

КРЫЛЬЯ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ю. Л. Жилин

(Москва)

Рассматривается вариационная задача для крыла произвольной фиксированной формы в плане при заданной подъемной силе. Относительно крыла предполагается, что оно имеет сверхзвуковые кромки и слабо возмущает набегающий поток.

Показано, что потенциал возмущенной скорости крыла минимального сопротивления на задней характеристической поверхности удовлетворяет уравнению Лапласа со смешанными краевыми условиями. Этот результат был ранее получен М. Н. Коганом^[1] для крыла, имеющего прямую заднюю кромку, перпендикулярную набегающему потоку.

Вычисление сопротивления крыльев минимального сопротивления четырехугольной формы в плане показало, что сопротивление этих крыльев незначительно отличается от сопротивления плоских.

Рассмотрена также задача о минимальном сопротивлении тела, имеющего фиксированное концевое сечение, и получена оценка снизу для сопротивления такого тела.

1. Рассмотрим обтекание произвольного тела сверхзвуковым потоком газа. Силы, действующие на тело, можно представить в виде интегралов по произвольной замкнутой поверхности, заключающей тело. Если тело слабо возмущает набегающий поток, то

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho_{\infty}}{2} \iint_{S_1} [(\beta^2 u^2 + v^2 + w^2) \cos(nx) - 2uv \cos(ny) - 2uw \cos(nz)] dS_1 \\ Y &= -U_{\infty} \rho_{\infty} \iint_{S_1} [v \cos(nx) - u \cos(ny)] dS_1 \quad (\beta^2 = M_{\infty}^2 - 1) \\ Z &= -U_{\infty} \rho_{\infty} \iint_{S_1} [w \cos(nx) - u \cos(nz)] dS_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где X , Y , Z — компоненты действующей на тело силы, U_{∞} , ρ_{∞} — скорость и плотность набегающего потока, u , v , w — компоненты возмущенной скорости, M_{∞} — число Маха набегающего потока, n — внешняя нормаль к поверхности S_1 .

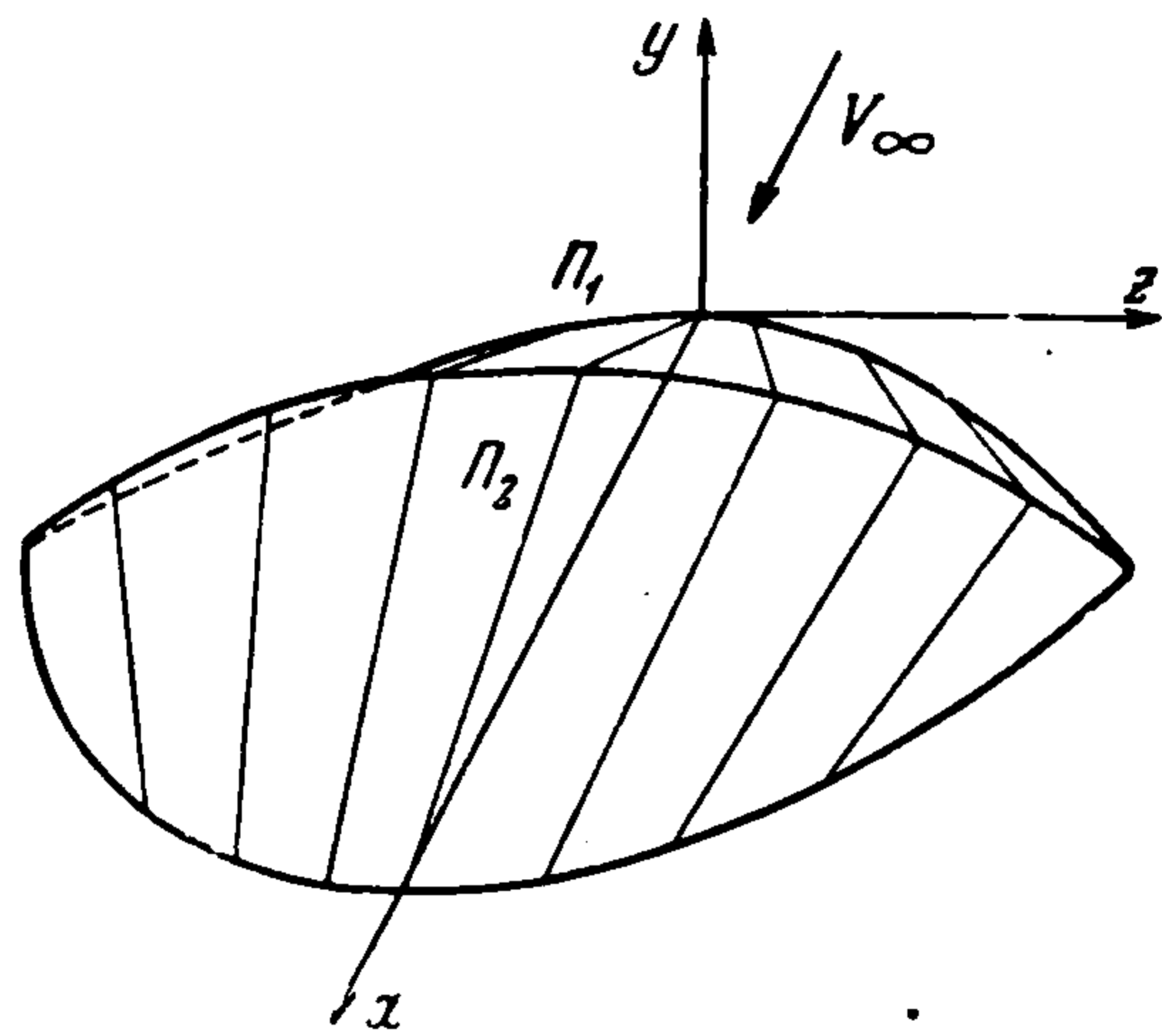
Кроме того, на поверхности S_1 должно соблюдаться уравнение сохранения массы

$$U_{\infty} \Sigma = \iint_{S_1} [-\beta^2 u \cos(nx) + v \cos(ny) + w \cos(nz)] dS_1 \quad (1.2)$$

где Σ — разность площадей проекций концевого и входного сечений тела на плоскость $x = \text{const}$.

