

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ю. Д. Шмыглевский

(Москва)

Отыскание тел, обладающих наименьшим волновым сопротивлением, является целью многих газодинамических исследований. Сравнительно давно появились решения линеаризованных уравнений. Для вариационных задач газовой динамики А. А. Никольский^[1] предложил вводить в рассмотрение поверхность, ограничивающую «область влияния»; через газодинамические функции на такой поверхности можно выразить силы, действующие на тело, не интегрируя уравнений газовой динамики. Первое точное решение вариационной газодинамической задачи принадлежит Г. Гудерлею и Э. Хантшу. В их работе^[2] задача сводится к численному интегрированию системы уравнений.

Рассматриваемая в настоящей работе задача является вырожденной вариационной задачей. Метод решения таких задач разработан Д. Е. Охоцимским^[3]. Автор глубоко благодарен Д. Е. Охоцимскому за большую помощь в проведении этой работы.

1. Осесимметричное течение газа в цилиндрических координатах определяется уравнением неразрывности

$$\frac{\partial r \rho w \cos \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial r \rho w \sin \vartheta}{\partial r} = 0 \quad (1.1)$$

уравнением движения

$$w \cos \vartheta \frac{\partial w \cos \vartheta}{\partial x} + w \sin \vartheta \frac{\partial w \cos \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

уравнением Бернулли

$$\frac{w^2}{2} + \frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1} \quad (1.3)$$

и уравнением постоянства энтропии

$$\frac{p}{\rho^x} = \begin{cases} \text{const} & \text{в безвихревом случае} \\ f(\psi) & \text{в вихревом случае} \end{cases} \quad (1.4)$$

где x , r — декартовы координаты в меридиональной плоскости течения, ψ — функция тока, w — скорость, отнесенная к критической скорости a_* течения, ϑ — угол наклона скорости к оси потока, x — показатель адиабаты, ρ — плотность газа, отнесенная к плотности ρ_∞ набегающего потока, p — давление, отнесенное к произведению $\rho_\infty a_*^2$.

Вдоль характеристик системы уравнений, определяющей безвихревое течение, выполняются соотношения:

первое семейство

$$dr = \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha) dx, \quad d\vartheta + \frac{1 + \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} d\alpha + \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{r \sin(\vartheta + \alpha)} dr = 0 \quad (1.5)$$

второе семейство

$$dr = \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha) dx, \quad d\vartheta - \frac{1 + \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} d\alpha - \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{r \sin(\vartheta - \alpha)} dr = 0 \quad (1.6)$$

где через α обозначен угол Маха, определяемый соотношением

$$\sin^2 \alpha = \kappa p / \rho w^2$$

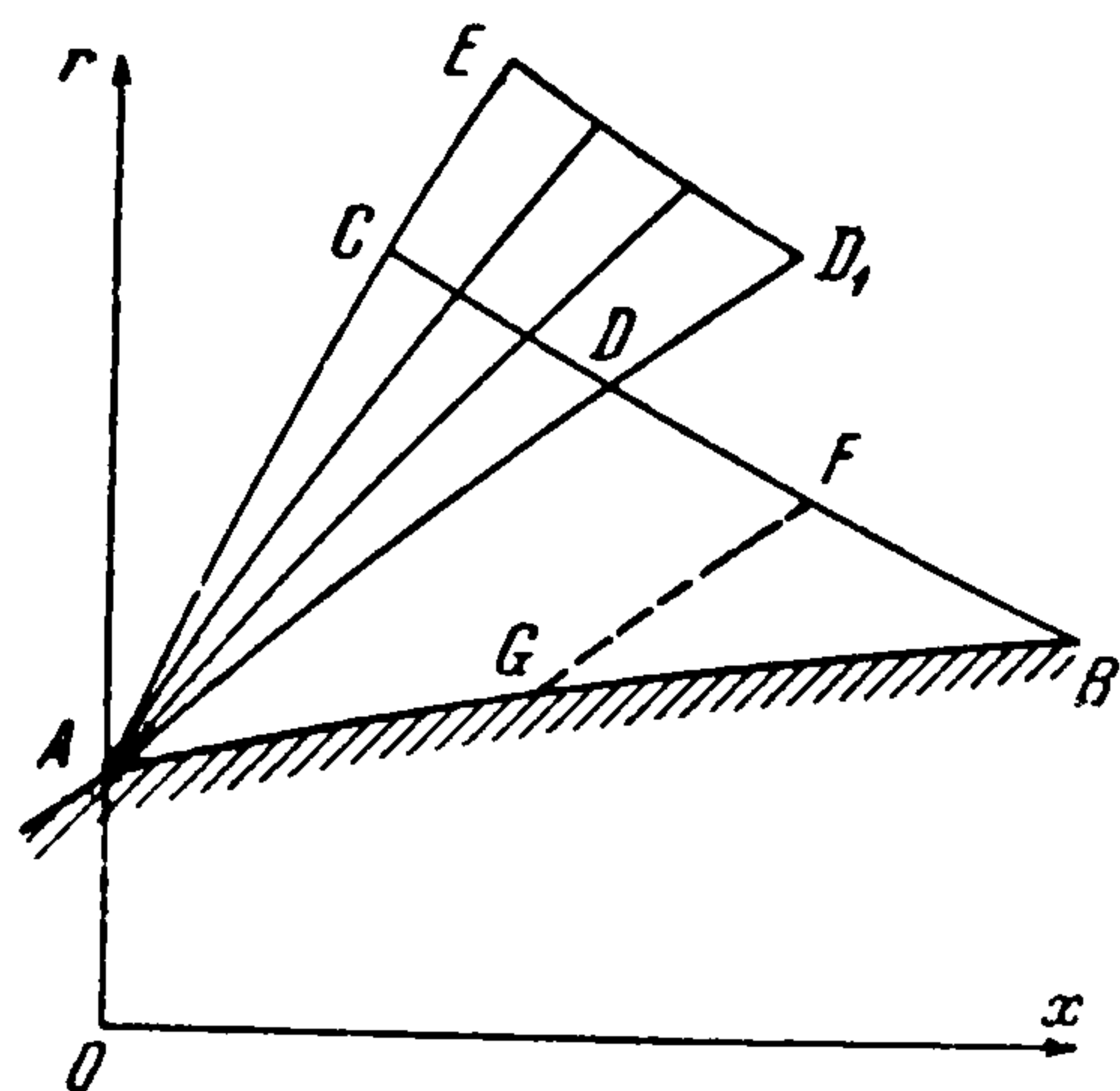
Вдоль линий тока выполняется соотношение

$$dr = \operatorname{tg} \vartheta dx. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.1) позволяет ввести функцию тока по формуле

$$d\psi = r\rho w (\cos \vartheta ds - \sin \vartheta dx) \quad (1.8)$$

2. Рассмотрим область течения газа около тела вращения (фиг. 1). Пусть газ течет со стороны точки A к точке B и предшествующая часть потока известна, т. е. известна характеристика первого семейства AE . Необходимо найти образующую тела AB , обеспечивающую минимальное лобовое сопротивление.



Фиг. 1

Через точку B проводится характеристика второго семейства до пересечения с характеристикой AE в точке C . Область ABC , ограниченную характеристиками и телом, назовем областью S .

Преобразуем уравнение (1.2) при помощи уравнения (1.1) к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} r (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta) + \frac{\partial}{\partial r} r \rho w^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0.$$

Обе части этого уравнения проинтегрируем по области S и по формуле Грина перейдем к интегралу по контуру L , ограничивающему область S ; получим

$$\begin{aligned} \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} r (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta) + \frac{\partial}{\partial r} r \rho w^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right] dx dr = \\ = \oint_L -r \rho w^2 \sin \vartheta \cos \vartheta dx + r (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta) dr = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Контурный интеграл (2.1) состоит из интегралов по образующей AB , по характеристике AC и по характеристике BC . В каждом из этих интегралов исключим dx , используя соответственно равенства (1.7), (1.5) и (1.6). Первый из интегралов χ равен

$$\chi = \int_{r=r_A}^{r_B} p r dr. \quad (2.2)$$

и от волнового сопротивления рассматриваемой части тела отличается лишь постоянным множителем.

