

ТЕОРИЯ ДВУХГИРОСКОПИЧЕСКОЙ ВЕРТИКАЛИ

А. Ю. Ишлинский

(Москва)

В предшествующей статье^[1] были изучены в строгой постановке в рамках прецессионной (так называемой элементарной) теории гироскопов свойства гироскопического маятника Шулера-Булгакова. При произвольном движении точки подвеса такого маятника по поверхности Земли, принимаемой за сферу, ось собственного вращения его гироскопа при надлежащих начальных обстоятельствах отклоняется от радиуса Земли на угол θ^* , определяемый в первом приближении формулой

$$\theta^* = \frac{ma}{H} v \quad (1)$$

Здесь v — текущее значение скорости точки подвеса гироскопического маятника относительно невращающейся сферы S с тем же центром и с таким же радиусом R , что и Земля, m — масса механической системы (кожух—ротор гироскопа маятника), a — расстояние от центра тяжести этой системы до геометрического центра карданова подвеса (т. е. до точки подвеса гироскопического маятника) и, наконец, H — собственный кинетический момент гироскопа.

Параметры гироскопического маятника Шулера-Булгакова должны быть связаны соотношением, которое с достаточным для практики приближением может быть представлено в форме

$$\frac{mga}{H} = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (2)$$

где g — ускорение силы тяжести в месте нахождения гиромаятника. Принимается, что элементарные силы тяготения сводятся к единственной силе, приложенной к центру тяжести этой системы. Эта сила считается постоянной по величине и имеющей направление, параллельное нормали к сфере S в точке подвеса маятника.

Формула (1) получена при анализе линеаризованных дифференциальных уравнений прецессионного движения оси гироскопического маятника. Для этой цели в точных уравнениях опускаются члены второго порядка и выше относительно некоторых малых углов, определяющих положение оси гироскопа относительно нормали к сфере S и направления скорости v .

Точно также лишь в первом приближении оправдывается следующее свойство гироскопического маятника Шулера-Булгакова: при надлежащих начальных условиях плоскость, содержащая нормаль к сфере S и ось гироскопа, перпендикулярна вектору скорости v .

В конце статьи^[1] было отмечено, что можно указать другую гироскопическую систему, которой были бы присущи подобные свойства не в первом приближении, а совершенно точно, если отвлечься, конечно, от дополнительных возмущающих обстоятельств, как то: трение в осях подвеса, неточность изготовления и т. п.

Между прочим, одной из таких систем является так называемый пространственный гироскопический компас, строгая теория которого была изложена в^[2]. Как оказалось, направление суммарного кинетического момента компаса при надлежащих начальных условиях его движения остается перпендикулярным направлению скорости v при произвольном движении точки его подвеса по сфере S . При этом плоскость, параллельная осям собственного вращения обоих гироскопов компаса, все время касается сферы S , а угол между этими осями связан с величиной скорости v соотношением

$$2B \cos \varepsilon = mav \quad (3)$$

где ε — половина упомянутого угла, а B — величина собственного кинетического момента каждого из гироскопов.

Ниже рассматривается другая аналогичная гироскопическая система, которую назовем двухгироскопической вертикалью. Эта система отличается от пространственного гироскопического компаса, описанного в^[2], лишь иным расположением центра тяжести гироскопической рамы, являющейся основой конструкции.

Следует ожидать, что вследствие иной ориентации гироскопов описываемая ниже система в практических условиях будет более точно указывать направление вертикали места, чем система пространственного гироскопического компаса^[2]. Соответственно менее точным будет указание гироскопического курса.

Теория двухгироскопической вертикали в значительной мере идентична теории пространственного гироскопического компаса^[2], поэтому изложим ее по возможности конспективно.

1°. Свяжем с гироскопической рамой исследуемой системы (фиг. 1) систему координат xuz с началом в точке O подвеса рамы. Направим ось y этой системы координат по суммарному кинетическому моменту рамы H и ось x — параллельно осям кожухов гироскопов. Как будет показано ниже, возможно такое движение рамы, при котором оси x и y постоянно касаются сферы S . Ввиду этого направим ось z вверх, а положительное направление оси x выберем так, чтобы система координат xuz оказалась правой.