Эти формулы можно значительно упростить, если в качестве поверхности S_1 взять поверхность, образованную передней Π_1 и задней Π_2

характеристическими поверхностями тела, показанными на фиг. 1. Такой



Фиг. 1

метод ранее использовался при рассмотрении вариационной задачи А. А. Никольским^[2] для тел вращения и М. Н. Коганом^[1] для крыла с прямой задней кромкой, перпендикулярной набегающему потоку.

На передней характеристической поверхности возмущенная скорость равна нулю. Поэтому интегрирование в формулах (1.1) и (1.2) производится только по задней характеристической поверхности.

Пусть уравнение этой поверхности будет

$$x = f(y, z), \quad (f_y^2 + f_z^2 = \beta^2) \quad (1.3)$$

В этом случае косинусы углов, входящие в формулы (1.1) и (1.2):

$$\cos(nx) = \frac{1}{M_\infty}, \quad \cos(ny) = -\frac{f_y}{M_\infty}, \quad \cos(nz) = -\frac{f_z}{M_\infty}$$

Отсюда $dS_1 = M_\infty dydz$ и формулы (1.1) и (1.2) представим

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho_\infty}{2} \iint_{S_2} [\beta^2 u^2 + v^2 + w^2 + 2uvf_y + 2uwf_z] dydz \\ Y &= -U_\infty \rho_\infty \iint_{S_2} (v + uf_y) dydz, \quad Z = -v_\infty \rho_\infty \iint_{S_2} (w + uf_z) dydz \\ U_\infty \sum &= - \iint_{S_2} (wf_z + vf_y + \beta^2 u) dydz \end{aligned} \quad (1.4)$$

где S_2 — проекция задней характеристической поверхности на плоскость $x = \text{const}$. Введем теперь потенциал $\varphi(x, y, z)$ возмущенной скорости:

$$\varphi_x = u, \quad \varphi_y = v, \quad \varphi_z = w$$

Через $\varphi_0(y, z)$ обозначим значение потенциала φ на задней характеристической поверхности, т. е.

$$\varphi_0(y, z) = \varphi[f(y, z), y, z].$$

Очевидно, что

$$\varphi_{0y} = v + uf_y, \quad \varphi_{0z} = w + uf_z$$

Если воспользоваться этими равенствами и формулой (1.3), то выражения (1.4) можно привести к виду

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho_\infty}{2} \iint_{S_2} (\varphi_{0y}^2 + \varphi_{0z}^2) dydz, \quad Z = -U_\infty \rho_\infty \iint_{S_2} \varphi_{0z} dydz \\ Y &= -U_\infty \rho_\infty \iint_{S_2} \varphi_{0y} dydz, \quad U_\infty \sum = - \iint_{S_2} (\varphi_{0y} f_y + \varphi_{0z} f_z) dydz \end{aligned} \quad (1.5)$$

Как и следовало ожидать согласно^[1], правые части полученных формул зависят только от значения потенциала на задней характеристической поверхности и не зависят от нормальной производной от потенциала. Полученные формулы для действующих на тело сил удобны еще тем, что подинтегральные выражения не зависят от геометрических свойств задней характеристической поверхности, поэтому при решении вариационных задач получаются простые уравнения для потенциала φ_0 .

Перейдем теперь к рассмотрению вариационной задачи для несущего крыла произвольной формы в плане со сверхзвуковыми кромками. Мы будем предполагать, что крыло не имеет толщины и лежит в плоскости $y=0$. В этом случае функции φ и φ_0 будут асимметричны относительно плоскости $y=0$. Поэтому уравнение сохранения массы автоматически выполняется, а при вычислении X и Y мы можем производить интегрирование только по верхней половине симметричной относительно оси z области S_2 , т. е.

$$X = \rho_\infty \iint_S (\varphi_{0y}^2 + \varphi_{0z}^2) dydz, \quad Y = -2U_\infty \rho_\infty \iint_S \varphi_{0y} dydz \quad (1.6)$$

где S — верхняя половина области S_2 .

Будем искать такое распределение потенциала в области S , при котором при заданном значении подъемной силы Y^* сопротивление X достигает минимального значения. Это эквивалентно отысканию минимума интеграла

$$J = \iint_S (\varphi_{0y}^2 + \varphi_{0z}^2 - 2q\varphi_{0y}) dydz$$

где q — постоянная Лагранжа, определяемая величиной подъемной силы.

При этом потенциал φ_0 должен обращаться в нуль на проекции линии пересечения передней и задней характеристических поверхностей на плоскость $x = \text{const}$. На остальной части границы области S значения потенциала φ_0 заранее неизвестно, и здесь мы должны получить естественное краевое условие.