Для определения формы тела, дающей наименьшее волновое сопротивление, естественно было бы отыскивать непосредственно минимум функционала (2.2). Но для решения такой задачи необходимо знать зависимость p от формы образующей AB , которую можно получить только решением общей задачи обтекания. Поскольку такое решение неизвестно, приходится выражать χ через интегралы по AC и BC при

помощи равенства (2.1). Это позволит решить задачу, не прибегая к попыткам отыскания общего интеграла уравнений осесимметричного течения газа.

Величины w и ρ связаны с α и плотностью торможения ρ_0 формулами

$$w^2 = \frac{x+1}{x-\cos 2\alpha}, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{x-\cos 2\alpha} \right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Используя эти равенства при преобразовании интеграла (2.1), приходим к желаемой форме для χ :

$$\chi = \rho_0 \sqrt{\frac{x+1}{2}} \left\{ \int_{r=r_A}^{r_C} \sigma(\alpha) \tau(\alpha) \left[\frac{\sin \alpha}{x} + \frac{\cos \vartheta}{\sin(\vartheta+\alpha)} \right] r dr - \int_{r=r_B}^{r_C} \sigma(\alpha) \tau(\alpha) \left[\frac{\sin \alpha}{x} - \frac{\cos \vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} \right] r dr \right\} \quad (2.3)$$

где

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{\frac{x+1}{x-\cos 2\alpha}}, \quad \tau(\alpha) = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{x-\cos 2\alpha} \right)^{\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1}}$$

Выразим необходимые в дальнейшем длину $X = x_B - x_A$ и суммарный расход газа $\Psi = 0$ сквозь характеристики AC и BC через интегралы по тем же контурам.

Из первых соотношений (1.5) и (1.6) легко находим

$$X = \int_{r=r_A}^{r_C} \operatorname{ctg}(\vartheta + \alpha) dr - \int_{r=r_B}^{r_C} \operatorname{ctg}(\vartheta - \alpha) dr \quad (2.4)$$

Уравнение (1.8) позволяет найти

$$\Psi = 0 = \rho_0 \sqrt{\frac{x+1}{2}} \left[\int_{r=r_A}^{r_C} \frac{\tau(\alpha) r dr}{\sin(\vartheta + \alpha)} + \int_{r=r_B}^{r_C} \frac{\tau(\alpha) r dr}{\sin(\vartheta - \alpha)} \right] \quad (2.5)$$

Отметим, что первые из интегралов, входящих в (2.3), (2.4) и (2.5), берутся вдоль известной характеристики AC и поэтому являются функциями только верхнего предела. Вторые интегралы в тех же равенствах берутся вдоль неизвестной характеристики BC ; входящие в эти интегралы функции $\alpha(r)$ и $\vartheta(r)$ подлежат определению, а сами интегралы являются функционалами.

3. Во второе соотношение (1.6) на характеристике второго семейства входит интегрируемая комбинация, которую обозначим

$$d\beta = d\vartheta - \frac{1 + \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} d\alpha.$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\beta = \vartheta + f(\alpha), \quad f(\alpha) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \operatorname{arc tg} \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \operatorname{ctg} \alpha \right) + \alpha + \operatorname{const} \quad (3.1)$$

Для дальнейшего удобнее вместо неизвестных на характеристике второго семейства α , ϑ ввести неизвестные α , β , пользуясь равенствами (3.1).

Перепишем равенства (2.3)—(2.5) и (1.6) в новых обозначениях, опустив некоторые постоянные множители:

$$\bar{\chi} = F_1(r_c) - \int_{r=r_B}^{r_c} \Phi_1(r, \alpha, \beta) dr \quad (3.2)$$

$$X = F_2(r_c) - \int_{r=r_B}^{r_c} \Phi_2(\alpha, \beta) dr \quad (3.3)$$

$$\bar{\Psi} = 0 = F_3(r_c) + \int_{r=r_B}^{r_c} \Phi_3(r, \alpha, \beta) dr \quad (3.4)$$

$$\Phi_4\left(r, \alpha, \beta, \frac{d\beta}{dr}\right) = 0 \quad (3.5)$$

Здесь

$$F_1 = \int_{R=r_A}^{r_c} \sigma(A) \tau(A) \left[\frac{\sin A}{\chi} + \frac{\cos \theta}{\sin(\theta + A)} \right] R dR \quad (3.6)$$

$$F_2 = \int_{R=r_A}^{r_c} \operatorname{ctg}(\theta + A) dR, \quad F_3 = \int_{R=r_A}^{r_c} \frac{\tau(A) R dR}{\sin(\theta + A)}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sigma(\alpha) \tau(\alpha) \left\{ \frac{\sin \alpha}{\chi} - \frac{\cos[\beta - f(\alpha)]}{\sin[\beta - f(\alpha) - \alpha]} \right\} r, & \Phi_2 &= \operatorname{ctg}[\beta - f(\alpha) - \alpha] \\ \Phi_3 &= \frac{\tau(\alpha) r}{\sin[\beta - f(\alpha) - \alpha]}, & \Phi_4 &= \frac{d\beta}{dr} - \frac{\sin[\beta - f(\alpha)] \sin \alpha}{r \sin[\beta - f(\alpha) - \alpha]} \end{aligned} \quad (3.7)$$

где R — радиус, A — угол Маха, θ — угол наклона скорости на характеристике AC .

Формулируем возникающую общую вариационную задачу Лагранжа с изопериметрическими условиями.

При заданных постоянных r_A , r_B , X и входящих в (3.6) функциях $A(R)$, $\theta(R)$ найти функции $\alpha(r)$, $\beta(r)$, реализующие экстремум разности (3.2) при изопериметрических условиях (3.3), (3.4) и удовлетворяющие дифференциальному условию (3.5).

Класс допустимых функций будет определен в дальнейшем при рассмотрении газодинамических особенностей задачи.

Здесь рассматриваются течения без ударных волн внутри области ABC (фиг. 1). Поэтому сразу возникает требование непрерывности функций $\alpha(r)$, $\beta(r)$. Кроме того, должны выполняться условия

$$\alpha(r_c) = A(r_c), \quad \vartheta(r_c) = \theta(r_c) \quad (3.8)$$

выражающие непрерывность угла Маха и наклона скорости в точке C .

Замечание. Отметим прежде всего, что рассматриваемая задача является вырожденной. Действительно, функции Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Φ_4 не содержат производной $d\alpha/dr$, а производную $d\beta/dr$ содержат линейно. Это приводит обычно к неразрешимости вариационной задачи в классическом смысле. Решение задачи полностью или частично может не совпадать с интегралом системы уравнений Эйлера и вместо классического экстремума, при котором первая вариация функционала равна нулю, может иметь место краевой экстремум, определяемый физическими границами области допустимых функций.

4. Будем искать вариацию $\delta\bar{\chi}$, согласную с уравнением (3.5) и условиями (3.3), (3.4), (3.8). Составим сумму:

$$J = F(r_c) + \int_{r=r_B}^{r_c} \Phi \left(r, \alpha, \beta, \frac{d\beta}{dr}, \nu \right) dr \quad (4.1)$$

Здесь

$$F(r_c) = F_1(r_c) + \lambda F_2(r_c) - \mu F_3(r_c)$$

$$\Phi \left(r, \alpha, \beta, \frac{d\beta}{dr}, \nu \right) = - \left[\Phi_1(r, \alpha, \beta) + \lambda \Phi_2(\alpha, \beta) + \mu \Phi_3(r, \alpha, \beta) + \right. \\ \left. + \nu(r) \Phi_4 \left(r, \alpha, \beta, \frac{d\beta}{dr} \right) \right]$$

при этом $\nu(r)$ — переменный, а λ, μ — постоянные множители Лагранжа, подлежащие определению.