Будем считать, что центр тяжести гироскопической рамы (включая все ее элементы) находится на оси z на расстоянии a ниже точки подвеса рамы¹. Таким образом, его координаты суть

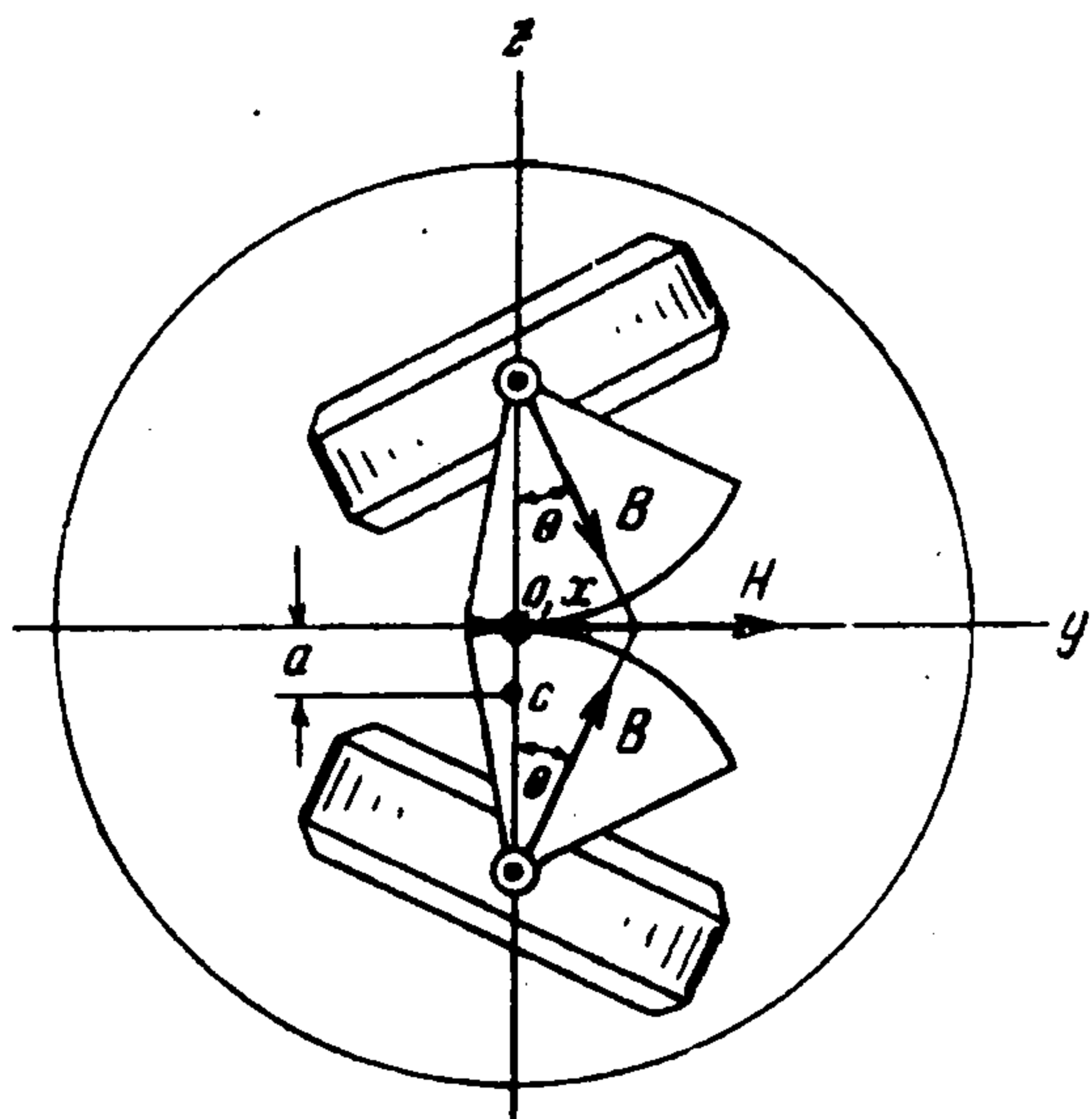
$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = -a \quad (4)$$

Уравнения прецессионного движения гироскопической рамы в силу теоремы о моменте количества движения имеют вид:

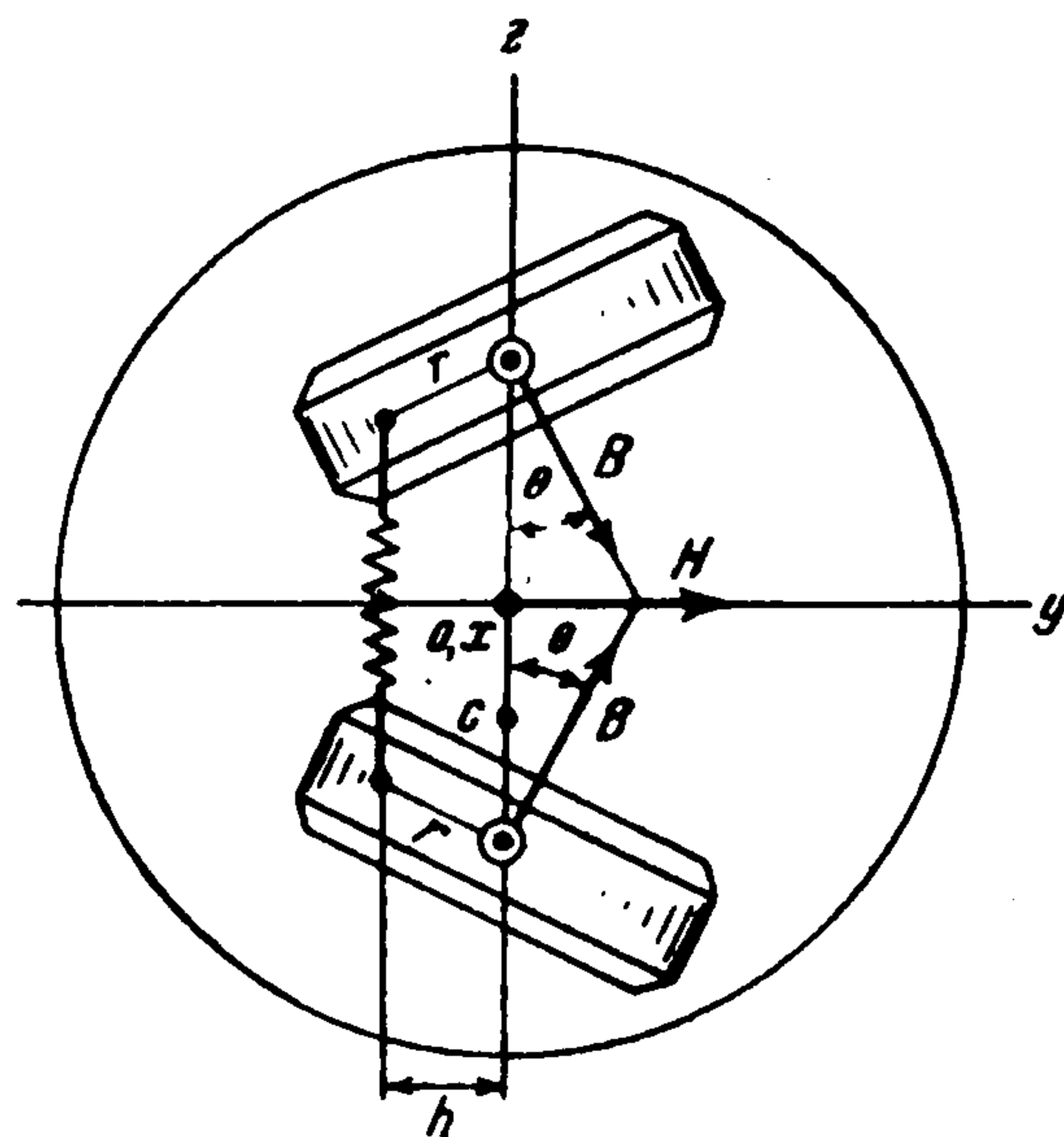
$$-H\omega_z = M_x, \quad dH/dt = M_y, \quad H\omega_x = M_z \quad (5)$$

¹ В отличие от этого центр тяжести гироскопической рамы пространственного компаса^[2] расположен на прямой, параллельной осям кожухов гироскопов рамы (в^[2] эта прямая являлась осью z).

Здесь и в дальнейшем через ω_x , ω_y и ω_z обозначаются проекции на оси x , y и z угловой скорости ω гироскопической рамы относительно некоторой поступательно перемещающейся системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (т. е. ориентированной по неподвижным звездам). Будем считать, что начало этой системы расположено в точке подвеса гирорамы.



Фиг. 1



Фиг. 2

В соответствии с теоремами механики относительного движения, в состав сил, действующих на гироскопическую раму, помимо силы тяготения, следует включить силы инерции, обусловленные поступательным движением системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Из-за отсутствия кориолисовых сил инерции эти силы сводятся к равнодействующей

$$\bar{Q} = -m\bar{w} \quad (6)$$

приложенной к центру тяжести рамы (совместно с гироскопами). Здесь m — масса рамы и w — ускорение ее точки подвеса при движении по сфере S . Поэтому величины M_x , M_y и M_z , представляющие в уравнениях (5) суммы моментов сил, действующих на раму относительно осей x , y и z , могут быть представлены с учетом (4) и (6) в виде

$$M_x = a(-mw_y + F_y), \quad M_y = -a(-mw_x + F_x), \quad M_z = 0 \quad (7)$$

Здесь F_x и F_y — проекции соответственно на оси x и y силы тяготения F гироскопической рамы к Земле. Суммарный кинетический момент гироскопической рамы H выражается формулой (фиг. 1)

$$H = 2B \sin \theta \quad (8)$$

где B — величина собственного кинетического момента каждого из гироскопов и θ — угол между осью вращения одного из роторов и осью z (из-за наличия зубчатой передачи или какой-либо другой геометрической связи углы поворотов кожухов гироскопов вокруг своих осей одинаковы по величине и противоположны по направлению).