Нетрудно показать, что уравнение Эйлера для функционала J превращается в уравнение Лапласа

$$\varphi_{0yy} + \varphi_{0zz} = 0 \quad (1.7)$$

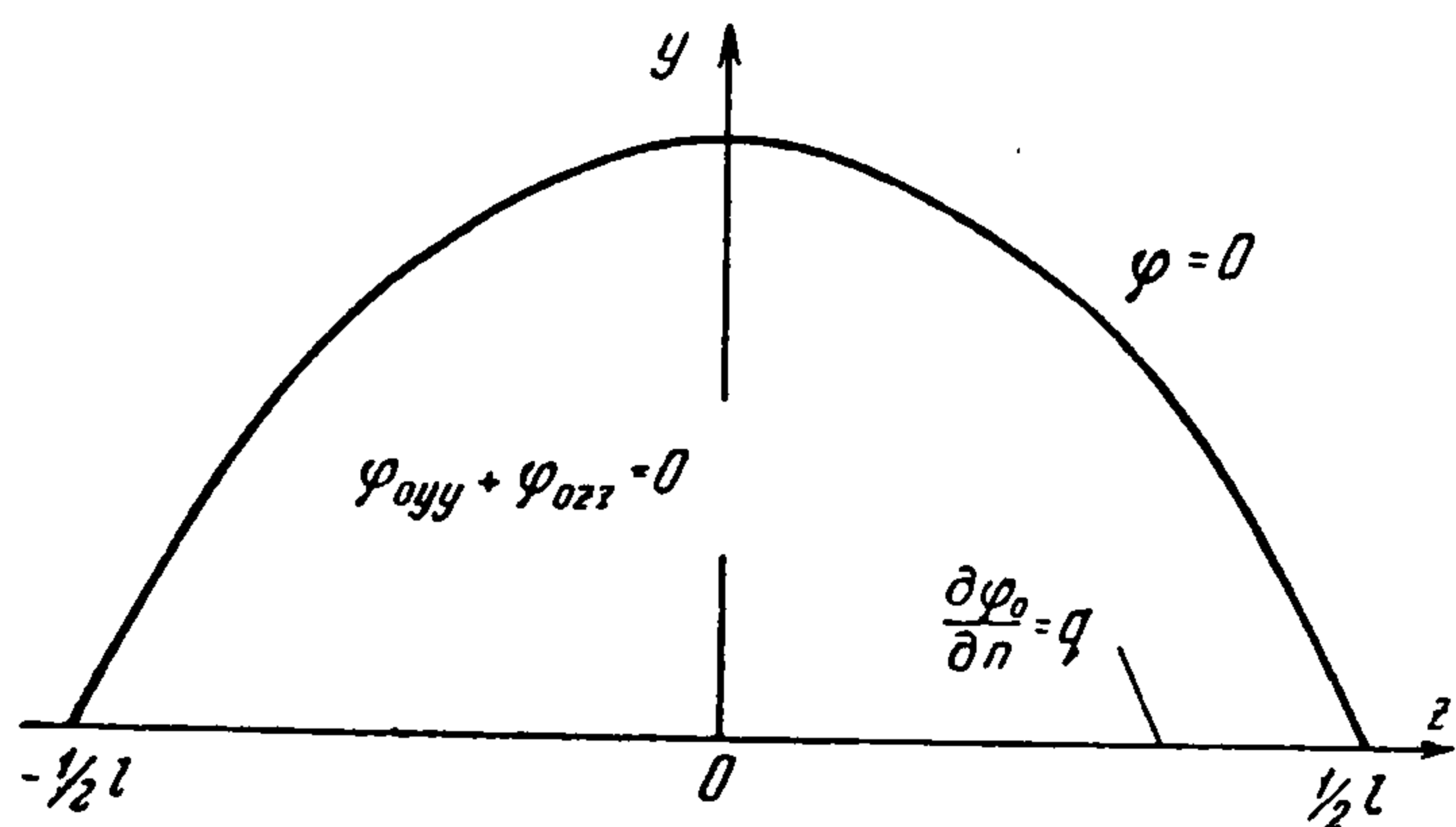
а естественное краевое условие определяет нормальную производную

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = q \quad \text{при } y=0, \quad -\frac{1}{2}l \leq z \leq \frac{1}{2}l \quad (1.8)$$

где l — размах крыла (фиг. 2).

Таким образом, потенциал возмущенной скорости крыла минимального сопротивления на задней характеристической поверхности удовлетворяет уравнению Лапласа со смешанными краевыми условиями (в данном случае смешанную задачу можно свести к задаче Дирихле при помощи подстановки $\varphi_0 = \Psi - qy$). Строго говоря, нужно еще доказать, что полученное в результате решения уравнения Лапласа распределение потенциала φ_0 соответствует обтеканию какого-то крыла¹. Во всяком случае φ_0 , удовлетворяющее условиям (1.7) и (1.8), дает оценку снизу для сопротивления крыльев минимального сопротивления,

¹ Если передняя и задняя характеристические поверхности крыла имеют непрерывную нормаль (в этом случае крыло имеет выпуклую форму в плане), это представляется очевидным.



Фиг. 2

так как при постановке вариационной задачи на потенциал φ_0 дополнительных условий не накладывалось, кроме задания подъемной силы.

Ниже на примере крыльев четырехугольной формы в плане будет показано, что эта оценка незначительно отличается от сопротивления плоских крыльев. Поэтому в настоящей статье мы не будем заниматься отысканием формы крыльев минимального сопротивления.

