечности) с заданными на границах условиями. Такими условиями могут быть следующие.

$$1. \quad \sigma_r(a(t),\ t) = P_a(a(t),\ t) \qquad u(a(t),\ t) = da/dt$$
$$\sigma_r(b(t),\ t) = P_b(b(t),\ t) \qquad u(b(t),\ t) = db/dt$$

где P_a, P_b — известные функции своих аргументов, а $r = a(t)$, $r = b(t)$ — искомые законы движения границ слоя, связанные в силу уравнения неразрывности соотношением $b^3 - a^3 = \text{const}$; в этом случае задача сводится к интегрированию одного обыкновенного уравнения второго порядка для нахождения функции $r = a(t)$. В случае, когда P_a и P_b от t не зависят, это уравнение допускает понижение порядка. Все это показывается аналогично тому, как это сделано для цилиндрического случая в работе[1], поэтому мы на подробностях не останавливаемся, как и не приводим решений для сферического случая всех тех задач, которые рассмотрены в этой работе. Отметим лишь формулы для предельного равновесия сферического слоя, предшествующего движению с расширением или сжатием:

$$P_{b\min} = P_a\left(\frac{a}{b}\right)^{2(1-k)}, \qquad P_{b\max} = P_a\left(\frac{b}{a}\right)^{2\frac{1-k}{k}} \tag{2.6}$$

аналогичные формулам (44) и (45) работы[1].

$$2. \quad \sigma_r(a,\ t) = P_a(a,\ t), \qquad a(t) = A(t)$$
$$3. \quad \sigma_r(a,\ t) = P_a(a,\ t), \qquad b(t) = B(t)$$
$$4. \quad \sigma_r(b,\ t) = P_b(b,\ t), \qquad b(t) = B(t)$$
$$5. \quad \sigma_r(b,\ t) = P_b(b,\ t), \qquad a(t) = A(t)$$

где P_a, P_b, A, B — заданные функции своих аргументов.

Обращаясь вновь к соотношениям (2.3), (2.4), замечаем, что в случае сферической симметрии существуют движения среды, простирающиеся до бесконечности, в отличие от плоского и цилиндрического случаев. Таким же свойством обладают одномерные движения идеальной несжимаемой жидкости. Однако в отличие от несжимаемой жидкости здесь движения, простирающиеся до бесконечности, возможны, вообще говоря, только в том случае, когда давление на бесконечности равно нулю при движении от центра, бесконечности или нулю при движении к центру (см. (2.3), (2.4)).

В силу этого обстоятельства в этом случае непосредственное определение произвольных функций Q и f из граничных условий невозможно, так как граничные условия на бесконечности, выполняясь автоматически, не прибавляют к соотношениям, даваемым условиями на внутренней границе, новых соотношений. Поэтому решение задачи о движении среды, простирающейся в бесконечность, можно искать как предельное решение задачи о движении сферического слоя при стремлении толщины слоя к бесконечности.

Рассмотрим в качестве примера такого движения задачу о движении первоначально свободной от напряжений и покоящейся среды, заполняющей все пространство, вызванном действием давления P_a на границе сферической полости, имеющейся внутри среды. Из формул (2.6) видно, что если бы среда находилась первоначально в равномерно напряженном состоянии, то для создания предельного напряженного состояния в ней (а значит, и движения) давление на границе полости P_a должно быть бесконечным. Если же начальные напряжения отсутствуют, то предельное напряженное состояние может быть создано любым значением давления P_a и, следовательно, возможно возникновение движения. Для выяснения того, при каких условиях движение действительно возникнет и при каких просто будет сохраняться предельное напряженное состояние без движения, рассмотрим аналогичную задачу для сферического слоя с заданными на обеих границах давлениями

$$\sigma_r(a,\ t) = P_a(a,\ t), \quad \sigma_r(b,\ t) = P_b(b,\ t)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — радиусы внутренней и внешней сфер соответственно. Для возникновения предельного напряженного состояния и движения в слое необходимо, чтобы в начальный момент времени P_a и P_b удовлетворяли соотношению

