

О ТЕЛАХ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА¹

М. Н. К о г а н

(Москва)

В рамках линейной теории рассматривается задача об определении минимального сопротивления крыльев и тел в сверхзвуковом потоке газа.

Показано, что в сверхзвуковом потоке имеются поверхности, на которых силы, действующие на заключенные внутри этих поверхностей тела, и условие сохранения массы могут быть выражены через значения потенциала скоростей на указанной поверхности. Это позволяет свести задачу об определении экстремальных свойств пространственных тел к двумерной задаче. В дозвуковом потоке в общем случае таких поверхностей на конечном расстоянии нет. В качестве примера рассмотрено крыло с произвольной сверхзвуковой передней кромкой и задней кромкой, перпендикулярной потоку. Эта задача оказывается вполне аналогичной классической задаче Мунка^[1] для крыла в несжимаемой жидкости.

1. Основная теорема. Хорошо известно, что силы, действующие на крыло в несжимаемой жидкости, могут быть выражены в бесконечно удаленной плоскости через значения потенциала скоростей в этой плоскости. Поэтому в этом случае можно определить минимальное сопротивление крыла при заданной подъемной силе, не выходя за рамки плоскости Трефтца и не зная всего поля скоростей и формы обладающего этим сопротивлением крыла.

Таким образом, в этом случае в результате решения двумерной задачи определяются силы и циркуляция по размаху крыла, а затем находится само крыло. Такое разделение задачи существенно ее упрощает.

В сверхзвуковом случае не удастся произвести подобное разделение в бесконечно удаленной плоскости.

Используя в качестве контрольной поверхности характеристический конус, А. А. Никольский^[2] провел указанное разделение в задаче об определении минимального сопротивления тела вращения в сверхзвуковом потоке.

Для возможности разделения вариационных задач в общем случае необходимо, чтобы на выбранной контрольной поверхности действующие на заключенные внутри нее тела силы и закон сохранения массы выражались через потенциал на этой поверхности.

Рассмотрим тело или группу тел в сверхзвуковом потоке газа. Обозначим через φ потенциал возмущенных скоростей и через $u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$ и $w = \varphi_z$ (индексы обозначают дифференцирование) составляющие скоростей соответственно по осям x , y и z .

¹ Работа доложена на семинаре в ЦАГИ в мае 1955 г.

Потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\beta^2 \varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0 \quad (\beta^2 = M_0^2 - 1) \quad (1.1)$$

где M_0 — число Маха набегающего потока. Пусть $F(x, y, z)$ — уравнение контрольной поверхности, заключающей рассматриваемые тела. Законы сохранения массы и количества движения можно записать соответственно в виде

$$\int \int_F \frac{1}{N} [\beta^2 \varphi_x F_x - \varphi_y F_y - \varphi_z F_z] ds = 0 \quad (1.2)$$

$$X = \rho_0 \int \int_F \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2} F_x (\beta^2 \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) - (\varphi_x \varphi_y F_y + \varphi_x \varphi_z F_z) \right\} ds \quad (1.3)$$

$$Y = \rho_0 v_0 \int \int_F \frac{1}{N} (\varphi_x F_y - \varphi_y F_x) ds \quad (N = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}) \quad (1.4)$$

$$Z = \rho_0 v_0 \int \int_F \frac{1}{N} (\varphi_x F_z - \varphi_z F_x) ds \quad (1.5)$$

где X, Y, Z — составляющие по осям x, y и z силы, приложенной к заключенным внутри контрольной поверхности телам, ρ_0 и v_0 — соответственно плотность и скорость набегающего потока.

Теорема. Для того чтобы соотношения (1.2)–(1.5) выражались через значения потенциала на F , необходимо и достаточно, чтобы поверхность F являлась характеристической поверхностью уравнения (1.1).

Действительно, рассмотрим, например, выражение, стоящее в скобках в (1.2). Выберем F таким образом, чтобы это выражение представляло собой производную вдоль F .