Следует отметить, что условие (1.7) для потенциала возмущенной скорости крыла минимального сопротивления можно получить, исходя из работы Джонса^[3]. Джонсом было получено, что комбинированный поток вокруг крыла минимального сопротивления обладает следующими свойствами: давление на поверхности крыла равно нулю, а скос постоянен, т. е. на поверхности крыла

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = q = \text{const}$$

где φ_k — потенциал комбинированного потока, удовлетворяющий волновому уравнению

$$-\beta^2 \varphi_{kxx} + \varphi_{kyy} + \varphi_{kzz} = 0$$

Нетрудно заметить, что мы имеем здесь задачу Коши для производной $\partial \varphi_k / \partial x$, удовлетворяющей волновому уравнению при условиях

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{на поверхности крыла}$$

Если предположить единственность решения задачи Коши, то внутри всей области, ограниченной передней и задней характеристическими поверхностями крыла

$$\partial \varphi_k / \partial x = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_{kyy} + \varphi_{kzz} = 0$$

Отсюда непосредственно вытекают условия (1.7) и (1.8) для φ_0 . Условия (1.7) и (1.8) позволяют упростить формулу для сопротивления крыльев минимального сопротивления. Интегрируя (1.6) по частям и используя (1.7) и (1.8), получаем

$$X = q \rho_\infty \int_{-l/2}^{l/2} \varphi_0 dz, \quad Y = 2U_\infty \rho_\infty \int_{-l/2}^{l/2} \varphi_0 dz \quad (1.9)$$

Введем безразмерные координаты и безразмерный потенциал

$$\bar{y} = \frac{y}{l/2}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l/2}, \quad \bar{\varphi}_0 = \frac{\varphi_0}{ql/2} \quad (1.10)$$

Потенциал $\bar{\varphi}_0$, как нетрудно убедиться, уже не зависит от величины подъемной силы и определяется только лишь формой проекции линии пересечения передней и задней характеристических поверхностей на плоскость $x = \text{const}$. В новых переменных из (1.9) следует, что

$$\frac{Y^2}{X} = \frac{U_\infty^2 \rho_\infty}{2} 2l^2 \int_{-1}^1 \bar{\varphi}_0 d\bar{z} \quad \text{или} \quad \frac{C_y^2}{C_x} = 2\lambda \int_{-1}^1 \bar{\varphi}_0 d\bar{z} \quad (1.11)$$

где

$$C_y = \frac{Y}{1/2 U_\infty^2 \rho_\infty S^\circ}, \quad C_x = \frac{X}{1/2 U_\infty^2 \rho_\infty S^\circ}$$

S° — площадь крыла, λ — удлинение крыла.

Последняя формула показывает, что отношение C_y^2/C_x для крыльев минимального сопротивления, так же как и для плоских, не зависит от величины подъемной силы. Используя уравнение (1.7), можно доказать еще некоторое свойство возмущенной скорости u на передней и задней характеристических поверхностях. Так как

$$\varphi_{0y} = v + uf_y, \quad \varphi_{0yy} = v_y + 2u_y f_y + u_x f_y^2 + u f_{yy}$$

то уравнение (1.7) можно записать как

$$w_x + v_y + \beta^2 u_x + 2u_z f_x + 2u_y f_y + u(f_{yy} + f_{zz}) = 0$$

В то же время во всем пространстве справедливо волновое уравнение $w_x + v_y - \beta^2 u_x = 0$. Поэтому на задней характеристической поверхности крыла минимального сопротивления

$$u_y f_y + u_z f_x + u_x \beta^2 + \frac{f_{yy} + f_{zz}}{2} u = 0$$

или

$$u_{0y} f_y + u_{0z} f_x + \frac{f_{yy} + f_{zz}}{2} u_0 = 0 \quad (1.12)$$

где

$$u_0(y, z) = u(x, y, z) \text{ при } x = f(y, z)$$

Используя уравнение (1.3) для f , нетрудно доказать следующие свойства главного радиуса кривизны R задней характеристической поверхности:

$$R = \frac{M_\infty}{f_{yy} + f_{zz}}, \quad R_y f_y + R_z f_x = M_\infty$$

После этого уравнение (1.12) можно привести к виду

$$f_y (u_0 \sqrt{R})_y + f_x (u_0 \sqrt{R})_z = 0$$

Это уравнение показывает, что семейства линий $f = \text{const}$ и $u_0 \sqrt{R} = \text{const}$ ортогональны. Семейство линий, ортогональных семейству $f = \text{const}$, определяется уравнением

$$\frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_x}$$

которое является уравнением бихарактеристик. Таким образом, на задней характеристической поверхности крыла минимального сопротивления вдоль характеристического луча