$$P_b \leqslant P_a\left(\frac{a}{b}\right)^{2(1-k)} = P_{b\,\min}$$

Пусть это условие выполнено и возникает движение. Тогда из (2.3) следуют соотношения

$$b^3 = a^3 + c^3, \qquad Q(t) = \frac{1}{3}\frac{da^3}{dt} \tag{2.7}$$

$$f(t) = b^{2(1-k)}\left[P_b - \rho\left(\frac{1}{(2k-1)\,b}\frac{dQ}{dt} - \frac{Q^2}{(1+k)\,b^4}\right)\right] =$$

$$= a^{2(1-k)}\left[P_a - \rho\left(\frac{1}{(2k-1)\,a}\frac{dQ}{dt} - \frac{Q^2}{(1+k)\,a^4}\right)\right] \tag{2.8}$$

где c — постоянная величина, характеризующая толщину сферического слоя.

Соотношения (2.7) и (2.8) сводятся к одному уравнению для определения $a = a(t,\ c)$, которое после перехода к безразмерным величинам по формулам

$$a^3 = a_0^3 w, \qquad c^3 = a_0^3 \Lambda, \qquad t = \sqrt{\frac{\rho a_0^2}{P_0}}\,\tau \tag{2.9}$$

$$P_a = P_0 \pi_a(w,\ \tau), \qquad P_b = P_0 \pi_b(w + \Lambda,\ \tau)$$

сводится к

$$\frac{du}{d\tau} = Au^2 - B, \qquad \frac{dw}{d\tau} = u \tag{2.10}$$

$$A(w,\ \Lambda) = \frac{2k-1}{3(1+k)}\,\frac{(w+\Lambda)^{-2(1+k)/3} - w^{-2(1+k)/3}}{(w+\Lambda)^{(1-2k)/3} - w^{(1-2k)/3}} \tag{2.11}$$

$$B(w,\ \Lambda,\ \tau) = 3(1-2k)\,\frac{\pi_b(w+\Lambda,\tau)(w+\Lambda)^{2(1-k)/3} - \pi_a(w,\ \tau)\,w^{2(1-k)/3}}{(w+\Lambda)^{(1-2k)/3} - w^{(1-2k)/3}} \tag{2.12}$$

Нас интересует решение этой системы при начальных условиях $w(0)=1$, $u(0)=0$. Поскольку система (2.10) соответствует движению среды от центра, необходимо, чтобы для искомого решения имело место условие $du/d\tau|_{\tau=0} \geqslant 0$, что выполняется при $B|_{\tau=0} \leqslant 0$, т. е. при

$$\pi_b(1+\Lambda,\ 0) \leqslant \pi_a(1,\ 0)\left(\frac{1}{1+\Lambda}\right)^{2(1-k)/3} = \pi_{b\min}|_{\tau=0}$$

где обозначено

$$\pi_{b\min} = \pi_a(w,\ \tau)\left(\frac{w}{w+\Lambda}\right)^{2(1-k)/3}.$$

Если это условие выполнено, то оно сохранится и при достаточно малых $\tau > 0$, если π_b и π_a — непрерывные функции своих аргументов. Это означает, что если равенство достигается только при $\tau=0$, а для $\tau>0$ и $|w-1|<\varepsilon$ и достаточно малых ε выполняется только $\pi_b(w+\Lambda,\ \tau) < \pi_{b\min}(w, \tau, \Lambda)$, то возникает движение, для которого $w(\tau, \Lambda) > 1$. В зависимости от вида функций $\pi_a(w,\ \tau)$, $\pi_b(w+\Lambda,\ \tau)$ это движение либо будет продолжаться неограниченно долго, либо закончится за конечный интервал времени и вся среда разлетится в бесконечность, либо наступит момент времени τ_0, при котором u обратится в нуль. Поскольку в этот момент, вообще говоря, будет $du/d\tau<0$, то будет выполняться неравенство $\pi_b(w_0+\Lambda,\ \tau_0) > \pi_{b\min}(w_0,\ \tau_0,\ \Lambda)$. Если при этом $\pi_b(w_0+\Lambda,\ \tau_0)$ окажется меньше

$$\pi_{b\max}(w_0,\ \tau_0,\ \Lambda) = \pi_a(w_0,\ \tau_0)\left(\frac{w_0+\Lambda}{w_0}\right)^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{k}-1\right)}$$