Обозначим через M'_x и M''_x суммы моментов сил, приложенных к кожухам гироскопов соответственно вокруг осей их вращения x' и x'' . Аналогично тому, как это сделано в [2], можно показать, что разность этих величин, которую обозначим через N , связана с проекцией угловой скорости рамы на ось y соотношением

$$\omega_y 2B \cos \theta = N \quad (9)$$

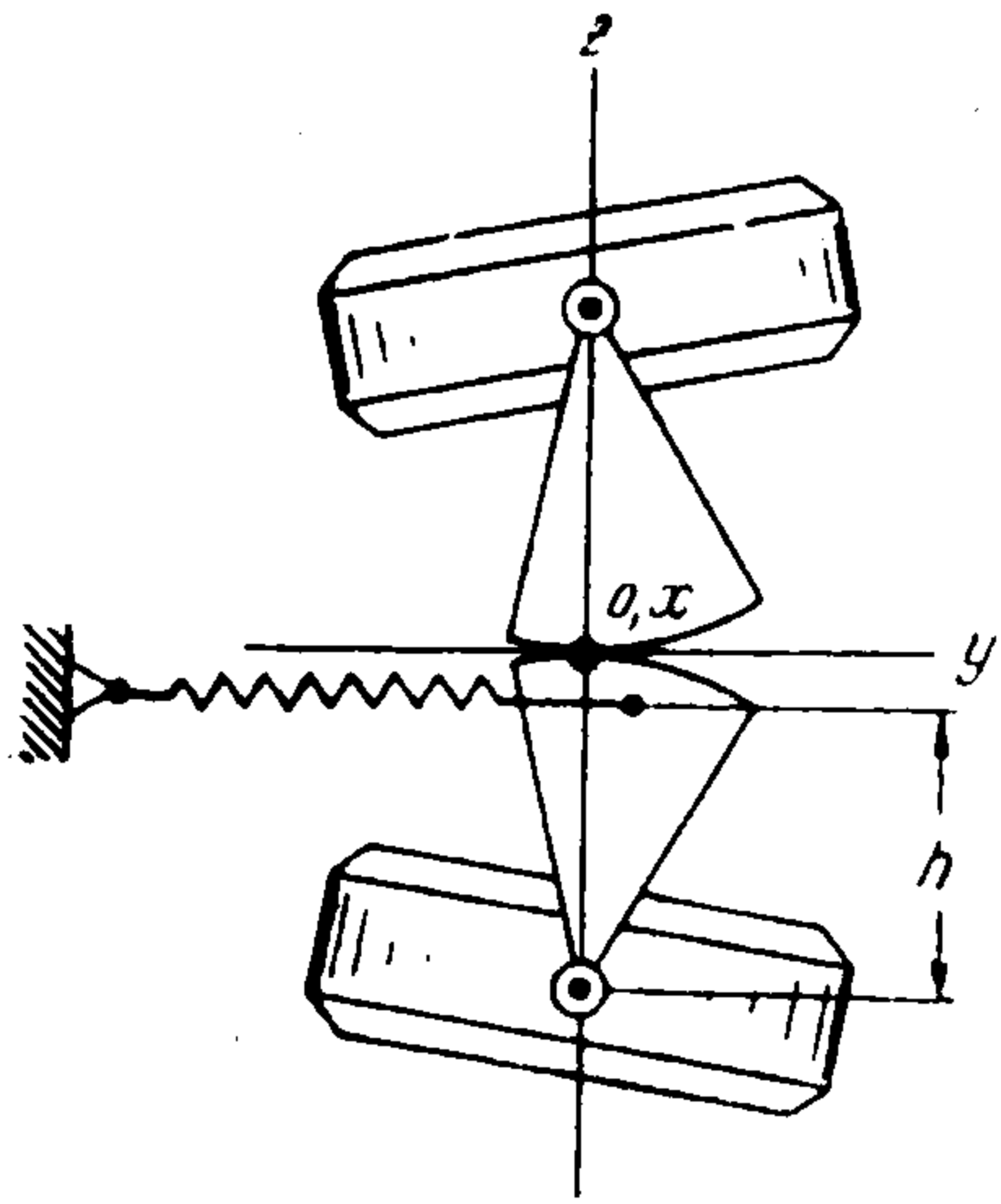
Полезно несколько подробнее рассмотреть игру сил, создающих разность моментов $M'_{x'}$ и $M''_{x''}$. Если, например, кожухи соединены между собой пружиной, как показано на фиг. 2, то моменты $M'_{x'}$ и $M''_{x''}$ равны, но противоположны по знаку; поэтому

$$N = 2Ph \quad (10)$$

где P — натяжение пружины и h — расстояние ее до прямой, соединяющей центры кожухов. Пусть K — жесткость пружины и r — расстояние точки крепления ее к кожуху от оси последнего. Нетрудно видеть, что

$$N = 2Kr^2 \cos \theta \sin \theta \quad (11)$$

если только при $\theta = 0$ пружина не натянута.