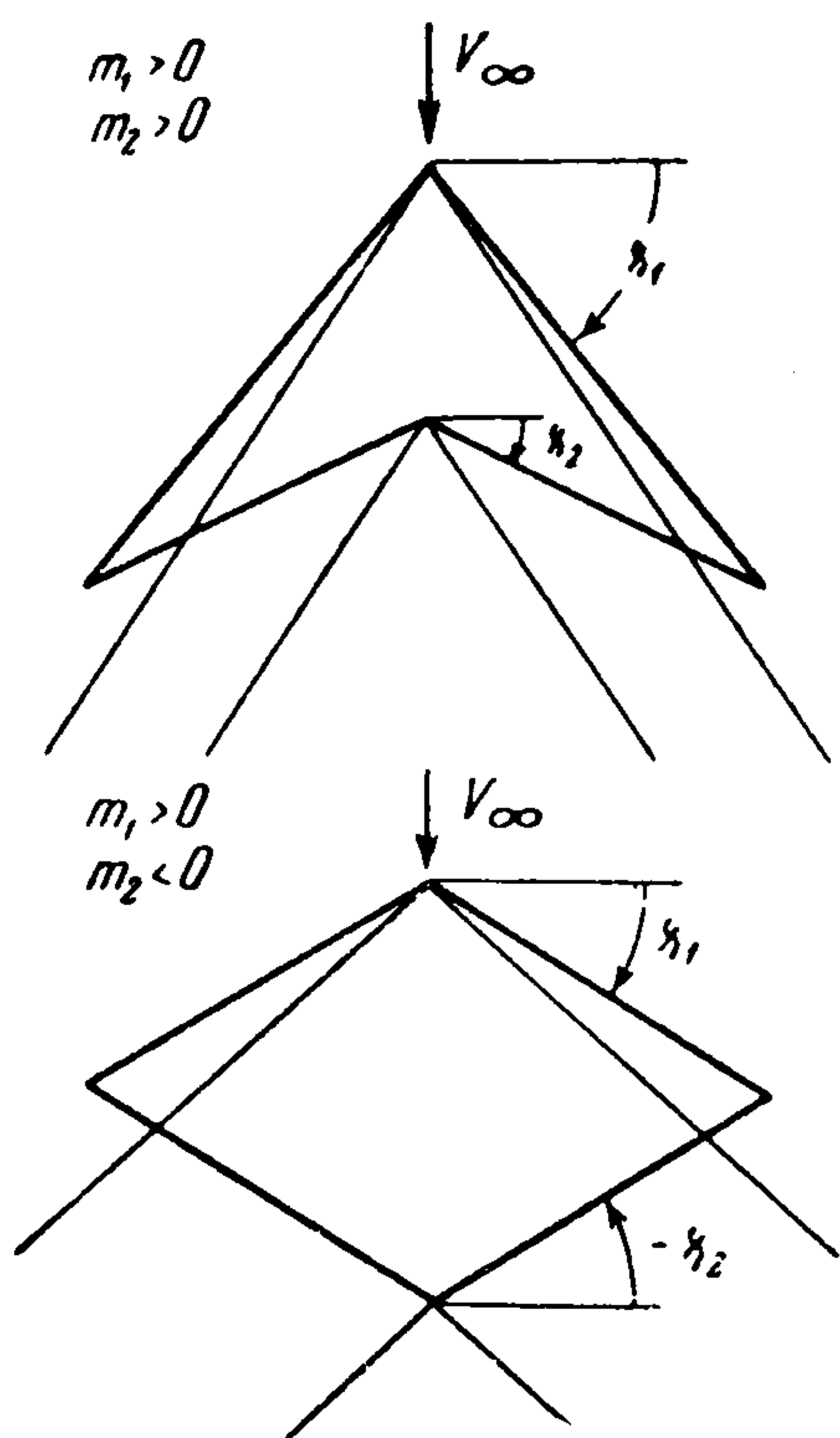
$$u_0 \sqrt{R} = \text{const} \quad (1.13)$$

Постоянная, входящая в это выражение, меняется от луча к лучу и ее можно определить только после решения задачи Гурса.

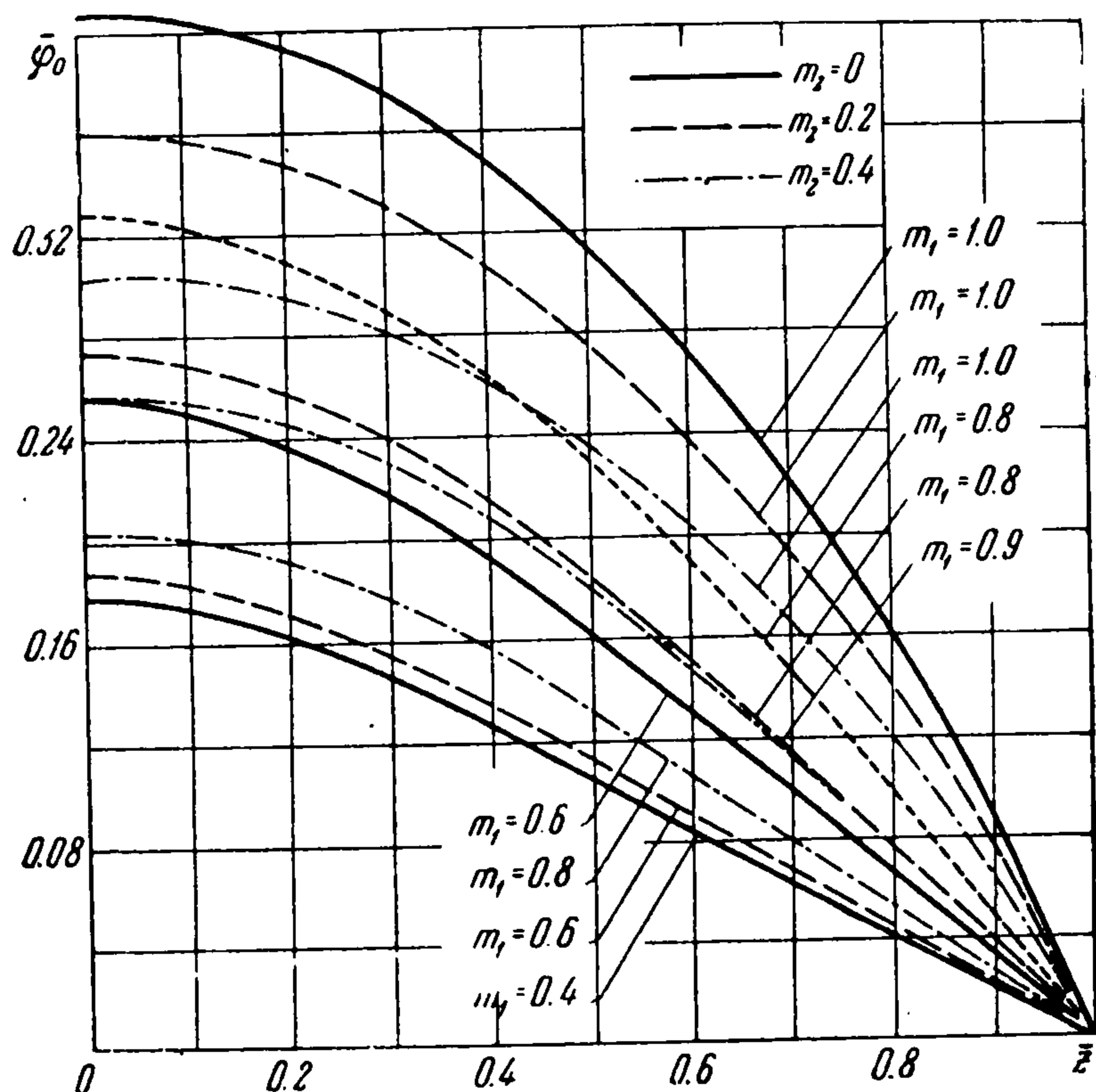
На плоских участках задней характеристической поверхности вдоль характеристического луча формула (1.13) принимает вид: $u_0 = \text{const}$.