Возникает задача об отыскании системы функций $\alpha(r), \beta(r)$, реализующих безусловный экстремум суммы (4.1) и удовлетворяющих условиям (3.8).

При условии $\Phi_4(r, \alpha, \beta, d\beta/dr) = 0$ сумма J отличается от суммы $\bar{\chi}$ на постоянную величину, поскольку $X = \text{const}, \Psi = 0$. Если эти условия выполнить при варьировании, то вариация δJ совпадет с вариацией $\delta\bar{\chi}$, так как $\delta\Phi_4 = \delta X = \delta\Psi = 0$.

При варьировании суммы (4.1) необходимо учесть, что величина r_B задана и поэтому $\delta r_B = 0$. Кроме того, вариации δr_c и $\delta\beta_c$ связаны, поскольку характеристика AC задана. Наконец, производя интегрирование по частям выражения, содержащего производную от вариации $\delta\beta$, получим

$$\delta J = \left\{ \frac{dF}{dr_c} + \Phi + \nu \left[\left(\frac{d\beta}{dr} \right)_1 - \left(\frac{d\beta}{dr} \right)_2 \right] \right\}_{r=r_c} \delta r_c - \nu_B \delta\beta_B + \\ + \int_{r=r_B}^{r_c} \left[\Phi_\alpha \delta\alpha + \left(\Phi_\beta - \frac{d}{dr} \Phi_{\beta'} \right) \delta\beta \right] dr \quad (4.2)$$

Индексами 1 и 2 отмечены производные и вариации, взятые соответственно вдоль характеристик первого и второго семейств.

Тождественное выполнение условий (3.3)—(3.5) приводит к тому, что вариации δJ и $\delta\bar{\chi}$ совпадают при любых значениях $\nu(r)$. Выберем эту функцию так, чтобы в формуле (4.2) пропало выражение с $\delta\beta$. Приравняем нулю члены перед интегралом. Это дает условия

$$\left\{ \frac{dF}{dr_c} + \Phi + \nu \left[\left(\frac{d\beta}{dr} \right)_1 - \left(\frac{d\beta}{dr} \right)_2 \right] \right\}_{r=r_c} = 0, \quad \nu(r_B) = 0 \quad (4.3)$$

и уравнение для определения $\nu(r)$

$$\Phi_\beta - \frac{d}{dr} \Phi_{\beta'} = 0 \quad (4.4)$$

которое должно выполняться тождественно на всей характеристике BC .

Вариация суммы (4.1) принимает вид:

$$\delta\bar{\chi} = \int_{r=r_B}^{r_c} \Phi_\alpha \delta\alpha dr \quad (4.5)$$

Условия (4.3) становятся вместе с (3.8) граничными условиями для определения функций $\alpha(r)$, $\beta(r)$, $\nu(r)$.

Для получения классического экстремума необходимо приравнять нулю выражение [при вариации $\delta\alpha$ в формуле (4.5)]. Вместе с (4.4) и (3.5) это даст систему уравнений.

5. Система уравнений $\Phi_\alpha = 0$, (4.4) и (3.5) в более подробной записи имеет вид:

$$\begin{aligned} & \sigma(\alpha) \tau(\alpha) \left[\frac{x+1}{2} \frac{\sin 2(\beta-f)}{\sin \alpha} - 2(1 + \cos 2\alpha) \cos \alpha \right] + \lambda \frac{\omega(\alpha)}{r} + \\ & + \mu \tau(\alpha) [\omega(\alpha) \cos(\beta-f-\alpha) - (x+1) \operatorname{ctg} \alpha \sin(\beta-f-\alpha)] - \\ & - \frac{\nu}{2r^2} [\sin^2 2\alpha - 2(x - \cos 2\alpha) \sin^2(\beta-f)] = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{1}{\sin^2(\beta-f-\alpha)} \left\{ r\tau(\alpha) [\sigma(\alpha) \cos \alpha - \mu \cos(\beta-f-\alpha)] - \lambda + \frac{\nu}{r} \sin^2 \alpha \right\} \quad (5.2)$$

$$\frac{d\beta}{dr} = \frac{\sin(\beta-f) \sin \alpha}{r \sin(\beta-f-\alpha)} \quad (5.3)$$

где

$$\omega(\alpha) = 1 - x + 2 \cos 2\alpha$$

Обращает на себя внимание тот факт, что уравнение (5.1) не является дифференциальным.

Замечание. Уравнения первого порядка (5.2) и (5.3) дают два произвола в определении функций. Кроме того, еще не определены r_C и значения постоянных λ , μ . Итого в определении функций имеется пять произволов.

Для получения экстремума в классическом смысле необходимо искомые функции подчинить граничным условиям (3.8), (4.3) и изопериметрическим условиям (3.3) и (3.4). Всего это дает шесть условий.

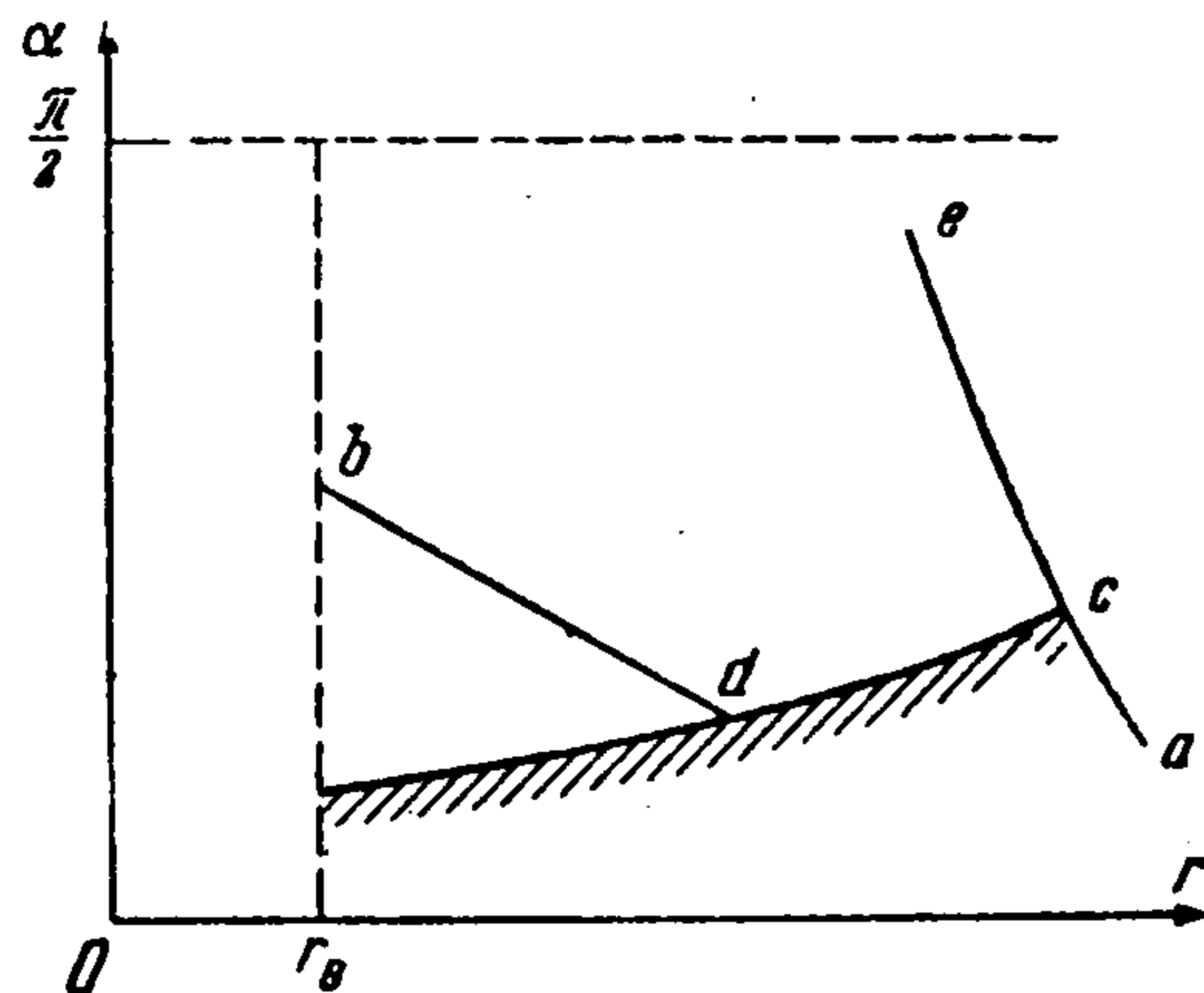
Отсюда становится очевидной неразрешимость задачи, если ставится то условие, что искомые функции на всей характеристике BC должны удовлетворять уравнениям (5.1)–(5.3).