Фиг. 3

Если же пружина присоединена одним концом к одному из кожухов, а другим к самой раме (фиг. 3), то следует рассмотреть отдельно уравнение равновесия системы двух зубчатых колес под действием силы P , двух сил реакций Y' и Y'' и двух моментов $-M'_{x'}$ и $-M''_{x''}$, обратного воздействия кожухов на зубчатые колеса. Имеем (фиг. 4)

$$-Ph - M'_{x'} - M''_{x''} + Y''d = 0 \quad (12)$$

где d — диаметр начальных окружностей зубчатых колес. Пренебрежем трением в зубчатой передаче. В этом случае сумма моментов всех сил, действующих только на одно из колес относительно точки касания их начальной окружности A , будет порознь равна нулю.

Следовательно, в частности,

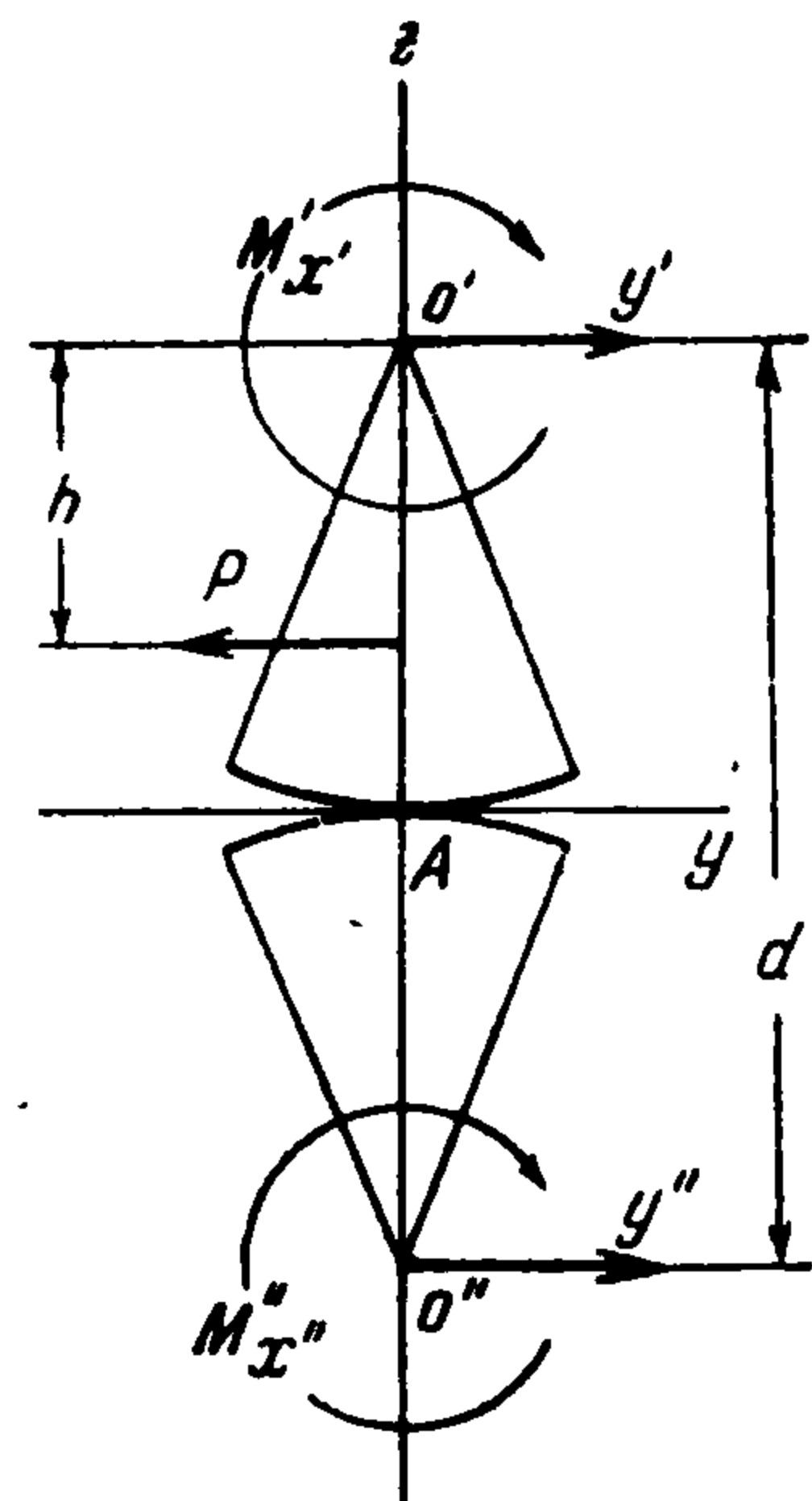
$$Y'' \frac{d}{2} - M''_{x''} = 0 \quad (13)$$