Любая производная вдоль F пропорциональна выражению

$$\varphi_x F_z - \varphi_y y' F_z - \varphi_z (F_x + y' F_y) \quad (1.6)$$

где y' — произвольное направление. Потребуем, чтобы содержимое скобок в (1.2) было пропорционально (1.6):

$$\beta^2 \varphi_x F_x - \varphi_y F_y - \varphi_z F_z = A [\varphi_x F_z - \varphi_y y' F_z - \varphi_z (F_x + y' F_y)] \quad (1.7)$$

где A — коэффициент пропорциональности. Так как это равенство должно выполняться для любого φ , то оно равносильно трем условиям:

$$\beta^2 F_x = A F_z, \quad -F_y = A F_z y', \quad F_z = A (F_x + F_y y') \quad (1.8)$$

Исключая произвольные A и y' , получим

$$\beta^2 F_x^2 - F_y^2 - F_z^2 = 0 \quad (1.9)$$

Таким образом, F должно удовлетворять уравнению (1.9), которое, как известно, является уравнением характеристических поверхностей уравнения (1.1).

Потребуем теперь, чтобы квадратичная форма в (1.3) содержала лишь производные от φ вдоль F . Для этого должно быть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} F_x (\beta^2 \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) - (\varphi_x \varphi_y F_y + \varphi_x \varphi_z F_z) = \\ & = A (\varphi_x F_z - \varphi_z F_x)^2 + B (\varphi_x F_z - \varphi_z F_x) (\varphi_y F_z - \varphi_z F_y) + C (\varphi_y F_z - \varphi_z F_y)^2 \end{aligned}$$

Поскольку φ произвольно, то (1.10) равносильно шести равенствам:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F\beta^2 &= AF_z^2, & \frac{1}{2} F_x &= CF_z^2, & \frac{1}{2} F_x &= AF_x^2 + BF_xF_y + CF_y^2 \\ -F_y &= BF_x^2, & -F_z &= -2AF_x - BF_zF_y, & BF_xF_z &= -2CF_yF_z \end{aligned}$$

Последнее уравнение является следствием второго и четвертого. Третье и пятое уравнения после исключения из них A , B и C приводятся к (1.9), т. е. и для (1.3) теорема доказана.

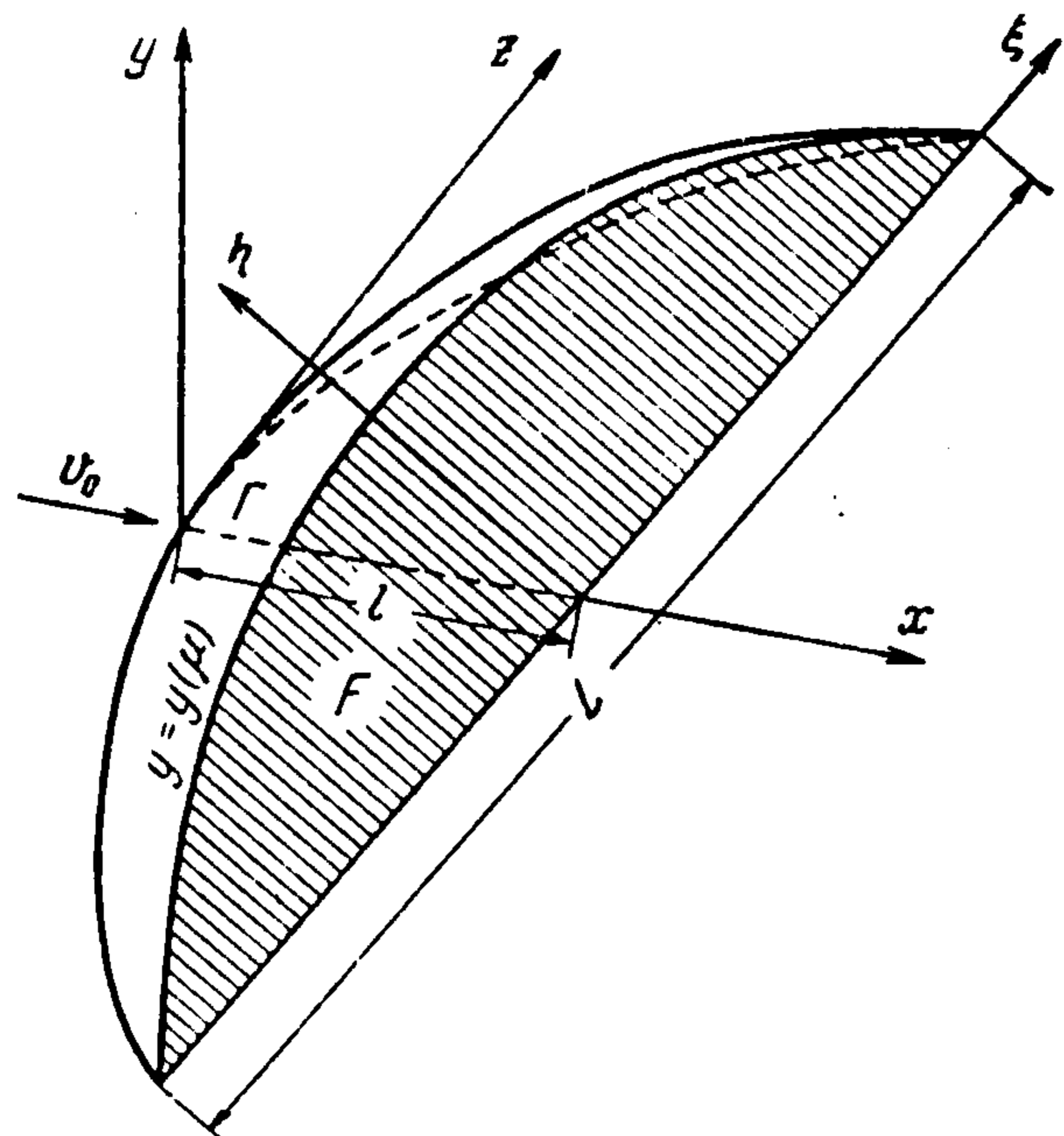
Подынтегральные выражения в (1.4) и (1.5) представляют собой производные вдоль F для любой поверхности.

