Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

Г. И. Петров

(Москва)

§ 1. Требуется найти собственные числа λ_k такие, чтобы на интервале a, b функции $U_k(\lambda_k, x)$, удовлетворяющие линейному функциональному уравнению

$$L(\lambda, U) = l(U) - l_\lambda(\lambda, U) = 0 \tag{1.1}$$

и соответствующей системе однородных граничных условий на концах интервала, были не всюду равны нулю; здесь $l(U)$ — линейный оператор, содержащий производные высшего порядка, $l_\lambda(\lambda, U)$ — линейный оператор, коэффициенты которого зависят от λ. Следуя методу Галеркина, представим приближенное выражение для собственной функции

$$U^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \varphi_i \tag{1.2}$$

Здесь φ_i — полная система функций, удовлетворяющая граничным условиям рассматриваемой задачи.

Пусть ψ_i — замкнутая система функций на том же интервале, удовлетворяющая граничным условиям, сопряженным φ_i.

Системы функций φ_i и ψ_i ортогонализированы и нормированы так, что

$$\int_a^b \psi_i l(\varphi_k)\, dx = \int_a^b \varphi_k l^*(\psi_i)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i \\ \mu_i & \text{при } k = i \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь l^* — оператор, сопряженный l. Как показано в работе [1]:

$$U_1^{(n)} \to U_1, \qquad \lambda_1^{(n)} \to \lambda_1 \qquad \text{при } n \to \infty$$

если коэффициенты $a_i^{(n)}$ в выражении (1.2) будут найдены из системы линейных однородных уравнений

$$\mu_i a_i^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}(\lambda)\, a_k^{(n)} = 0, \qquad \gamma_{ik} = \int_a^b \psi_i l_\lambda(\lambda, \varphi_k)\, dx \tag{1.4}$$

и $\lambda_1^{(n)}$ определены как корни дискриминантного уравнения однородной системы (1.4)

$$\Delta(\lambda, \gamma_{ik}) = 0 \tag{1.5}$$

при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\gamma_{ik}}{\mu_i} \right|^2 < \infty \qquad \text{при } n \to \infty \tag{1.6}$$

Условие (1.6) всегда выполнено, если существует функция $g(x, t)$ такая, что

$$\varphi_i = \int_a^b g(x, t) f_i(t)\, dt, \ (l(\varphi_i) = f_i), \qquad \int_a^b \int_a^b |l_\lambda(g(x, t))|^2\, dxdt < \infty \tag{1.7}$$

так как сумма (1.6) есть сумма обобщенных коэффициентов Фурье для $l_\lambda(g)$ и биортогональной системы функций $\omega_{ki} = \psi_k(t) f_i(x)$ в области $a < x < b$, $a < t < b$ и существует неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\gamma_{ik}}{\mu_i} \right|^2 < C \int_a^b \int_a^b |l_\lambda(g)|^2\, dx\, dt \tag{1.8}$$

§ 2. Коэффициенты $a_i^{(n)}$ для приближенного представления (1.2) собственной функции системы (1.1) определяются из усеченной системы (1.4), а соответствующее приближенное значение собственного числа $\lambda_1^{(n)}$ — из соответствующего дискриминанта.

При этом не предполагается, что собственные числа λ являются действительными. Положим

$$l_\lambda(\lambda, U) = m(U) + \lambda k(U) \tag{2.1}$$

где $m(U)$ и $k(U)$ — линейные операторы.

Система функций $U^{(n)}$, $\varphi_i, \ldots$ является замкнутой системой, удовлетворяющей граничным условиям рассматриваемой задачи.

Точное значение λ может быть определено как корень детерминанта бесконечного порядка (1.5).

Элементами первого столба детерминанта (1.5) будут

$$\gamma_{i1} = \int_a^b \psi_i L(\lambda, U^{(n)})\, dx \tag{2.2}$$

Коэффициенты в выражении (1.2) определяются из условия

$$\int_a^b \psi_i L_1(\lambda, U^{(n)})\, dx = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

при $\lambda = \lambda_1^{(n)}$. Следовательно, n первых элементов первого столбца могут быть представлены как

$$\gamma_{i1} = (\lambda - \lambda_1^{(n)}) \int_a^b \psi_i k(U_1^{(n)})\, dx \qquad (i \leqslant n) \tag{2.4}$$

Для $i > n$ согласно условию (1.3)

$$\gamma_{i1} = \int_a^b \psi_i\, [m(U_1^{(n)}) + \lambda k(U_1^{(n)})]\, dx \tag{2.5}$$

Разложим детерминант (1.5) по элементам первой строки. Если $\lambda = \lambda_1$ — точному значению корня детерминанта, то, перенеся все слагаемые полученной суммы, кроме первого, в правую часть и поделив на минор первого элемента, мы получим выражение для модуля разности точного и приближенного значения:

$$|\lambda_1 - \lambda_1^{(n)}|\, |k_{11}| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{1k} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{11}} \right|, \qquad k_{11} = \int_a^b \psi_1 k(U^{(n)})\, dx \tag{2.6}$$

Здесь Δ_{1k} — миноры элементов первой строки.