то движение на этом и прекратится; если же окажется

$$\pi_b(w_0+\Lambda,\ \tau_0) \geqslant \pi_{b\max}(w_0,\ \tau_0,\ \Lambda)$$

$$\pi_b(w+\Lambda,\ \tau_0+\varepsilon_1) > \pi_{b\max}(w,\ \tau_0+\varepsilon_1) \qquad \text{при } |w-w_0|<\varepsilon_2$$

где ε_1, ε_2 — малые числа, то движение будет продолжаться. Оно будет описываться решением системы, получающейся из (2.10), если заменить там k на $1/k$ (движение к центру), соответствующим начальным данным $w(\tau_0)=w_0$, $u(\tau_0)=0$. В дальнейшем такое чередование движений от центра и к центру может происходить неограниченное число раз, либо движение закончится остановкой, причем остановка может произойти с полным захлопыванием полости, т. е. при $w=0$, либо произойдет разлет в бесконечность за конечный или бесконечный интервал времени, — все это в зависимости от того, каковы функции $\pi_b(w+\Lambda,\ \tau)$, $\pi_a(w,\ \tau)$.

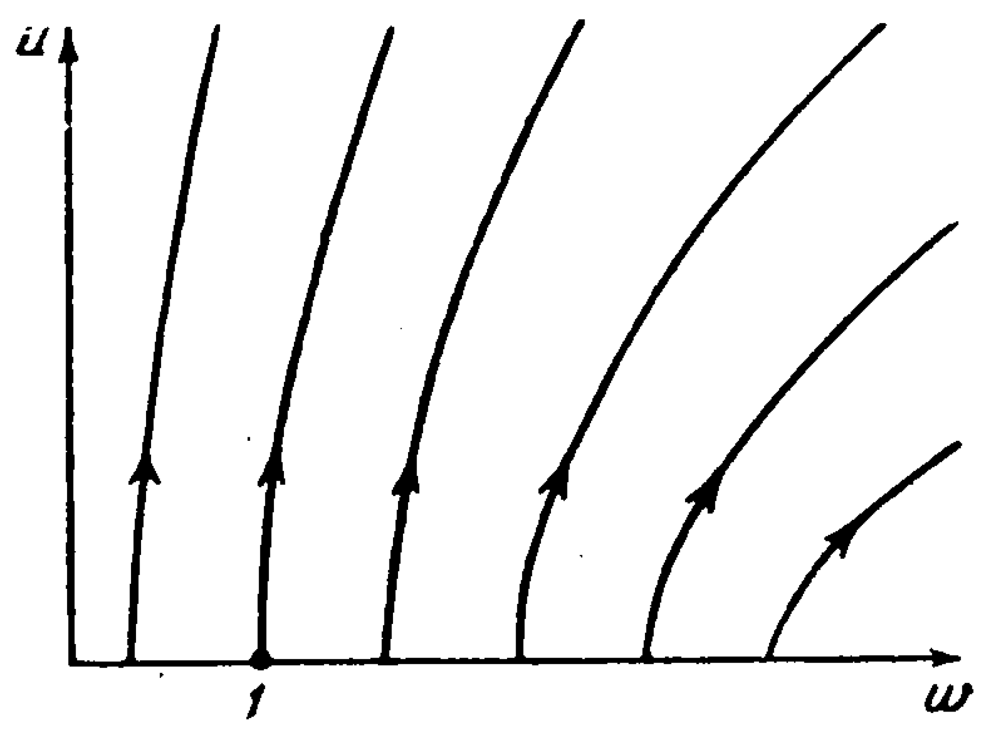
Рассмотрим более подробно случай, когда π_b, π_a от τ не зависят. Система (2.10) при этом сводится к

$$\frac{du}{dw} = \frac{A(w,\ \Lambda)u^2 - B(w,\ \Lambda)}{u}, \qquad \frac{dw}{d\tau} = u. \tag{2.13}$$