Таким образом, теорема полностью доказана.

§ 2. Крыло минимального сопротивления при заданной подъемной силе. Рассмотрим бесконечно тонкое крыло с произвольной сверхзвуковой передней кромкой и задней кромкой, перпендикулярной потоку (фиг. 1). За контрольную поверхность примем характеристическую поверхность, проходящую через переднюю кромку, и характеристическую плоскость, проходящую через заднюю кромку крыла. Поскольку потенциал φ является антисимметричной функцией z , то можно рассматривать течение лишь при $z \geq 0$.

Для подъемной силы Y и сопротивления X согласно (1.3) и (1.4) на выбранной контрольной поверхности имеем

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho_0}{M_0} \int \int_F [(\beta\varphi_x - \varphi_z)^2 + \varphi_y^2] ds, \\ Y &= \frac{2\rho_0 v_0}{M_0} \int \int_F (\beta\varphi_x - \varphi_z) ds \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Здесь интегрирование ведется лишь по задней характеристической плоскости F , так как $\varphi = 0$ на передней характеристической поверхности.

Очевидно, что скорость $(\beta\varphi_x - \varphi_z)$ лежит в плоскости F .

Введем характеристические переменные

$$\mu = x - \beta z, \quad \nu = x + \beta z \quad (2.2)$$

Тогда (2.1) можно записать в виде

$$X = \frac{\rho_0}{2\beta} \int \int_F [4\beta^2 \varphi_\mu^2 + \varphi_\nu^2] dy d\mu, \quad Y = 2\rho_0 v_0 \int \int_F \varphi_\mu dy d\mu \quad (2.3)$$

Задача состоит в том, чтобы найти минимум функционала (2.3) для X при заданном Y . На линии $y = y(\mu)$ пересечения передней и задней характеристических поверхностей $\varphi = 0$.

Уравнением Эйлера этой вариационной задачи, очевидно, будет

$$4\beta^2 \varphi_{\mu\mu} + \varphi_{\nu\nu} = 0 \quad (2.4)$$

Интегрируя (2.3) по частям и вводя новые переменные

$$\xi = y, \quad \eta = \frac{l - \mu}{2\beta} = z \quad (2.5)$$

получим

$$\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} = 0 \quad (2.6)$$

$$X = -\rho_0 \int_{-1/2L}^{1/2L} \varphi \varphi_{\eta} |_{\eta=0} d\xi, \quad Y = 2\rho_0 v_0 \int_{-1/2L}^{1/2L} \varphi |_{\eta=0} d\xi \quad (2.7)$$

где l — длина крыла и L — его размах (фиг. 1).