Пусть $C_k = \Delta_{1k}/\Delta_{11}$ есть решения системы линейных уравнений

$$C_k\mu_k - \sum_{s=2}^{\infty} C_s\gamma_{ks} = \gamma_{k1} \qquad (k=2, \dots) \tag{2.7}$$

Тогда

$$|\lambda_1 - \lambda_1^{(n)}|\,|k_{11}| < \left(\sum_{k=2}^{\infty} |\gamma_{1k}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=2}^{\infty} |C_k|^2\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

Если

$$D = 1 - \left(\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty} \left|\frac{\gamma_{ks}}{\mu_k}\right|^2\right)^{1/2} > 0$$

то из (2.7)

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} |C_k|^2\right)^{1/2} < \frac{1}{D}\left(\sum_{s=2}^{\infty} \left|\frac{\gamma_{k1}}{\mu_k}\right|^2\right)^{1/2} \tag{2.9}$$

$$\int_a^b \psi_k l_\lambda (\lambda_1^{(n)}, U_1^{(n)})\, dx + (\lambda_1 - \lambda_1^{(n)}) \int_a^b \psi_k k (U_1^{(n)})\, dx = m_k + (\lambda_1 - \lambda_1^{(n)})\, k_k \tag{2.10}$$

$m_k = 0$ для $k < n$.

Тогда.

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} \left|\frac{\gamma_{k1}}{\mu_k}\right|^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{m_{k1}}{\mu_k}\right|^2\right)^{1/2} + |\lambda_1 - \lambda_1^{(n)}| \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left|\frac{k_{k1}}{\mu_k}\right|^2\right)^{1/2} \tag{2.11}$$

Из очевидных соотношений

$$|\gamma_{ik}| < |m_{ik}| + |\lambda|\,|k_{ik}|$$

$$m_{ik} = \int_a^b \psi_i m(\varphi_k)\, dx, \qquad k_{ik} = \int_a^b \psi_i k(\varphi_k)\, dx$$

следует

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} |\gamma_{1k}|^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{k=2}^{\infty} |m_{1k}|^2\right)^{1/2} + |\lambda_1| \left(\sum_{k=2}^{\infty} |k_{1k}|^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty} \left|\frac{\gamma_{ik}}{\mu_i}\right|^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty} \left|\frac{m_{ik}}{\mu_i}\right|^2\right)^{1/2} + |\lambda_1| \left(\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty} \left|\frac{k_{ik}}{\mu_i}\right|^2\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

Из соотношения (2.8) и оценок (2.9), (2.11), (2.12) получим

$$\frac{|\lambda_1 - \lambda_1^{(n)}|}{\lambda_1^{(n)}} < \frac{M(M_1 + |\lambda_1|\,|k_1|)}{|\lambda_1^{(n)}|\,[\,|k_{11}|(1 - M_2 - |\lambda_1|\,k_2) - (M_1 + |\lambda_1|\,k_1)\,k]} \tag{2.13}$$

где

$$M = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{m_{k1}}{\mu_k}\right|^2\right)^{1/2}, \qquad M_1 = \left(\sum_{k=2}^{\infty} |m_{1k}|^2\right)^{1/2}, \qquad M_2 = \left(\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty} \left|\frac{m_{ik}}{\mu_i\, k}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$k = \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left|\frac{k_{k1}}{\mu_k}\right|^2\right)^{1/2}, \qquad k_1 = \left(\sum_{k=2}^{\infty} |k_{1k}|^2\right)^{1/2}, \qquad k_2 = \left(\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty} \left|\frac{k_{ik}}{\mu_i}\right|^2\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

если знаменатель правой части больше нуля.

Заметим, что неизвестная величина модуля собственного числа в правую часть неравенства (2.13) входит так, что от замены ее на бо́льшую неравенство усиливается.

Заменим $|\lambda_1|$ величиной

$$N|\lambda_1^{(n)}| \geqslant |\lambda_1^{(n)}| + |\lambda_1 - \lambda_1^{(n)}|$$

т. е. величиной, заведомо большей верхней границы для величины $|\lambda_1|$.