6. Уравнение (5.3) связывает функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$. Если система граничных условий полная, то одна из функций полностью определяет вторую. Рассмотрим зависимость $\alpha(r)$ на характеристике BC и для этого обратимся к фиг. 2. Вид кривой $\alpha(r)$ не играет роли в дальнейших рассуждениях. Для простоты на фиг. 2 изобразим какой-то один из видов поведения $\alpha(r)$. Зависимость $\alpha(r)$ на характеристике AE изобразится кривой ae .

Рассматриваемая теория пригодна только для сверхзвуковых течений. Поэтому верхней естественной границей области изменения α является линия $\alpha = \frac{1}{2}\pi$.

Нижнюю границу области можно определить, рассматривая газодинамические особенности задачи. Все возможные зависимости $\alpha(r)$ на характеристике BC можно получать только изменением границы потока — образующей тела AB (фиг. 1). Подчеркнем, что рассматриваются газовые потоки, имеющие только одну границу AB и не содержащие ударных волн в треугольнике ABC .

Всякому значению $r=r_c$ на заданной характеристике AE соответствует вполне определенное значение $\alpha=\alpha_c$. Необходимо найти такой поток газа, для которого кривая $\alpha(r)$ на характеристике DC будет расположена ниже всех прочих возможных кривых. Физически очевидно, что наибольшее расширение потока обеспечивает наличие излома образующей AB в точке A . В этом случае^[4, 5] характеристики первого семейства расходятся пучком из точки A (фиг. 1) до некоторой характеристики AD , на которой в точке A угол наклона скорости совпадает с углом касательной к контуру AB в точке A . Характеристика AD является линией слабого разрыва в области течения. Пусть на фиг. 2 зависимость $\alpha=\alpha_*(r)$ на характеристике второго семейства CD такого потока изображается кривой cd .



Фиг. 2

Характеристика CB тогда состоит из участка CD , не совпадающего с экстремальным, и экстремального участка DB .

Допустимой функцией $\alpha(r)$ будем называть непрерывную функцию, удовлетворяющую неравенству $\alpha_*(r) \leq \alpha(r) \leq 1/2\pi$. Допустимая функция $\beta(r)$ тем самым тоже полностью определяется.

7. Учитывая выясненные особенности характеристики BC , выведем граничные условия для участка характеристики BD (фиг. 1).

Сумму (4.1) запишем в виде

$$J = F(r_c) + \int_{r=r_B}^{r_D} \Phi dr + \int_{r=r_D}^{r_0} \Phi dr \quad (7.1)$$

Рассмотрим второй интеграл из (7.1). При варьировании верхнего предела допустимы только вариации вдоль заданной характеристики AE . Вариация нижнего предела разбивается на две. Допустимо, во-первых, варьирование r_D вдоль характеристики второго семейства, т. е. варьирование области, занятой пучком характеристик. Во-вторых, допустимо варьирование r_D вдоль характеристики первого семейства, но это варьирование уже нельзя производить независимо от варьирования r_c , поскольку задание r_c полностью определяет всю характеристику DC . В связи с этим второй интеграл из (7.1) удобнее варьировать как целое, как функцию от r_c , не забывая, конечно, и варьирования вдоль характеристики второго семейства. Вариацию этого интеграла легко получить, рассматривая интеграл типа (7.1) по контуру ADC при фиксированных характеристиках AC и AD : При этом интеграл по DC выражается через интегралы по AC и AD .

Необходимо также иметь в виду, что на BC все функции непрерывны. Из (3.5) тогда следует и непрерывность производной $d\beta/dr$.

Производя все необходимые выкладки и учитывая непрерывность α , β , $d\beta/dr$, придем к выражению для δJ , совпадающему с (4.2), если в последнем точку C заменить точкой D . Произвол в выборе характеристики AD делает задачу разрешимой.

Система уравнений для построения характеристики BD остается неизменной и совпадает с (5.1)—(5.3).

Приравнивая нулю выражения, стоящие перед интегралом в выражении для δJ , получаем

$$\left\{ \frac{dF(r_D)}{dr_D} + \Phi + \nu \left[\left(\frac{d\beta}{dr} \right)_1 - \left(\frac{d\beta}{dr} \right)_2 \right] \right\}_{r=r_D} = 0 \quad (7.2)$$

$$\nu(r_B) = 0 \quad (7.3)$$

Равенства (3.3), (3.4), (3.8), (7.2) и (7.3) образуют полную систему граничных условий для решения задачи.

8. На характеристике BD , обеспечивающей минимум сопротивления (фиг. 1), должны выполняться уравнения (5.1)—(5.3) при граничных условиях (3.8), (7.2) в точке D и условии (7.3) в точке B . Введем произвольную характеристику первого семейства GF . Участок образующей GB не влияет на течение слева от GF . Поэтому часть образующей GB должна обладать минимальным сопротивлением при заданной характеристике GF и точках G и B (в противном случае уменьшение сопротивления участка GB уменьшает сопротивление всей образующей AB). На участке характеристики FB выполняются уравнения (5.1)—(5.3), а в точке B — условие (7.3). Следовательно, в точке F должно выполняться условие трансверсальности (7.2), записанное для $r=r_F$. Это условие в силу произвольности выбранной характеристики GF выполняется и на всей характеристике BD . Поэтому оно должно являться интегралом системы (5.1)—(5.3). В развернутой форме (7.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \tau(\alpha) r \left[\frac{1}{\sin(\vartheta + \alpha)} + \frac{1}{\sin(\vartheta - \alpha)} \right] [\mu - \sigma(\alpha) \cos \vartheta] - \\ & - \lambda [\operatorname{ctg}(\vartheta + \alpha) - \operatorname{ctg}(\vartheta - \alpha)] + \nu \left[\left(\frac{d\beta}{dr} \right)_1 - \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{r \sin(\vartheta - \alpha)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

Исключим из равенств (5.1), (5.2) и (8.1) величины λ , μ . В результате получим линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка для определения $\nu(r)$. Вспоминая условие (7.3), сразу заключаем, что

$$\nu(r) \equiv 0 \quad (8.2)$$

Два найденных интеграла системы уравнений удовлетворяют граничным условиям и вместе с (5.1) позволяют найти выражения для $\alpha(r)$, $\vartheta(r)$. Вместо уравнения (5.1) проще использовать уравнение (5.2), подставив в него $\nu = 0$:

$$r\tau(\alpha) [\sigma(\alpha) \cos \alpha - \mu \cos(\vartheta - \alpha)] = \lambda \quad (8.3)$$