Уравнения (2.6)—(2.7) совпадают с уравнениями, получаемыми в плоскости Трефтца для крыла в несжимаемой жидкости, с той разницей, что в рассматриваемом случае φ должно обращаться в нуль на линии $y = y(\mu)$, а не на бесконечности, как в несжимаемой жидкости.

Легко показать, что, как и в случае несжимаемой жидкости, функционал для X из (2.7), при заданном Y , будет минимальным, если

$$\varphi_{\eta} |_{\eta=0} = C = \text{const} \quad (2.8)$$

Введем $\varphi_0 = \varphi / C$. Функция φ_0 должна удовлетворять уравнению Лапласа (2.7), обращаться в нуль на линии $y = y(\mu)$ и $\varphi_{0\eta} = 1$ при $\eta = 0$. При этом из (2.6) имеем

$$X = -\rho_0 C^2 A = -\frac{Y^2}{4\rho_0 v_0^2 A}, \quad Y = 2\rho_0 v_0 C A \quad \left(A = \int_{-1/2L}^{1/2L} \varphi_0 |_{\eta=0} d\xi \right) \quad (2.9)$$

Величина A , так же, как φ_0 , зависит лишь от формы контрольной поверхности, определяемой формой крыла.

Укажем на одно интересное свойство течения около крыла минимального сопротивления.

На задней характеристической плоскости (т. е. при $v = l$) скорость $u = \varphi_x$ постоянна вдоль линий $\xi = y = \text{const}$. Действительно, справедливое во всем течении уравнение (1.1) в координатах μ, v примет вид:

$$4\beta^2 \varphi_{\mu v} - \varphi_{yy} = 0 \quad (2.10)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (2.4), справедливым на плоскости $v = l$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\varphi_{\mu} + \varphi_v) = \frac{\partial}{\partial \mu} \varphi_x = u_{\mu} = 0 \quad (2.11)$$

т. е. утверждение доказано.

§ 3. Числовой пример. Приведем простейший числовой пример. Рассмотрим крыло минимального сопротивления, для которого потенциал в плоскости $v = l$ имеет вид:

$$\varphi = a\xi^2 + b\eta^2 + c\eta + d \quad (3.1)$$

где a, b, c и d — постоянные.

Для того чтобы крыло обладало минимальным сопротивлением при заданной подъемной силе, φ должно удовлетворять уравнению Лапласа (2.6). Для этого должно быть

$$a = -b = k = \text{const}$$

При $\xi = \pm 1/2 L$ и $\eta = 0$ должно быть

$$\varphi = \frac{1}{4} k L^2 + d = 0 \quad \text{или} \quad d = -\frac{1}{4} k L^2$$

Далее, так как в точке $v = l, \xi = 0$ и $\mu = l - 2\beta\eta = 0$ потенциал равен нулю, то