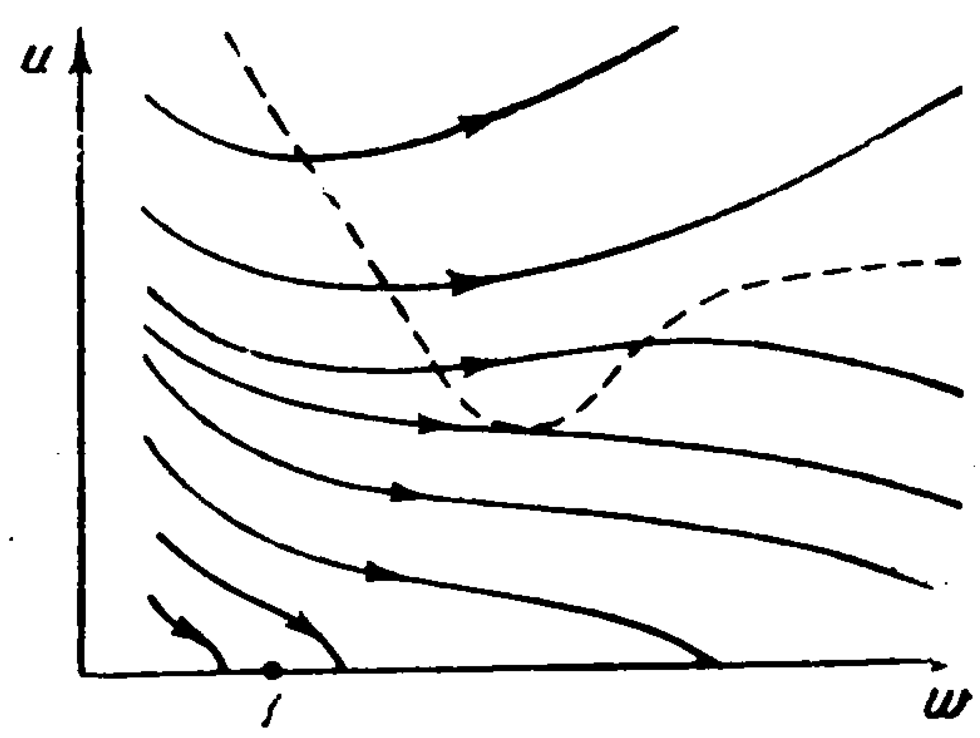
Хотя решение уравнений (2.13) и можно найти в квадратурах, мы изучим возможные движения, не делая этого, а рассмотрев интегральные кривые первого из этих уравнений. Отметим, что поле интегральных кривых симметрично относительно оси $u=0$, ибо уравнение не меняет своего вида при замене u на $-u$. Особыми точками являются точки пересечения линии

$$Au^2 - B = 0 \tag{2.14}$$

с осью $u=0$. Поскольку $A>0$ при любых конечных и отличных от нуля w и Λ, эта линия действительна лишь тогда, когда $B>0$, т. е. при $\pi_b > \pi_{b\,\min}$. Если $\pi_b < \pi_{b\,\min}$, то особых точек нет и $du/dw > 0$ при $u>0$, т. е. мы имеем разлет среды в бесконечность. Интегральные кривые изображены на фиг. 1, где стрелки указывают направление роста времени τ по интегральным кривым.