Исключая λ из (8.1) и (8.3), получим

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-\cos 2\alpha}} \frac{\cos(\vartheta + \alpha)}{\cos \alpha} = \mu \quad (8.4)$$

Подстановка ϑ из (8.4) в (8.3) дает уравнение, связывающее α и r :

$$\begin{aligned} & r \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} \right)^{\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1}} \sqrt{\frac{x - \cos 2\alpha}{x+1}} \left[\frac{(x+1) \cos \alpha}{x - \cos 2\alpha} - \right. \\ & \left. - \mu^2 \cos \alpha \cos 2\alpha - \mu \sin 2\alpha \sqrt{\frac{x+1}{x - \cos 2\alpha} - \mu^2 \cos^2 \alpha} \right] = |\lambda| \end{aligned} \quad (8.5)$$

Наконец, исключая μ из (8.1) и (8.3), получим равенство

$$r \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} \right)^{\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1}} \sqrt{\frac{x+1}{x - \cos 2\alpha}} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \alpha} = \lambda \quad (8.6)$$

которое позволяет записать выражение $\vartheta(\alpha)$:

$$\vartheta = \text{sign } \vartheta_D \left| \arcsin \left[\sqrt{\frac{|\lambda| \cos \alpha}{r} \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} \right)^{-\frac{1}{4} \frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{x - \cos 2\alpha}{x+1} \right)^{\frac{1}{4}}} \right] \right| \quad (8.7)$$

В последней формуле величине ϑ приписан знак ϑ_D по следующим соображениям. Величина λ постоянна. Если величины $\alpha \neq 1/2\pi$ и $\vartheta_D \neq 0$, то величина ϑ не равна нулю нигде на характеристике BD , как это следует из (8.6), и, будучи непрерывной функцией, не меняет знака. Если $\vartheta = 0$ в одной точке, то $\vartheta \equiv 0$ на всей характеристике BD .

Величины x и ψ на характеристике BD легко выражаются в квадратурах при помощи равенств (1.6) и (1.8).

Найденные формулы действительно дают решение задачи. В этом можно убедиться непосредственной проверкой.

Величины λ и μ находятся по известным r , α , ϑ в какой-либо точке из формул (8.6) и (8.4).

Интересно отметить, что любая линия тока HF полученного поля движения газа (фиг. 1) является экстремальной при заданной характеристике AD и точках H и F , поскольку на характеристике DF выполняются уравнения (5.1)—(5.3) и все граничные условия.

Образующая AB находится решением задачи Гурса между характеристикой AD и известной теперь характеристикой BD .

9. До сих пор рассматривались необходимые условия экстремума. В рассматриваемой задаче необходимо получить минимум суммы $\bar{\chi}$. Обратимся снова к фиг. 2 и вспомним выражение (4.5) для $\delta\bar{\chi}$.

Пусть найдено решение, удовлетворяющее уравнениям (5.1)—(5.3) и всем граничным условиям. В силу уравнения (5.1) на всей кривой bd выполняется равенство $\Phi_\alpha = 0$. При этом на кривой cd , вообще говоря, $\Phi_\alpha \neq 0$. Минимум суммы $\bar{\chi}$ будет иметь место в том случае, если $\Phi_\alpha > 0$ при $\delta\alpha > 0$ и $\Phi_\alpha < 0$ при $\delta\alpha < 0$. Действительно, тогда при $\delta\alpha > 0$ на кривой bd имеем $\delta\bar{\chi} > 0$, при $\delta\alpha < 0$ имеем $\delta\bar{\chi} > 0$, как это следует из равенства (4.5). Кроме того, на кривой cd в этом случае $\Phi_\alpha \geq 0$. Противный случай невозможен, так как на кривой cd имеют место наименьшие из всех возможных значения $\alpha(r)$. В силу такой особенности кривые cd допустимые вариации на ней $\delta\alpha > 0$. Из $\Phi_\alpha \geq 0$ и (4.5) следует, что такие допустимые вариации ведут к $\delta\bar{\chi} > 0$. Здесь имеет место краевой экстремум, т. е. экстремум, существующий только из-за положительности допустимых вариаций $\delta\alpha$.

Проверим возможность такого варьирования полученной кривой cdb , при котором сумма $\bar{\chi}$ уменьшается. На участке cd за исключением точки d допустимые вариации $\delta\alpha > 0$ ведут, как было выяснено, к $\delta\bar{\chi} > 0$ в силу $\Phi_\alpha > 0$. Знак Φ_α можно проверить, например, непосредственным вычислением Φ_α на cd . В точке d всякий бесконечно малый элемент кривой $\alpha(r)$, не совпадающий по направлению с db , приводит к $\delta\bar{\chi} > 0$, если $\Phi_{\alpha\alpha} > 0$. В самом деле, в силу равенства (3.5) вариация $\delta\beta$ имеет

более высокий порядок малости, чем вариация $\delta\alpha$, поэтому знак величины Φ_α на рассматриваемом элементе кривой обуславливается знаком $\Phi_{\alpha\alpha}$. Таким образом, минимум $\bar{\chi}$ обеспечивается совпадением этого элемента с элементом кривой db . Для следующей точки действительны те же рассуждения. Переходя от точки к точке, убеждаемся, что вся кривая cdb обеспечивает минимум $\bar{\chi}$.

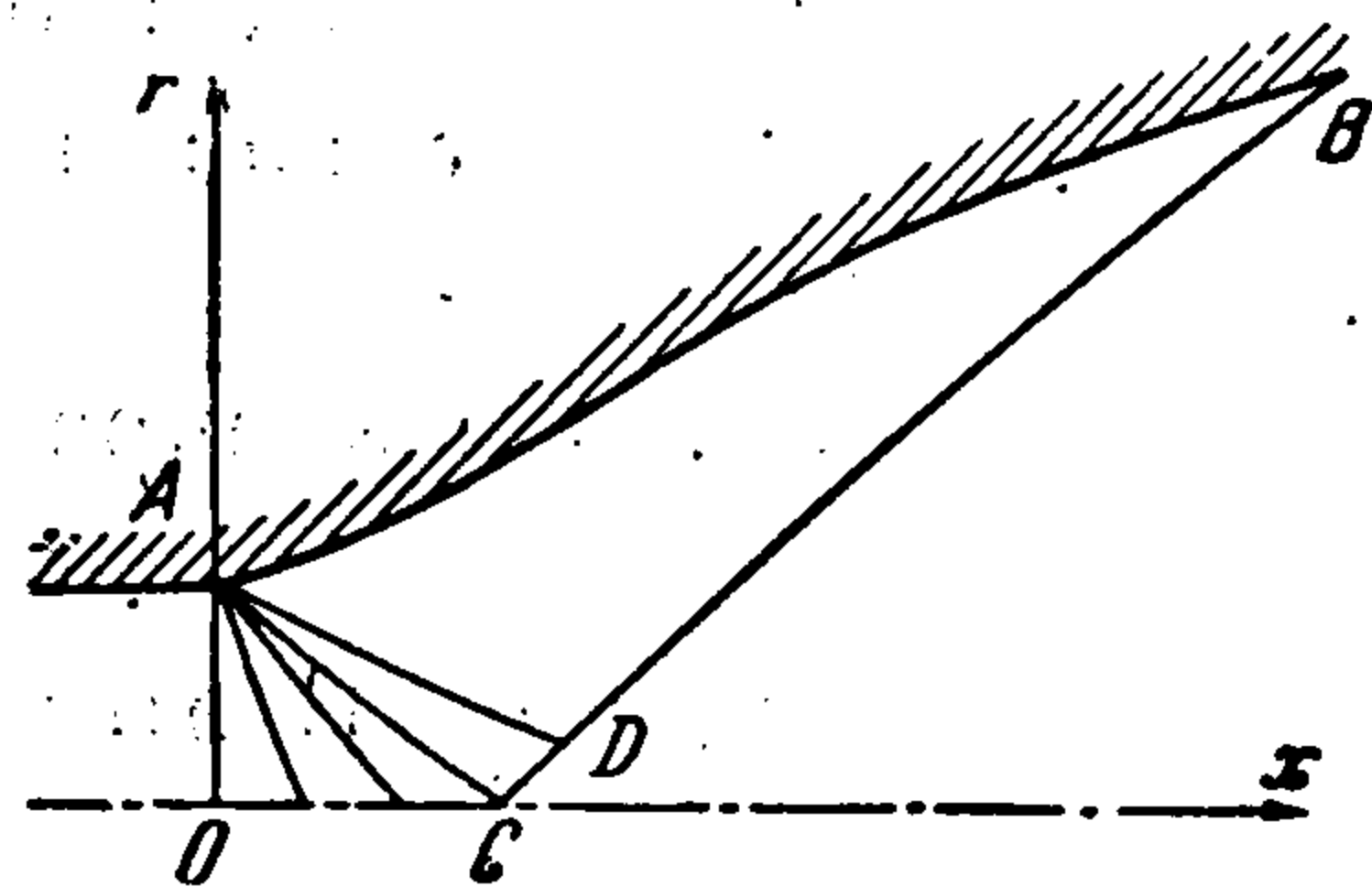
Необходима также проверка смысла экстремума по граничным условиям.