$$c = k \frac{(1/2L)^2 + (1/2l/\beta)^2}{1/2l/\beta}$$

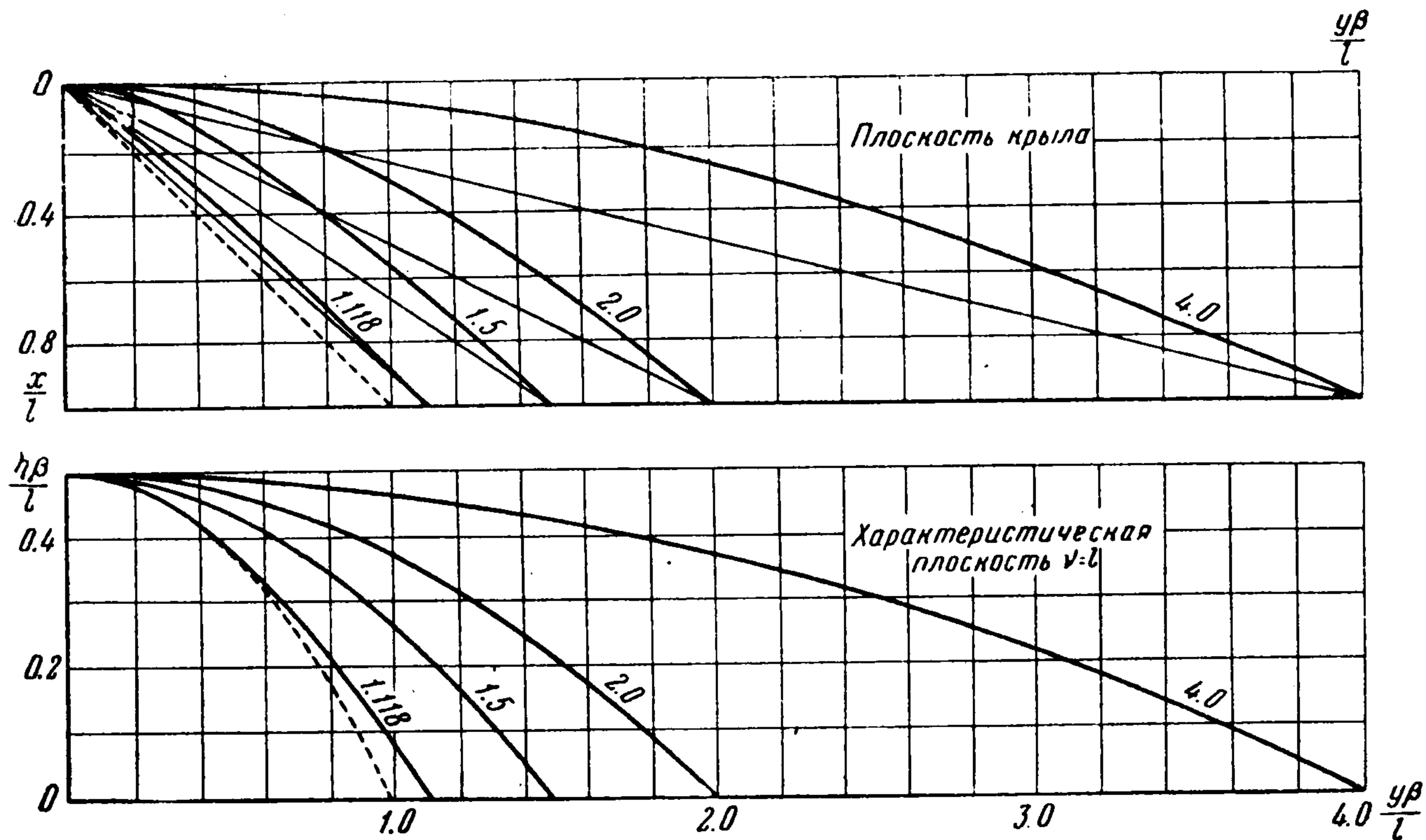
Следовательно,

$$\varphi = k \left[\xi^2 - \eta^2 + \frac{(1/2L)^2 + (1/2l/\beta)^2}{1/2l/\beta} \eta - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

Так как $\varphi = 0$ на линии $\xi = y = y(\mu) = y_1(\eta)$, то эта линия представляет собой гиперболу

$$\xi^2 - \eta^2 + \frac{(1/2L)^2 + (1/2l/\beta)^2}{1/2l/\beta} \eta - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0 \quad (3.3)$$

Поскольку передняя характеристическая поверхность является огибающей конусов Маха, выходящих из точек передней кромки, то, зная линию пересечения этой



Фиг. 2

огибающей с плоскостью $v=l$, легко найти форму передней кромки в параметрической форме:

$$\frac{x}{l} = 1 - 2\lambda \left[\frac{\lambda - 1/4(L^{*2} + 1)}{1/4(L^{*2} - 1)} \right] \quad (3.4)$$

$$\frac{y}{l} \beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda (L^{*2} + 1) + \frac{1}{4} L^{*2}} \left\{ 1 - \frac{32\lambda [\lambda - 1/4(L^{*2} + 1)]}{(L^{*2} - 1)^2} \right\} \quad (3.5)$$

где $L^* = L\beta/l$ и λ — параметр.

На фиг. 2 приведена форма этих крыльев для различных значений L^* , а также соответствующие им линии пересечения характеристических поверхностей; для каждой формы крыла на кривых указаны значения $L\beta/2l$; при $1/2L^* < \sqrt{5/4}$ передняя кромка становится дозвуковой (пунктирные линии на фиг. 2 соответствуют треугольному крылу со звуковой кромкой).