Фиг. 1

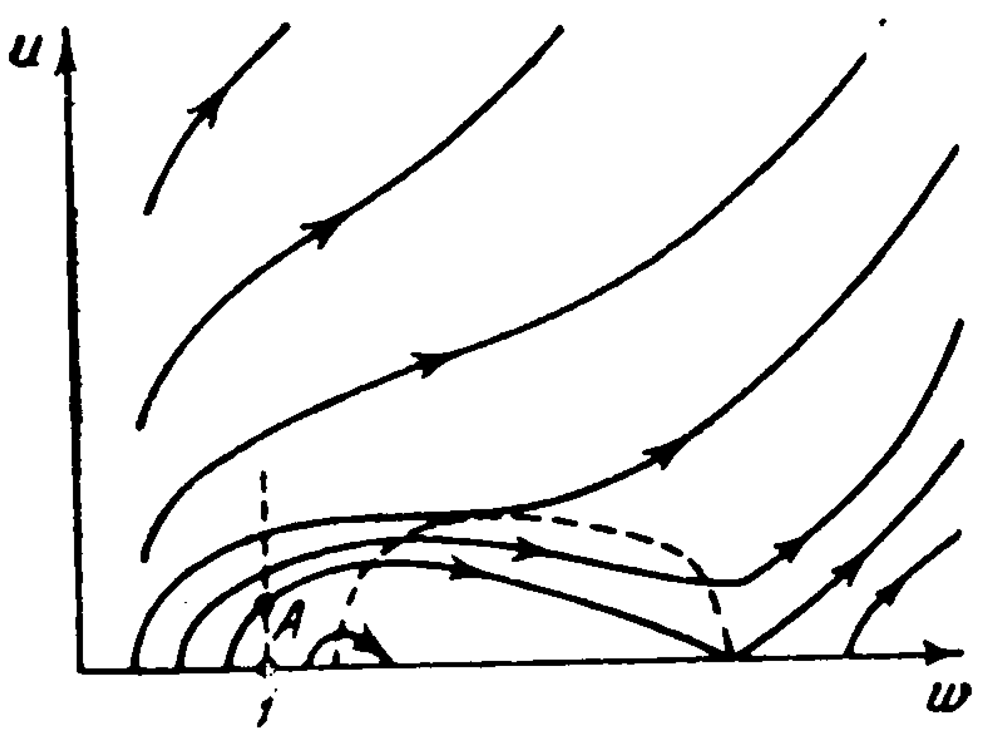


Фиг. 2

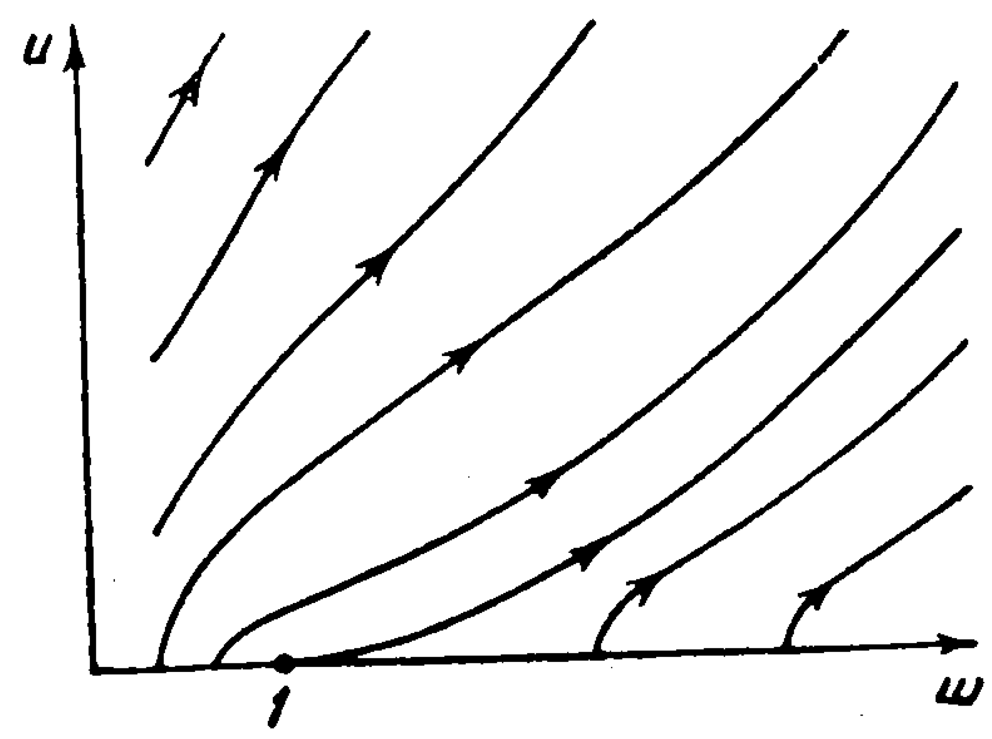
Если $\pi_b \geqslant \pi_{b\,\min}$ — существует линия (2.14), на которой $du/dw = 0$. Если она не пересекает ось $u=0$, то картина интегральных кривых (фиг. 2) показывает, что движение из состояния покоя не может возникнуть, а если оно возникает за счет сообщения среде начальной скорости, то оно при достаточно малых начальных скоростях будет замедляться и закончится остановкой (или движением в обратную сторону); если же начальные скорости велики, а ордината кривой (2.14) при $w \to \infty$ остается ограниченной, то произойдет разлет среды в бесконечность. Если последнее условие не выполняется, то все движения приводят к остановке. Если кривая (2.14) пересекает ось $u=0$, то точки пересечения являются особыми точками, и характер движения зависит как от начальных данных, так и от количества особых точек; однако и в этом случае, если у кривой (2.14) существуют ветви, уходящие в бесконечность с неограниченно возрастающей ординатой, то все движения приводят к остановке ($u=0$). Если таковых нет, то при достаточно больших начальных скоростях происходит разлет среды в бесконечность. Остальные начальные скорости приводят к остановке, причем для некоторых избранных начальных данных, соответствующих интегральным кривым, входящим в особые точки с конечным и отличным от нуля наклоном касательной, остановка происходит за бесконечно долгий промежуток времени (фиг. 3, кривая AB).