Формула (1.13) справедлива также и на передней характеристической поверхности, так как выше было показано, что давление в комбинированном потоке в области, ограниченной передней и задней характеристическими поверхностями, равно нулю.

§ 2. Вычисление сопротивления крыльев минимального сопротивления четырехугольной формы в плане. В предыдущем параграфе было показано, что нахождение потенциала возмущенной скорости на задней характеристической поверхности крыла минимального сопротивления сводится к решению смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа. Эта задача принципиально решена М. В. Келдышем и Л. И. Седовым, но решение конкретных задач представляет большие формальные трудности. Поэтому вообще эту задачу удобнее решать не аналитическим путем, а на электроинтеграторе. Эти расчеты облегчаются тем, что для определения сопротивления нам достаточно знать распределение $\bar{\varphi}_0$ по задней кромке крыла.



Фиг. 3



Фиг. 4

В случае крыльев четырехугольной формы в плане (фиг. 3) проекция линии пересечения передней и задней характеристических поверхностей на плоскость $x = \text{const}$ состоит из кусков окружности, параболы и прямой и целиком определяется параметрами $m_1 = \beta^{-1} \text{tg } \chi_1$ и $m_2 = \beta^{-1} \text{tg } \chi_2$.

Так как в этом случае $\lambda = 4/(m_1 - m_2)\beta$, то из формулы (1.11) следует, что

$$\beta \frac{C_y}{C_x} = \frac{8}{m_1 - m_2} \int_{-1}^1 \bar{\varphi}_0 d\bar{z} \quad (2.1)$$

Правая часть этого уравнения зависит только от параметров m_1 и m_2 .

При $m_1 = -m_2 = 1$, т. е. для крыла ромбовидной формы в плане со звуковыми кромками, область S представляет собой полукруг и потенциал $\bar{\varphi}_0$ легко найти аналитически. В этом случае

$$\bar{\varphi}_0 = -r \sin \theta + \frac{1+r^2}{\pi r} \sin \theta \arctg \left(\frac{2r}{1-r^2} \sin \theta \right) + \frac{1-r^2}{2\pi r} \cos \theta \ln \frac{1+r^2+2r \cos \theta}{1+r^2-2r \cos \theta} \quad (2.2)$$

где $r^2 = \bar{y}^2 + \bar{z}^2$ и $\text{tg } \theta = \bar{y}/\bar{z}$.

На задней кромке

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{1-\bar{z}^2}{\pi \bar{z}} \ln \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$$

Для этого крыла

$$\beta \frac{C_y}{C_x} = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right)$$