Если граничные условия (7.2) и (7.3) при выполнении условий (3.3), (3.4), (3.8) и уравнений задачи дают минимальное значение $\bar{\chi}_{\min}$, то должно быть

$$\bar{\chi} > \bar{\chi}_{\min} \quad \text{при} \quad v_B \neq 0 \quad (9.1)$$

при соблюдении условий (7.2), (3.3), (3.4), (3.8) и уравнений (5.1)—(5.3) и

$$\bar{\chi} > \bar{\chi}_{\min} \quad (9.2)$$



Фиг. 3

$$\left\{ \frac{dF(r_D)}{dr_D} + \Phi + v \left[\left(\frac{d\beta}{dr} \right)_1 - \left(\frac{d\beta}{dr} \right)_2 \right] \right\}_{r=r_D} \neq 0$$

при соблюдении условий (7.3), (3.3), (3.4), (3.8) и уравнений (5.1)—(5.3).

Неравенства (9.1) и (9.2) также допускают проверку при проведении расчетов. В обоих случаях, конечно, всем условиям можно удовлетворить лишь при выборе некоторой новой точки D в пучке характеристик.

10. Рассмотрим задачу о сопле. Эта задача решается совершенно аналогично. Подробно она рассмотрена и сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям в работе [2]. И в этом случае укажем решение в конечном виде. Функции $\alpha(r)$, $\vartheta(r)$ на характеристике BD (фиг. 3) находятся из тех же равенств (8.5) и (8.7). Таблицы газодинамических функций в области $A OCD$ для случая плоской переходной поверхности даны в работе [6].

11. В случае вихревого течения также можно получить простые соотношения на искомой характеристике. В качестве независимой переменной в этом случае необходимо выбрать функцию тока ψ .

На искомой характеристике AC должна быть задана энтропийная функция

$$\varphi(\psi) = p^{\frac{1}{x-1}} \rho^{-\frac{x}{x-1}}$$

Задача определения тела, обладающего наименьшим сопротивлением, сводится при заданных функциях $A(\psi)$, $\theta(\psi)$, $\varphi(\psi)$, $R(\psi)$ и величинах X , r_A , r_B к определению функций $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $r(\psi)$, реализующих минимум функционала

$$\bar{\chi} = \int_{\psi=0}^{\psi_c} \left\{ \sqrt{\frac{x+1}{x-\cos 2A}} \left[\cos \theta + \frac{1}{x} \sin A \sin(\theta + A) \right] - \sqrt{\frac{x+1}{x-\cos 2\alpha}} \left[\cos \vartheta - \frac{1}{x} \sin \alpha \sin(\vartheta - \alpha) \right] \right\} d\psi$$

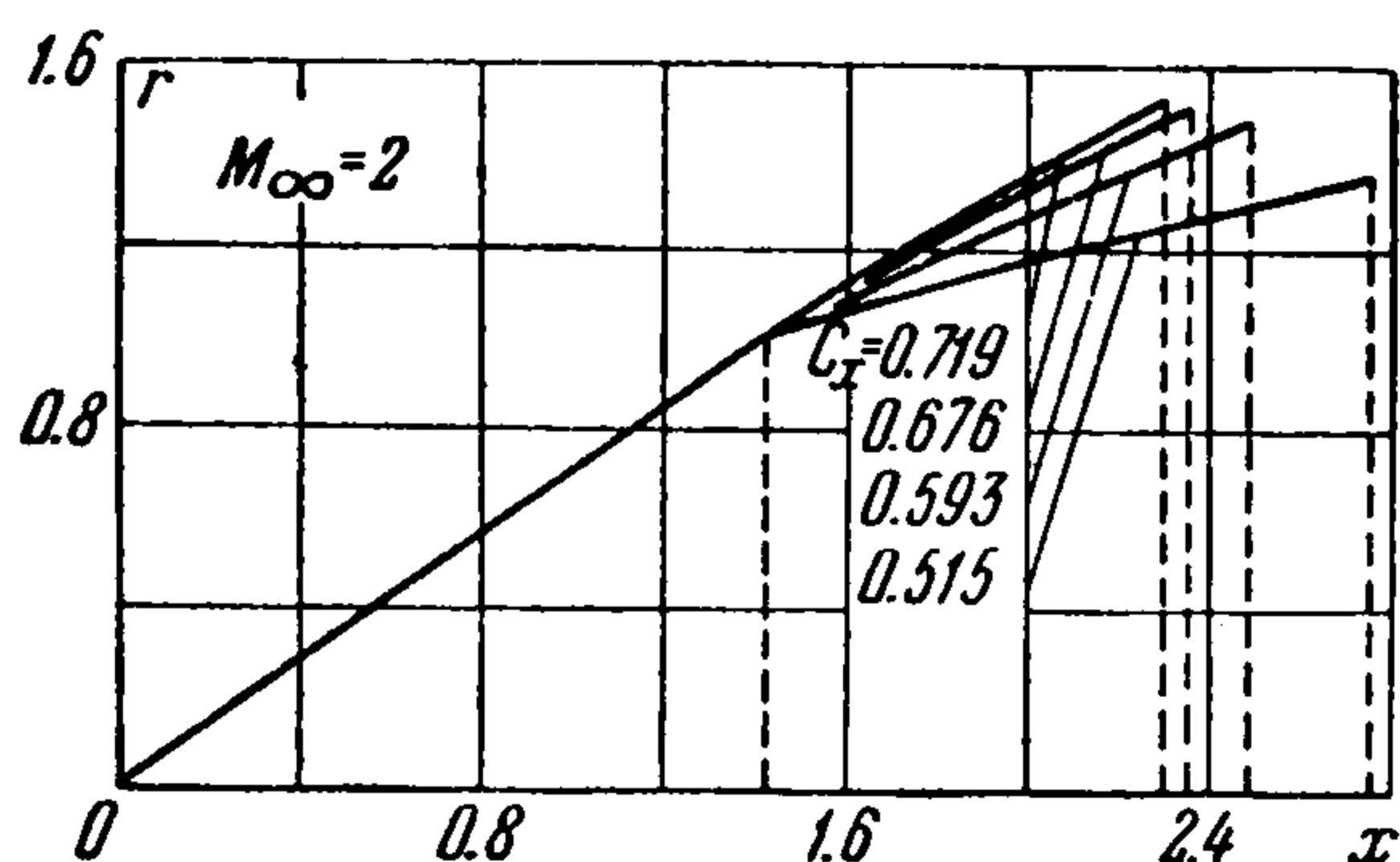
при изопериметрическом условии

$$X = \int_{\psi=0}^{\psi_c} \frac{\varphi(\psi)}{\sqrt{x}} \left[\frac{\cos(\vartheta + A)}{R} \left(\frac{x+1}{2x} \frac{1 - \cos 2A}{x - \cos 2A} \right)^{-\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1}} + \right. \\ \left. + \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{r} \left(\frac{x+1}{2x} \frac{1 - \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} \right)^{-\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1}} \right] d\psi$$