Если $\pi_b = \pi_{b\,\min}$ только при при $w=1$, то решением является $w=1$, $u=0$ — покой, состояние предельного равновесия. Это состояние является неустойчивым, и при любых как угодно малых изменениях начальных данных возникает движение, приводящее к разлету среды в бесконечность (фиг. 4).

Переходя к рассмотрению поведения решения системы (2.10) или (2.13), соответствующего начальным условиям $w(0)=1$, $u(0)=0$, будем помнить о следствии из предыдущих рассмотрений, состоящем в том, что это решение (имеется в виду нетривиальное решение, т. е. случай, когда возникает движение) существует только в случае, когда $B\leqslant 0$ вблизи начальной точки и при малом $\tau>0$, причем равенство возможно только для $\tau=0$ для системы (2.10); если B от τ не зависит [система (2.13)], должно быть $B<0$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Если существует конечный предел правой части (2.10) или (2.13) при $\Lambda\to\infty$, то решение системы стремится при $\Lambda\to\infty$ к решению предельной системы, соответствующему тем же начальным данным (см.[3]).

Имеем

$$\lim_{\Lambda\to\infty} A=\begin{cases}0, & 1-2k>0\\ \dfrac{2k-1}{3(1+k)}w^{-1}, & 1-2k<0\end{cases} \tag{2.15}$$

$$\lim_{\Lambda\to\infty} B=3(1-2k)\begin{cases}\lim\limits_{\Lambda\to\infty}(w+\Lambda)^{1/3}M(w,\Lambda,\tau), & 1-2k>0\\ -w^{-(1-2k)/3}\lim\limits_{\Lambda\to\infty}(w+\Lambda)^{2(1-k)/3}M(w,\Lambda,\tau), & 1-2k<0\end{cases} \tag{2.16}$$

где

$$M(w,\Lambda,\tau)=\pi_b(w+\Lambda,\tau)-\pi_a(w,\tau)\left(\frac{w}{w+\Lambda}\right)^{2(1-k)/3} \tag{2.17}$$

Поскольку решение может существовать лишь при $\pi_b<\pi_{b\,\min}$, имеем

$$\lim_{\Lambda\to\infty} B=\begin{cases}0, & 1-2k>0\\ -3(1-2k)\left[w^{-(1-2k)/3}\pi(\tau)-\pi_a(w,\tau)w^{1/3}\right], & 1-2k<0\end{cases} \tag{2.18}$$

где

$$\pi(\tau)=\lim_{\Lambda\to\infty}(w+\Lambda)^{2(1-k)/3}\pi_b(w+\Lambda,\tau) \tag{2.19}$$

(если этот предел вообще существует).