Для плоского крыла такой же формы в плане

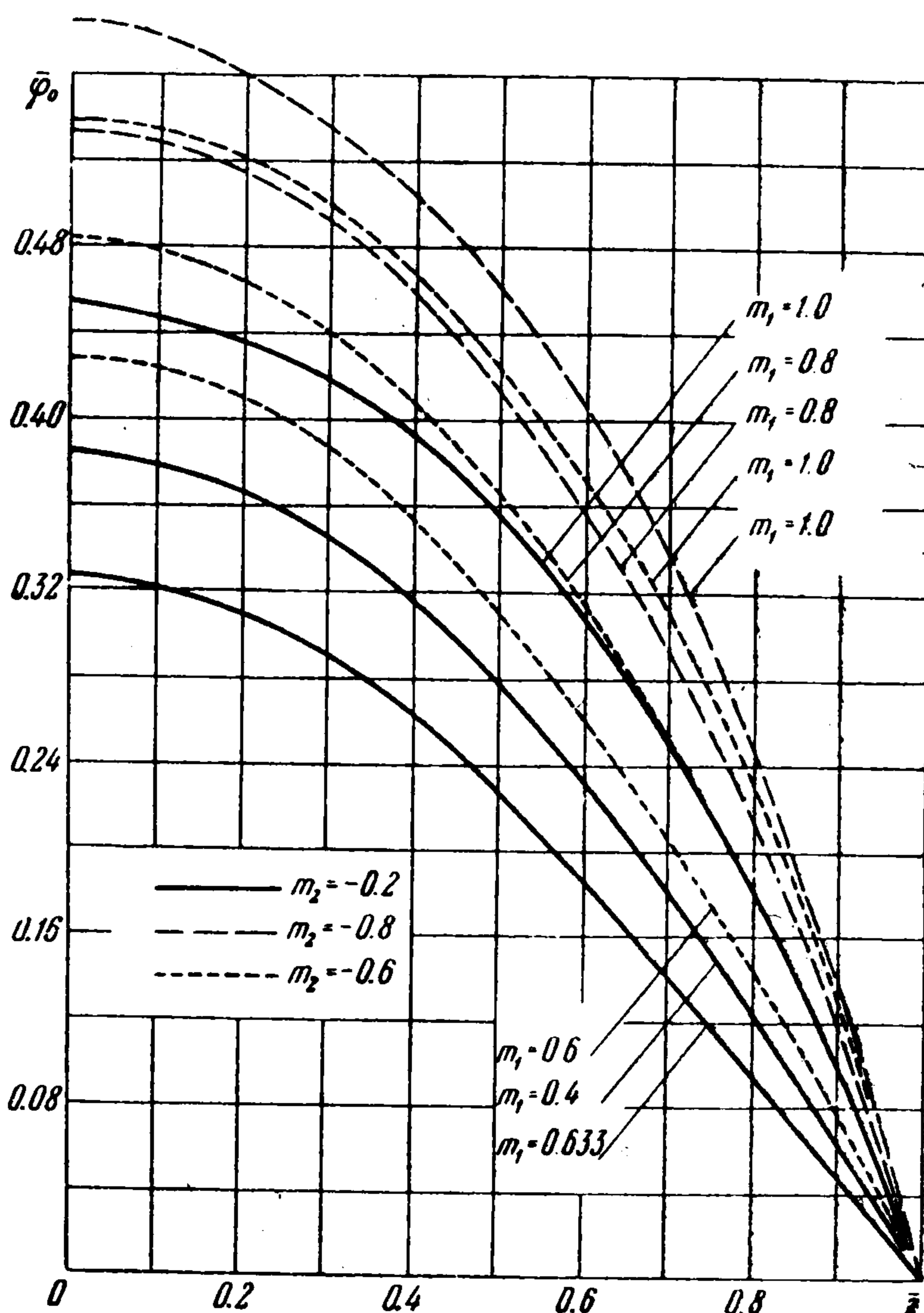
$$\beta \frac{C_y^2}{C_x} = \frac{32}{3\pi}$$

т. е. в данном случае сопротивление плоского крыла больше сопротивления крыла минимального сопротивления на 100%. При других значениях параметров m_1 и m_2 вычисление потенциала производилось при помощи электроинтегратора ЭИ-11, построенного по принципу электрического моделирования. Предварительное сравнение точного решения (2.2) с решением, вычисленным на электроинтеграторе, показало, что ошибка при вычислении на электроинтеграторе не превышает 10% для $\beta C_y^2/C_x$.

На фиг. 4 и 5 представлены результаты вычисления распределения потенциала φ_0 по задней кромке крыльев минимального сопротивления.

Вычисления показывают, что при звуковой передней кромке сопротивление крыльев минимального сопротивления может довольно значительно (на 12÷22%). отличаться от сопротивления плоских крыльев той же формы в плане. Однако этот факт требует тщательной проверки, так как применимость линейной теории в этом случае вызывает сомнение. В тех же случаях, когда передняя кромка существенно сверхзвуковая и применимость линейной теории не вызывает сомнения, выигрыш в сопротивлении получается незначительный (порядка 1÷5%). Вычисления показывают, что не только искривление поверхности крыла, но и сама его форма в плане слабо влияют на значение величины $\beta C_y^2/C_x$.

Приводим значения этой величины для крыльев минимального сопротивления (в скобках указано уменьшение сопротивления в процентах по сравнению с плоскими крыльями):



Фиг. 5

$m_1 \backslash m_2$	-1.0	-0.8	-0.6	-0.2	0	0.2	0.4	0.6
0.4					4.04 (1)			
0.6			3.74 (1)	3.93 (1)	4.08 (2)	4.34 (3.5)		
0.8		3.70 (3)	3.73 (2.5)	3.97 (2)	4.18 (4.5)	4.54 (4.5)	4.95 (7.5)	
1.0	3.75 (10)	3.66 (4)	3.80 (6)	4.18 (9)	4.50 (12.5)	4.94 (14)	5.62 (19)	6.6 (22)

§ 3. Вывод уравнения для потенциала возмущенной скорости тела минимального сопротивления, имеющего фиксированное концевое сечение. Рассмотрим задачу о минимальном сопротивлении тела, имеющего фиксированное концевое сечение¹. Сопротивление, испытываемое телом в сверхзвуковом потоке, и уравнение сохранения массы будем рассматривать в виде (1.5).

¹ Кроме того, фиксируется либо длина тела, если тело не выходит за пределы переднего конуса Маха, либо его форма в плане, если тело имеет сверхзвуковые кромки.

Будем искать такое распределение потенциала φ_0 в области S , при котором достигается минимум сопротивления при фиксированном значении Σ . Нетрудно показать, что этот минимум достигается при φ_0 , удовлетворяющем следующим условиям (фиг. 6):

$$\varphi_{0yy} + \varphi_{0zz} = -q(f_{yy} + f_{zz}) \quad \text{внутри области } S$$

На проекции l_1 концевое сечение на плоскость $x = \text{const}$ (q — множитель Лагранжа)

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = -q \frac{\partial f}{\partial n}$$