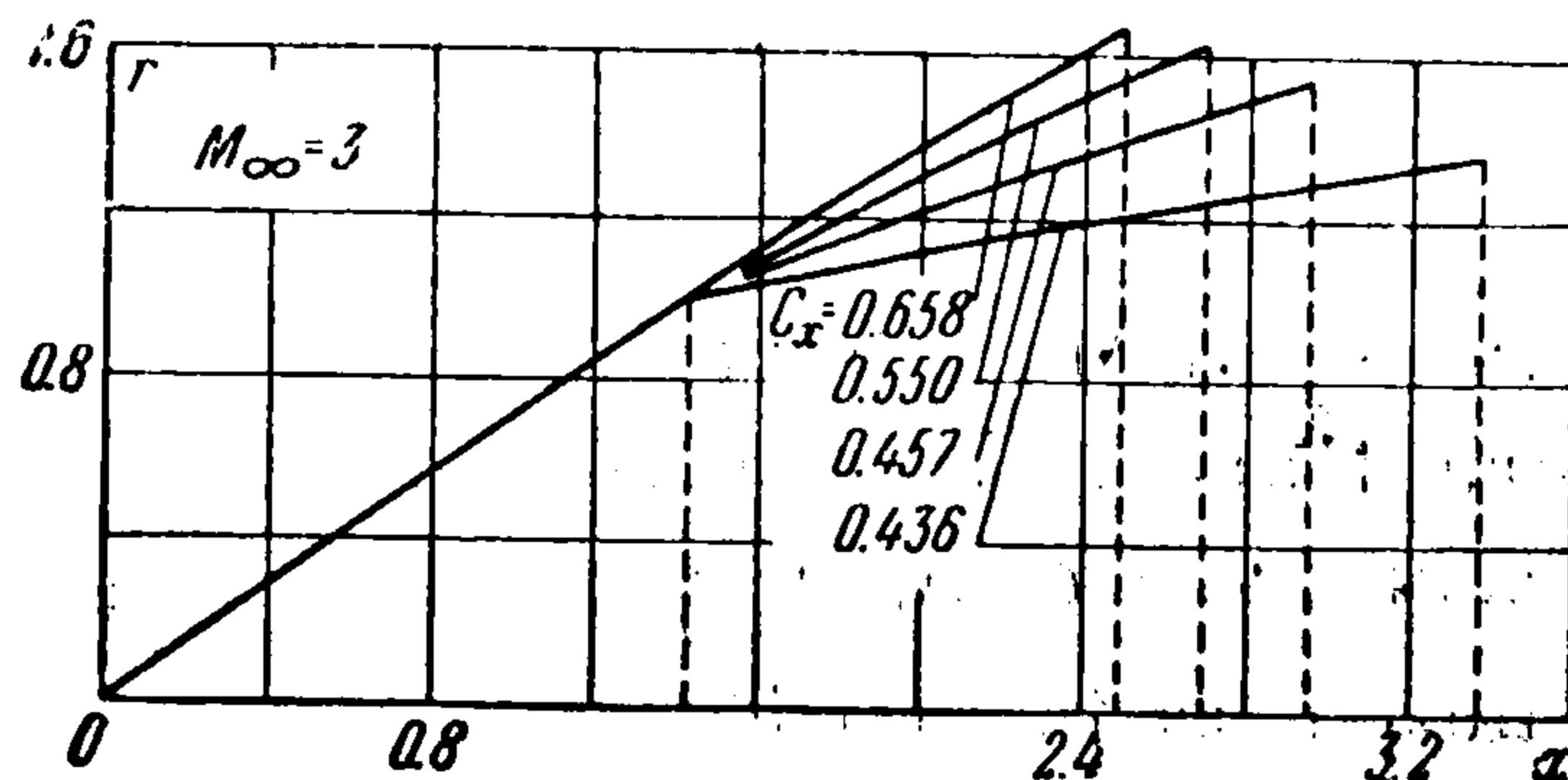
и двух дифференциальных условиях

$$\frac{dr}{d\psi} + \frac{\varphi(\psi)}{\sqrt{x}r} \left(\frac{x+1}{2x} \frac{1 - \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} \right)^{-\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1}} \sin(\vartheta - \alpha) = 0 \\ \frac{d\vartheta}{d\psi} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} \frac{d\alpha}{d\psi} - \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{r \sin(\vartheta - \alpha)} \frac{dr}{d\psi} + \frac{\sin 2\alpha}{2x} \frac{d \ln \varphi}{d\psi} = 0 \quad (11.1)$$

Не повторяя рассуждений, аналогичных предыдущим, приведем окончательные результаты.