Таким образом, при $1-2k>0$ получаем предельную систему $du/d\tau=0$, $dw/d\tau=u$ с решением $u=0$, $w=1$, т. е. при $k<{}^1/_2$, как велико бы ни было давление в полости P_a, оно не в состоянии привести среду в движение; но оно создает в среде предельное напряженное состояние, как бы мало оно ни было.

В случае $1-2k<0$ предельной системой является

$$\frac{du}{d\tau}=\frac{2k-1}{3(1+k)}\frac{u^2}{w}-3(2k-1)\left[w^{-(1-2k)/3}\pi(\tau)-\pi_a(w,\tau)w^{1/3}\right],\qquad \frac{dw}{d\tau}=u \tag{2.20}$$

если предел $\pi(\tau)$ вообще существует, и она имеет решение, соответствующее начальным данным $w(0)=1$, $u(0)=0$, если $\pi(\tau)$ достаточно мало при малых τ, т. е. если $du/d\tau|_{\tau=0}>0$.

Мы видим, что предельная система (2.20) содержит функцию $\pi(\tau)$, которая остается произвольной и даже может не существовать, ибо она зависит от вспомогательной процедуры предельного перехода. [Заметим, что $\pi(\tau)$ с точностью до размерного постоянного множителя есть $f(t)$ в выражении (2.3)].

Таким образом, в случае $k>{}^1/_2$ поставленная задача о расширении полости с давлением в безграничном пространстве, заполненном сыпучей средой, не имеет единственного решения. В случае же $k<{}^1/_2$ задача имеет единственное решение, состоящее в том, что среда остается в покое, хотя и приходит в предельное напряженное состояние, как бы велико ни было давление в полости. Этот случай напоминает аналогичное положение дел для задачи, когда средой является идеальная несжимаемая жидкость, а полостью бесконечный круглый цилиндр.

Не разбирая случая движения, направленного к центру симметрии, простирающегося до бесконечности, подведем итоги. При помощи гипотез о предельном напряженном состоянии, о несжимаемости среды и других, указанных в работе[1], можно как в плоском случае[1], так и в случае осевой симметрии (центральной симметрии, в частности) построить систему уравнений, описывающую движение сыпучей среды. Не останавливаясь на том, что этот подход принципиально не позволяет построить общую систему уравнений для описания произвольного пространственного движения сыпучей среды (этот подход так же, как и в случае статической задачи, пригоден лишь для, так сказать, статически определимых задач — плоская и осесимметричная задача), отметим, что даже в классе этих «статически определимых» задач указанная система уравнений позволяет решать задачи лишь крайне специального вида. То же самое имеет место, как известно, и в теории предельного равновесия сыпучей среды[2, 4]. Основная причина, которая приводит к этим неприятностям, особенно в случае динамических задач, состоит, на наш взгляд, в весьма стеснительном допущении о несжимаемости среды. Учет сжимаемости среды, по-видимому, может привести к устранению возникающих парадоксов, подобно тому, как учет упругости элементов механической системы с кулоновым трением позволяет устранить аналогичные явления в механике системы с кулоновым трением[5].

Поступила 23 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. О плоском движении песка. Украинский математ. журнал, т. 6, № 4, 1954.
2. Березанцев В. Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды. Гостехтеоретиздат, М., 1952.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений, Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1950.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Гостехтеоретиздат, М., 1954.
5. Пэнлеве П. Лекции о трении (перев. с франц.). Гостехтеоретиздат, М., 1954.