Подставляя (3.2) в (2.11), получим

$$X = \frac{3}{8} \frac{[(1/2L)^2 + (1/2l/\beta)^2]}{\rho_0 v_0 (1/2L)^2 (l/\beta)} Y^2 \quad (3.6)$$

На фиг. 3 приведено отношение X/Y^2 для крыла минимального сопротивления к соответствующей величине для плоского крыла той же формы в плане.

§ 4. Замечания. 1. В предыдущих параграфах показано, как определяются силы действующие на тела минимального сопротивления. Для определения же формы, тела, создающего эти силы, нужно решить весьма сложную в общем случае пространственную задачу Гурса построения поля по данным на характеристических поверхностях. Однако практически целесообразно не решать этой задачи, а подбирать среди крыльев сравнительно простых форм такие, которые обладают сопротивлением, близким к экстремальному. Так, на фиг. 3 нанесена кривая, соответствующая треугольному крылу с конической кривой^[3], заданной по закону

$$a(x, y) = a + b(y/x)^2$$

(α — местный угол атаки, a и b — постоянные). Мы видим, что аэродинамические характеристики этого крыла близки к экстремальным.

Аналогичные соображения указывают на то, что нет необходимости заботиться об отсутствии дополнительных тел внутри течения. Получаемое минимальное сопротивление

следует рассматривать как нижнюю грань, которая, как показывают примеры, достижима.

2. Согласно (2.11) в плоскости $v=l$ скорость u есть функция только y . Зная φ в плоскости $v=l$, легко найти функцию $u(y)$ на линии пересечения передней и задней характеристических поверхностей. Показано [3], что для интегралов поперек потока

$$\bar{u} = -\frac{\bar{w}}{\beta}$$

$$\left(\bar{u} = \int u dy, \bar{w} = \int w dy\right) \quad (4.1)$$

и что $\bar{u} = \text{const}$ и $\bar{v} = \text{const}$ вдоль характеристик $\mu = \text{const}$. Зная $u(y)$ в плоскости $v=l$ и учитывая, что $\bar{u} = \text{const}$ вдоль $\mu = \text{const}$, легко находим распределение подъемной силы вдоль хорды крыла.

3. До сих пор мы рассматривали крылья со сверхзвуковыми кромками. Однако все рассуждения остаются в силе и для крыльев с дозвуковыми кромками. В этом случае область интегрирования будет вырезаться из плоскости $v=l$ конусом Маха, выходящим из передней точки крыла. В плоскости $v=l$ на линии $\eta=0$ при определении φ необходимо вне крыла положить $\varphi=0$. Если рассмотреть крыло очень малого удлинения ($L/l \ll 1$), то условие обращения φ в нуль на линии $y=y(\mu)$ будет равносильно обращению потенциала в нуль на бесконечности, как в случае несжимаемой жидкости. Очевидно, что в этом случае экстремальным будет крыло с эллиптическим распределением нагрузки по размаху, как и в несжимаемой жидкости.