Заменяя в уравнении (12) силу реакции Y'' ее выражением, согласно равенству (13), получим

$$N = M'_{x'} - M''_{x''} = -Ph \quad (14)$$

Итак, в соответствии с уравнениями (5) и (8) и формулами (7) и (9) имеем следующую совокупность уравнений, описывающих прецессионное движение рассматриваемой гироскопической рамы

$$\begin{aligned} -2B \sin \theta \omega_x &= a(-m\omega_y + F_y), & \omega_x &= 0 \\ 2B \cos \theta \frac{d\theta}{dt} &= -a(-m\omega_x + F_x), & 2B \cos \theta \omega_y &= N \end{aligned} \quad (15)$$



Фиг. 4

2°. Введем в рассмотрение трехгранник Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$, вершина которого расположена в точке подвеса гироскопической рамы. Ребро x° этого трехгранника направлено вдоль скорости точки подвеса относительно сферы S , а ребро z° ориентировано по нормали к сфере S , являясь продолжением ее радиуса (фиг. 5).

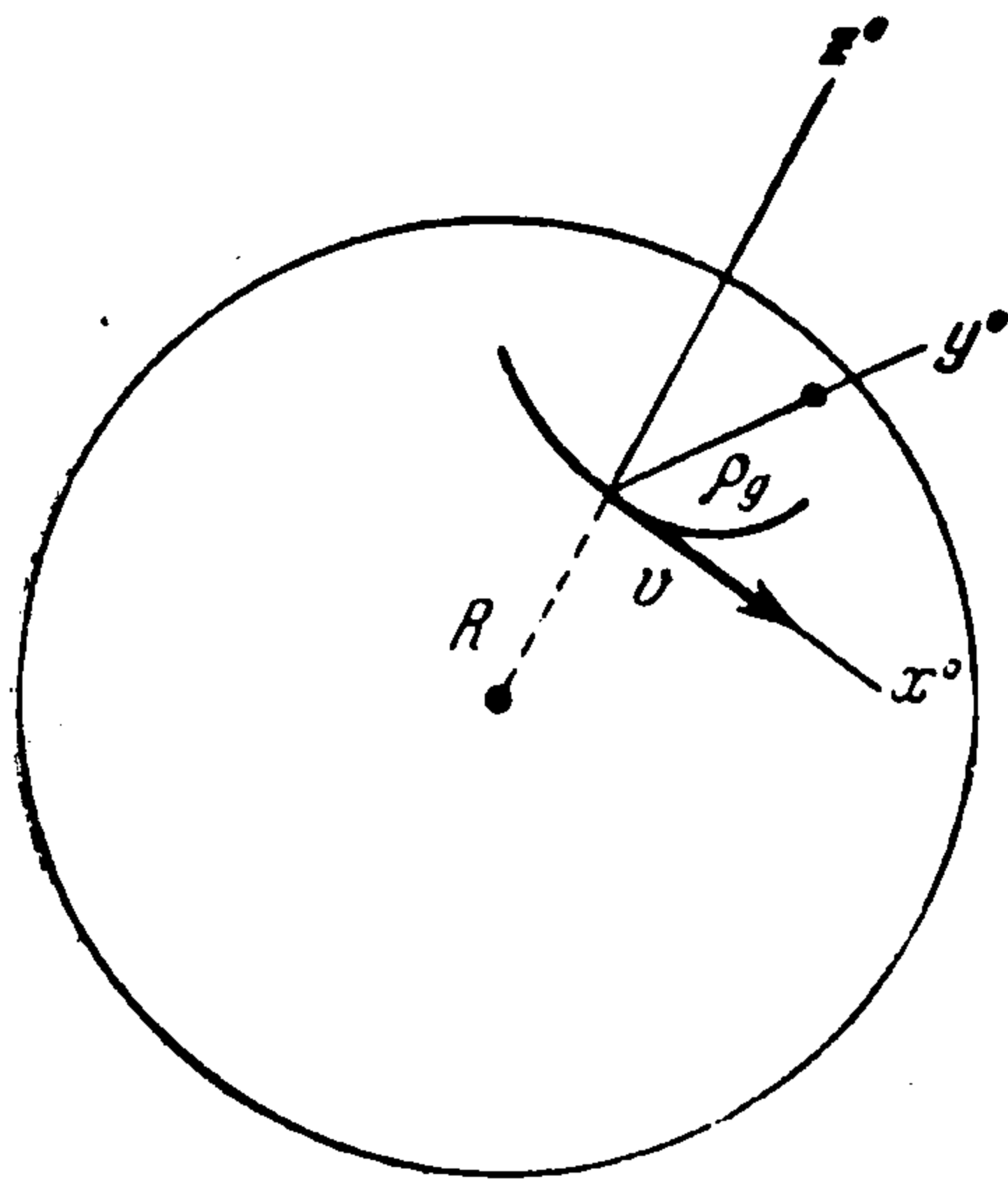
Проекции угловой скорости трехгранника ω° (относительно неподвижных звезд) на его ребра x° , y° и z° определяются формулами