Число $N > 1$ можно найти из условия

$$N - 1 = \frac{M(M_1 + |x||k_1|)}{|\lambda_1^{(n)}|[|k_{11}|(1 - M_2 - |x|k_2) - (M_1 + |x|k_1)k]} \tag{2.15}$$

подставив $x = N|\lambda_1^{(n)}|$ в правую часть.

Если можно найти корень N^* знаменателя правой части уравнения (2.15) такой, что $1 < N^* < N_1$, то

$$R = |\lambda_1^{(n)}||N^* - 1|$$

есть радиус круга с центром в точке

$$\lambda_1^{(n)} = \lambda_{1r}^{(n)} + i\lambda_{1i}^{(n)}$$

внутри которого лежит точное значение λ_1, т. е. оценка может быть получена только для достаточно малых M, M_1, M_2, k_1, k_2.

§ 3. Если для однородной дифференциальной системы $l(U)$ с граничными условиями (1.1) можно построить симметричную функцию Грина $g(x, t)$ и выполняется соотношение

$$\int_a^b \varphi_i l_\lambda(\varphi_k)\,dx = \int_a^b \varphi_k l_\lambda^*(\varphi_i) \tag{3.1}$$

где l_λ^* — оператор сопряженный l_λ, то возможно выбрать ортогональную нормированную систему φ_i, удовлетворяющую интегральному уравнению

$$\varphi_i = \mu_i \int_a^b g(x, t)\,dt$$

или дифференциальному уравнению

$$l(\varphi_i) - \mu_i\varphi_i = 0$$

при граничных условиях (1.1), и положить, что $\psi_i = \varphi_i$.

Эти системы функций удовлетворяют всем необходимым условиям для их применения.

При сделанных предположениях, величины, входящие в неравенство (2.14), могут быть выражены следующим образом:

$$M < \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |m_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k|^2}\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |m_{k1}|^2 = \int_a^b |L(U_1^{(n)}\lambda_1^{(n)})|^2\,dx$$

т. е. $\sum |m_k|^2$ — интеграл от квадрата остатка при подстановке полученных приближенных значений $U^{(n)}$ и $\lambda_1^{(n)}$ в уравнение (1.1); выражение во вторых скобках неравенства (3.2) можно оценить

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k|^2} < \int_a^b \int_a^b |g(x, t)|^2 \, dxdt - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\mu_s|^2} = \mu < 1$$

Согласно (2.10) k_{k1} — коэффициенты Фурье фля функции $k(U_1^{(n)})$. Следовательно,

$$\sum_{k=2}^{\infty} |k_{k1}|^2 = \int_a^b |K(U_1^{(n)})|^2 dx - |k_{11}|^2, \qquad K < \mu \sqrt{\int_a^b |K(U_1^{(n)})|^2 dx - |k_{11}|^2}$$

Величины m_{1k}; k_{1k} согласно условию (3.1) являются также коэффициентами Фурье функций $m^*(\varphi_1)$ и $K^*(\varphi_1)$, а m^* и K^* обозначают операторы, сопряженные m и K.

Следовательно,

$$M_1 \leqslant \int_a^b |m^*(\varphi_1)|^2 dx - m_{11}, \qquad K_1 = \int_a^b |K^*(\varphi_1)|^2 dx - k_{11}$$

При сделанном выборе функции ψ_1

$$m_{ik} = \int_a^b \varphi_i m(\varphi_k) \, dx = \mu_i \int_a^b \int_a^b m^*(g(x, t) \, \varphi_i(x) \, \varphi_k(t)) \, dxdt$$

Следовательно,

$$M = \left(\int_a^b \int_a^b |m^*(g(x, t))|^2 \, dx \, dt - M_1 - A\right)^{1/2} \qquad \left(A = \int_a^b |m(\varphi_1)^2| \, dx\right)$$

Аналогично

$$k_2 = \left(\int_a^b \int_a^b |K(g(x, t))|^2 \, dx \, dt - k_1 - B\right)^{1/2} \qquad \left(B = \int_a^b |K(\varphi_1)|^2 \, dx\right)$$

Таким образом, все входящие в уравнение (2.15) величины могут быть вычислены и найдено число N^*, если оно существует, что и дает оценку точности приближенного определения λ_1.

Поступила 20 VII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости вязкой жидкости. ПММ, т. 4, вып. 3, 1940.
2. Келдыш М. В. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач. М. И., серия матем, т. VI, № 5, АН СССР, 1942.
3. Польский Н. И. О сходимости некоторых приближенных методов анализа. Украинский математический журнал, т. VII, № 1, 1955.
4. Михлин С. Г. О сходимости метода Галеркина. ДАН СССР, т. LXII, № 2, 1948.
5. Riesz F. Le Systeme d'Egnations dineare a une Infinite Dinconnues.