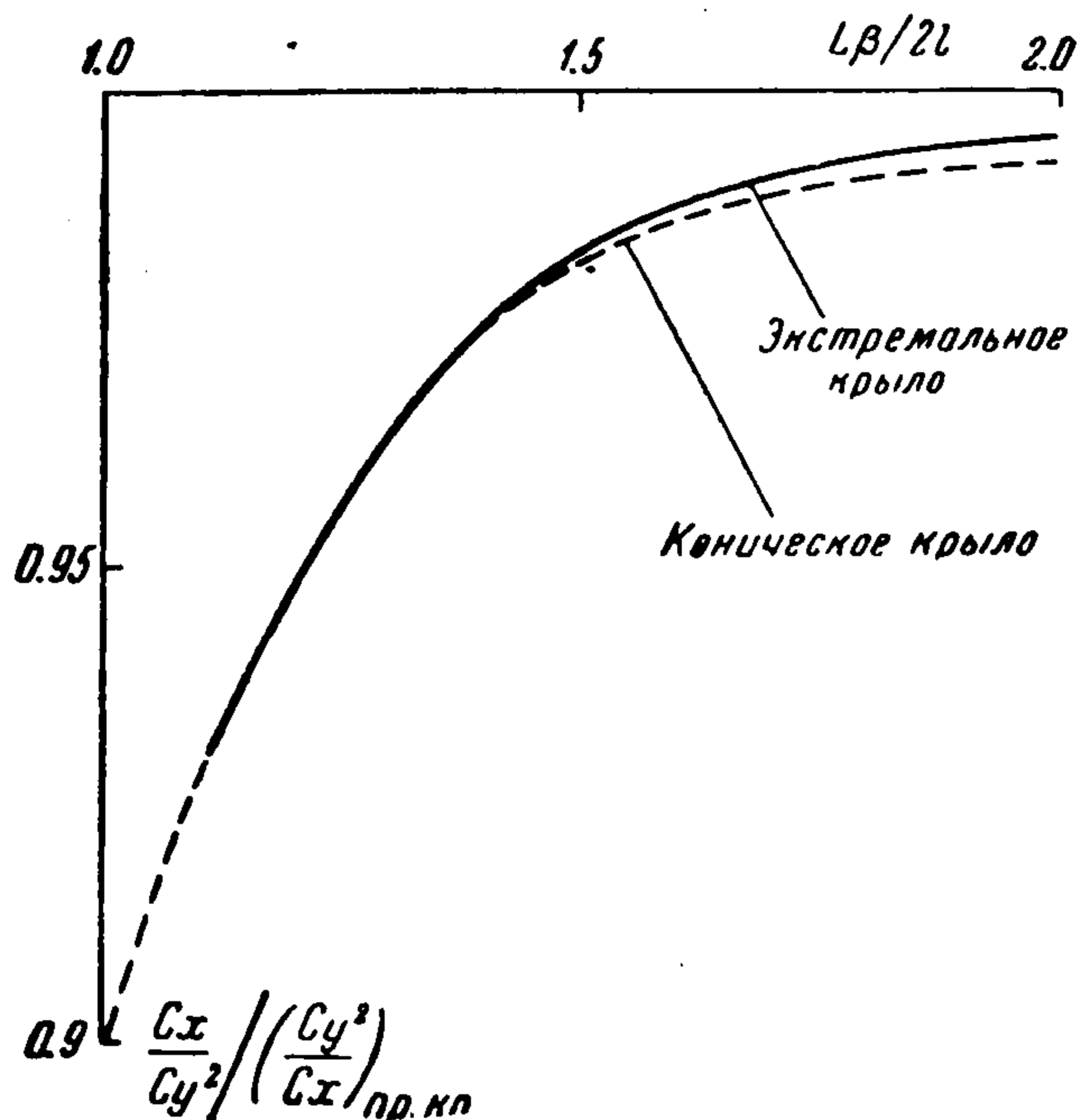
Однако течение, создаваемое экстремальным крылом в сверхзвуковом потоке, будет существенно отличаться от соответствующего течения в несжимаемой жидкости. Действительно, согласно (2.11) скорость u в плоскости $v=l$ постоянна вдоль линии $y = \text{const}$. Следовательно, она будет конечной и на головном характеристическом конусе (скорость u не может быть равной нулю на задней кромке, так как согласно (2.11) она равнялась бы нулю на всей плоскости $v=l$, а по (4.1) в этом случае подъемная сила равнялась бы нулю). Однако из теории характеристик известно, что конечный разрыв на характеристическом конусе получится лишь при наличии бесконечных возмущений в его вершине.

Таким образом, крыло должно обладать тупой вершиной подобно так называемой головке минимального сопротивления Кармана. Таким образом метод применим и для изучения экстремальных свойств крыльев с дозвуковыми кромками. Однако ценность подобных исследований ограничена. Дело в том, что силы, определяемые по теореме количества движения, включают в себя и подсосывающую силу. Однако опыт показывает, что величина подсосывающей силы, полученная по линейной теории, обычно не реализуется. Поэтому экстремальные свойства крыльев с дозвуковыми кромками представляют собой лишь идеальную нижнюю грань.

Поступила 1 VIII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. M u n k. Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges. Диссертация. Göttingen, 1919; см. Дюренд, т. II.
2. Н и к о л ь с к и й А. А. О телах вращения с протоком, обладающих минимальным внешним сопротивлением в сверхзвуковом потоке. Труды ЦАГИ, 1950.
3. К о г а н М. Н. Некоторые свойства сверхзвуковых течений. ПММ, вып. 5, 1956; см. также Труды ЦАГИ, № 687.



Фиг. 3