$$\omega_{x^\circ}^\circ = 0, \quad \omega_{y^\circ}^\circ = v/R, \quad \omega_{z^\circ}^\circ = \Omega \quad (16)$$

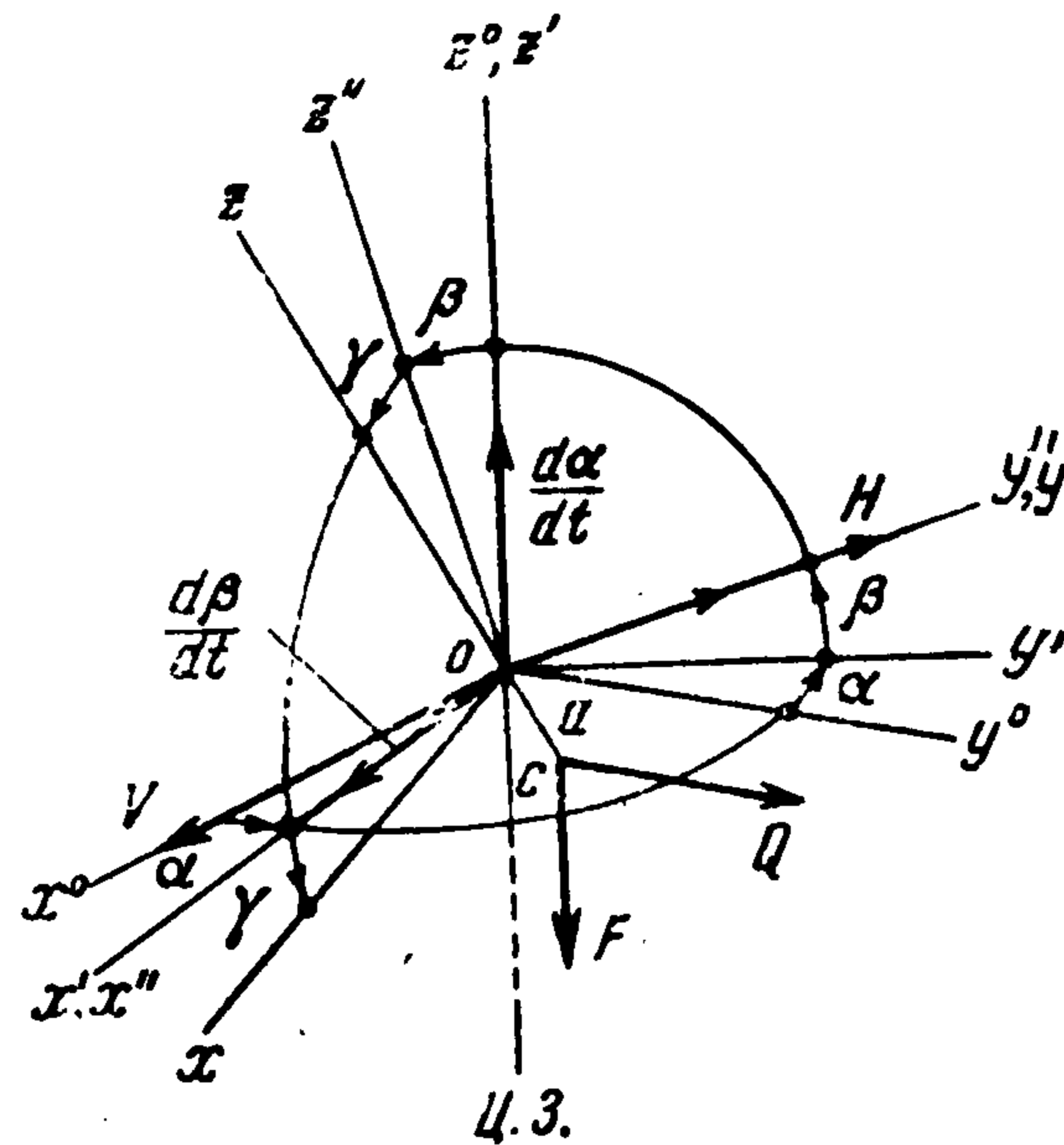
Здесь функция $\Omega = \Omega(t)$ определяется видом траектории точки подвеса и законом движения по ней, что следует из равенства

$$v = \Omega \rho_g \quad (17)$$

где ρ_g — так называемый геодезический радиус кривизны траектории, расположенной в данном случае на сфере.