На проекции l_2 линии пересечения передней и задней характеристических поверхностей на плоскость $x = \text{const}$:

$$\varphi_0 = 0$$

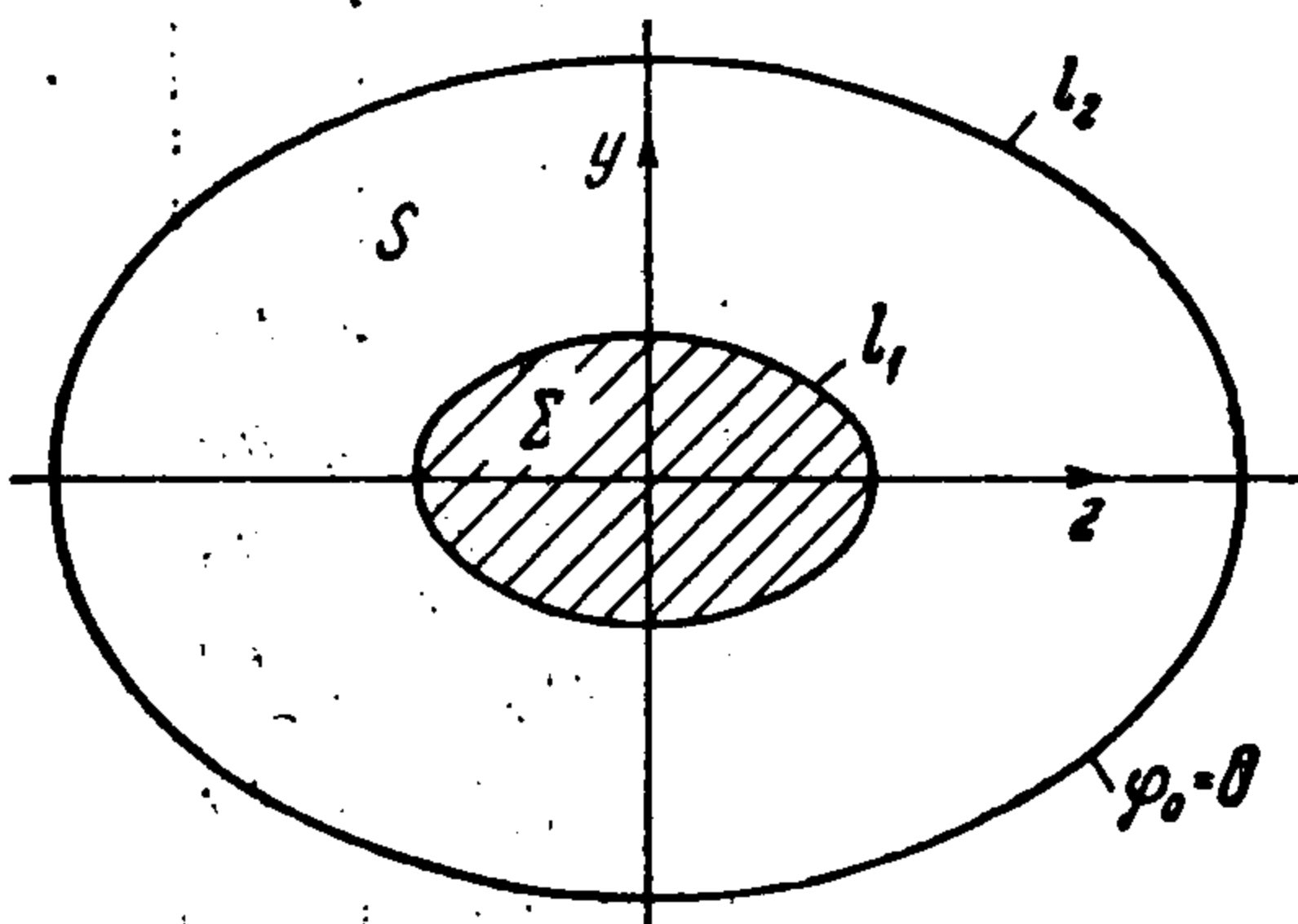
Введем функцию

$$\psi = f + \frac{\varphi_0}{q} \quad (3.1)$$

В результате также получим смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\psi_{yy} + \psi_{zz} = 0 \quad \text{внутри области } S$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } l_1 \quad \psi = f \quad \text{на } l_2 \quad (3.2)$$



Фиг. 6

Здесь как и раньше, не интересуясь формой экстремальных тел, рассмотрим только сопротивления, действующие на эти тела. Интегрируя по частям выражения (1.5) для X и для $U_\infty \Sigma$ и используя формулы (3.1) и (3.2), можно получить, что

$$X = \frac{\rho_\infty U_\infty}{2} q \Sigma, \quad U_\infty \Sigma = q \beta^2 S - qJ \quad \left(J = \int_{l_2} f \frac{\partial \psi}{\partial n} dl \right)$$

или

$$X = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2} \frac{\Sigma^2}{\beta^2 S - J}$$

Интеграл J , входящий в это выражение, всегда положителен и определяется только лишь формой области S . Поэтому имеет место следующая оценка для сопротивления произвольного тела:

$$X \geq \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2} \frac{\Sigma^2}{\beta^2 S}$$

В том случае, когда линия пересечения передней и задней характеристических поверхностей лежит в плоскости $x = \text{const}$, эта оценка совпадает с сопротивлением тел минимального сопротивления:

$$X_{\min} = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2} \frac{\Sigma^2}{\beta^2 S}$$

К этому случаю, в частности, относятся тела вращения, указанные в работе А. А. Никольского [2].

Все изложенное в этом параграфе применимо и для тел, имеющих цилиндрические протоки.

Поступила 1 VIII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. К о г а н М. Н. О телах минимального сопротивления в сверхзвуковом потоке газа, стр. 207—212 этого выпуска.
2. Н и к о л ь с к и й А. А. О телах вращения с протоком, обладающих минимальным внешним сопротивлением в сверхзвуковом потоке. Труды ЦАГИ, 1950.
3. J o n e s R. The minimum Drag of Thin Wings in Frictionless Flow. JAS, vol. 18, N 2, 1951, p. 78—81.