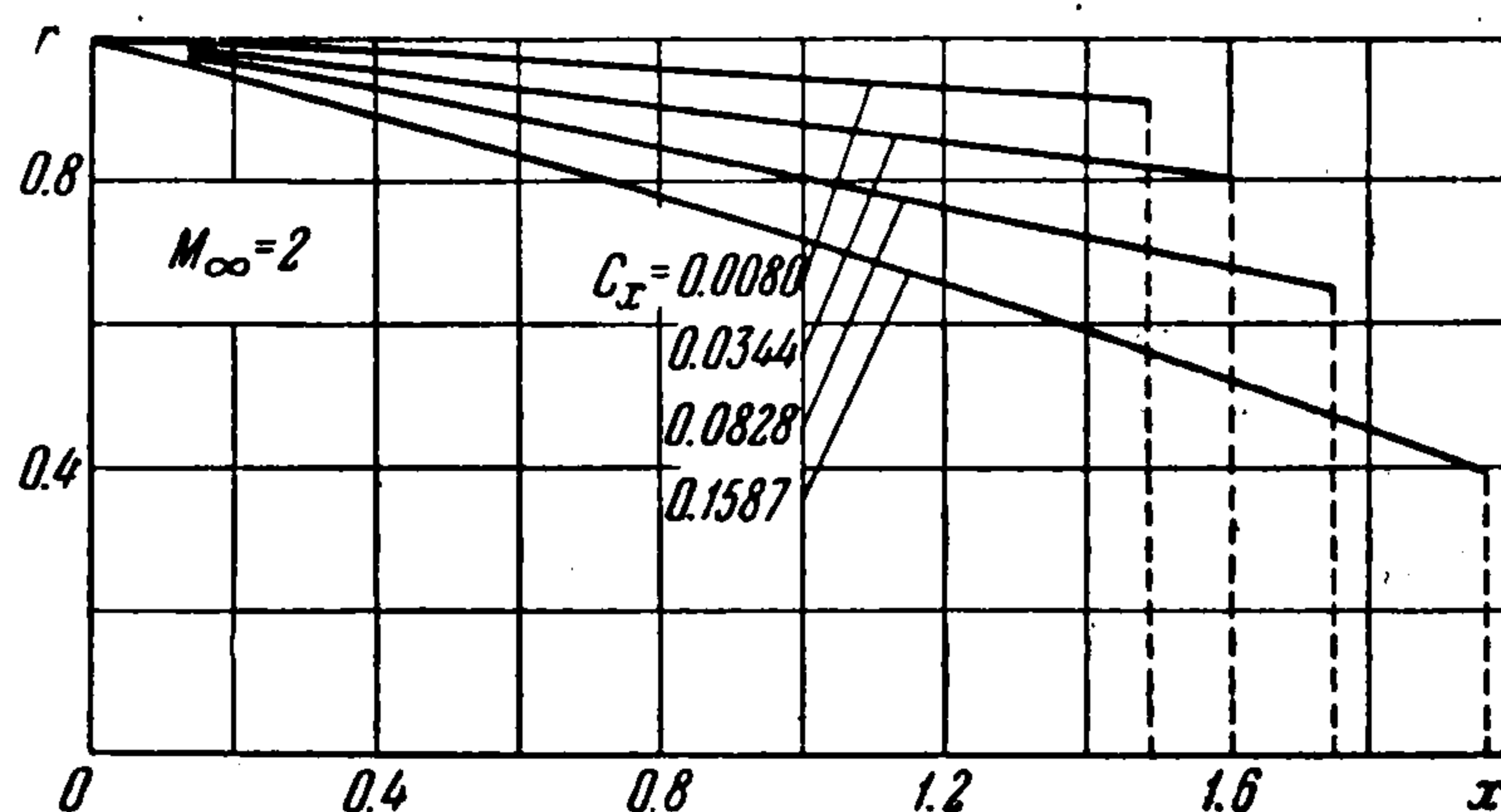


Фиг. 4



Фиг. 5

Искомая характеристика BC состоит из неэкстремального участка CD , являющегося характеристикой предельного течения разрежения, и



Фиг. 6

экстремального участка BD . На этом участке искомые функции связаны следующими соотношениями:

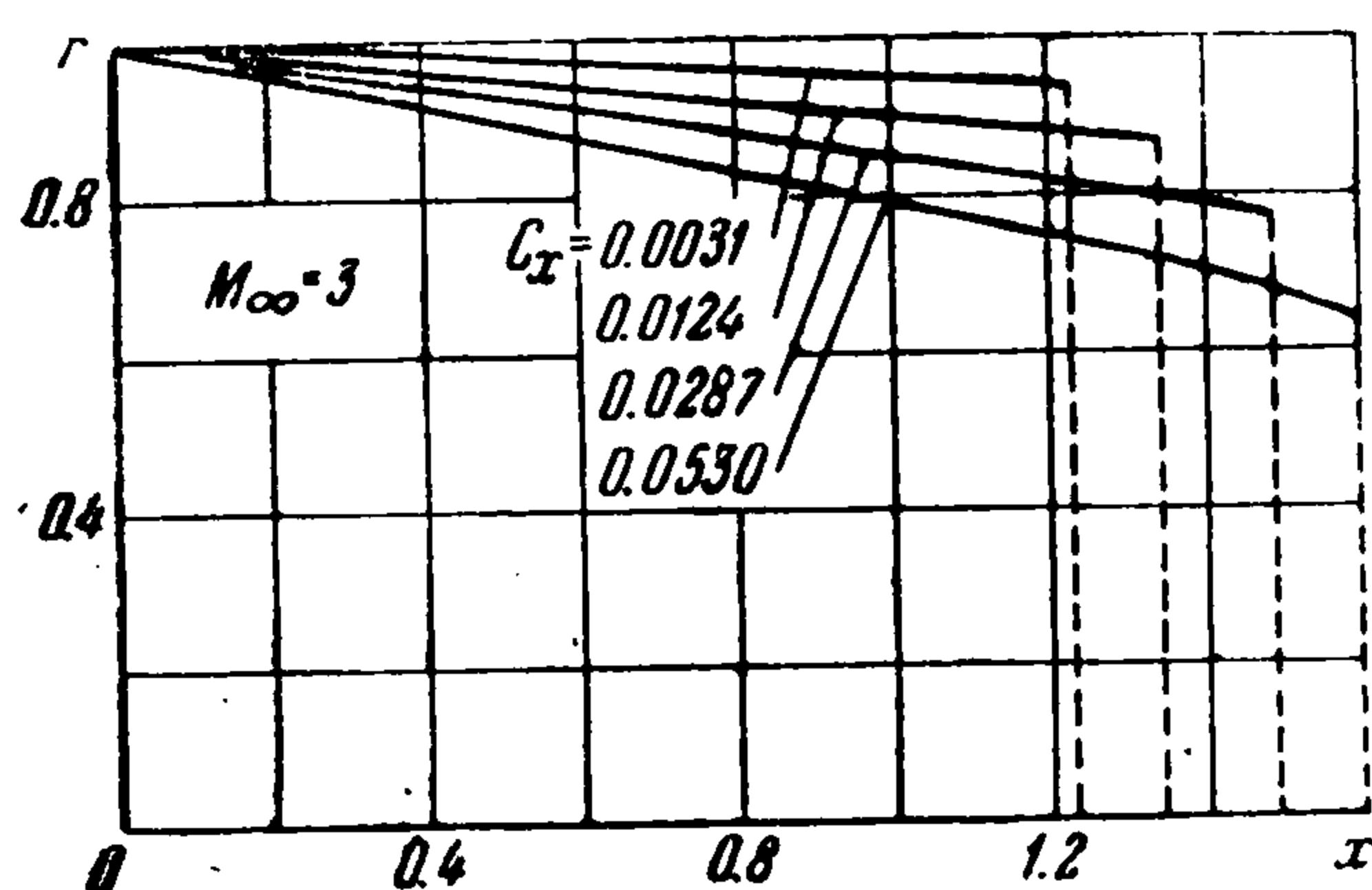
$$|\lambda| \left(\sin 2\vartheta + \frac{1}{x} \sin 2\alpha \right) + \mu (1 - \cos 2\vartheta) = 0 \\ \frac{|\lambda| \varphi(\psi) \cos \alpha}{\sqrt{x} r} \left(\frac{x+1}{2x} \frac{1 - \cos 2\alpha}{x - \cos 2\alpha} \right)^{-\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x - \cos 2\alpha}} \sin^2 \vartheta = 0$$

Здесь λ — постоянный, μ — переменный множители Лагранжа. Величины λ и $\mu(\psi_D)$ определяются из последних соотношений по известным

величинам α , ϑ , r , ψ в точке D . Функция $r(\psi)$ определяется дифференциальным уравнением (11.1), а $\mu(\psi)$ — уравнением

$$\frac{d\mu}{d\psi} = -\frac{\varphi(\psi)}{\sqrt{x} r^2} \left(\frac{x+1}{2x} \frac{1-\cos 2\alpha}{x-\cos 2\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} [|\lambda| \cos(\vartheta - \alpha) + \mu \sin(\vartheta - \alpha)]$$

12. Для иллюстрации метода рассчитанные образующие тел вращения изображены на фигурах. Тела, имеющие заданный головной конус, изображены на фиг. 4 и 5. Полуугол раствора конуса равен 35° . Кор-



Фиг. 7

мовые части полубесконечного цилиндра изображены на фиг. 6 и 7. Числа Маха набегающего потока M_∞ и коэффициенты волнового сопротивления тел c_x приведены на фигурах.

Поступила 12 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Н и к о л ь с к и й А. А. О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке. Труды ЦАГИ, 1950.
2. Guderley G., Hantsch E. Zeitschrift für Flugwissenschaften, Н. 9, September 1955.
3. О х о ц и м с к и й Д. Е. К теории движения ракет. ПММ, т. X, вып. 2, 1946.
4. Д о р о д н и ц ы н А. А. Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа. Труды ЦАГИ, 1950.
5. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Расчет осесимметричных сверхзвуковых потоков газа в окрестности излома образующей тела вращения. Труды ЦАГИ, 1950.
6. К а ц к о в а О. Н., Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью (таблицы). Вычислительная математика, 2 сборник, Изд. АН СССР, 1957.