Фиг. 5



Фиг. 6

В свою очередь (см. [2]) проекции ускорения вершины трехгранника Дарбу на направления x° , y° и z° при движении относительно сферы S , принимаемой за неподвижную, имеют вид:

$$w_{x^\circ} = dv/dt, \quad w_{y^\circ} = \Omega v, \quad w_{z^\circ} = -v^2/R \quad (18)$$

Положение системы координат xyz , жестко связанной с гироскопической рамой, относительно трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$ можно определить посредством трех углов α , β и γ (фиг. 6). Для этой цели введем две вспомогательные системы координат $x'y'z'$ и $x''y''z''$. Первая из них повернута относительно трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ на угол α вокруг оси z' , совпадающей с ребром z° . Вторая ($x''y''z''$) повернута относительно первой ($x'y'z'$) на угол β вокруг совпадающих осей x' и x'' . При этом система координат xyz оказывается повернутой относительно системы $x''y''z''$ на угол γ вокруг оси y , которая в свою очередь совпадает с осью y'' .

Таблица косинусов углов между осями системы координат xyz и ребрами трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$ имеет следующий вид:

	x°	y°	z°
x	$\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$-\cos \beta \sin \gamma$
y	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$	$\sin \beta$
z	$\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$	$\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$	$\cos \beta \cos \gamma$

(19)

Угловая скорость ω системы координат xuz относительно неподвижных звезд равна геометрической сумме угловой скорости ω° трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$ (также относительно неподвижных звезд) и трех относительных угловых скоростей:

$$\begin{aligned} d\alpha/dt & \text{ — системы координат } x'y'z' \text{ относительно } x^\circ y^\circ z^\circ \\ d\beta/dt & \text{ — системы координат } x''y''z'' \text{ относительно } x'y'z' \\ d\gamma/dt & \text{ — системы координат } xyz \text{ относительно } x''y''z'' \end{aligned}$$

Относительные угловые скорости $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$ и $d\gamma/dt$ имеют соответственно направления z° (z'), x'' (x') и y (y'').

Соответственно имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \omega_x = \omega_{x^\circ}^\circ (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \omega_{y^\circ}^\circ (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \\ + \left(\omega_{z^\circ}^\circ + \frac{d\alpha}{dt} \right) (-\cos \beta \sin \gamma) + \frac{d\beta}{dt} \cos \gamma \end{aligned} \quad (20)$$

$$\omega_y = \omega_{x^\circ}^\circ (-\sin \alpha \cos \beta) + \omega_{y^\circ}^\circ \cos \alpha \cos \beta + \left(\omega_{z^\circ}^\circ + \frac{d\alpha}{dt} \right) \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\begin{aligned} \omega_z = \omega_{x^\circ}^\circ (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) + \omega_{y^\circ}^\circ (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + \\ + \left(\omega_{z^\circ}^\circ + \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos \beta \cos \gamma + \frac{d\beta}{dt} \sin \gamma \end{aligned}$$

для проекций угловой скорости ω системы координат xuz на ее же оси.

Подставляя сюда выражения для $\omega_{x^\circ}^\circ$, $\omega_{y^\circ}^\circ$ и $\omega_{z^\circ}^\circ$ согласно (16), получим

$$\begin{aligned} \omega_x = \frac{v}{R} (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - \left(\Omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos \beta \sin \gamma + \frac{d\beta}{dt} \cos \gamma \\ \omega_y = \frac{v}{R} \cos \alpha \cos \beta + \left(\Omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\omega_z = \frac{v}{R} (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + \left(\Omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos \beta \cos \gamma + \frac{d\beta}{dt} \sin \gamma$$

Используя формулы (18) и таблицу (19), приходим к следующим формулам для проекций ускорения точки подвеса гироскопической рамы на те же оси x , y и z :

$$\begin{aligned} w_x = \frac{dv}{dt} (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \\ + \Omega v (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \frac{v^2}{R} \cos \beta \sin \gamma \\ w_y = -\frac{dv}{dt} \sin \alpha \cos \beta + \Omega v \cos \alpha \cos \beta - \frac{v^2}{R} \sin \beta \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} w_z = \frac{dv}{dt} (\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) + \\ + \Omega v (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) - \frac{v^2}{R} \cos \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

Сила тяготения F имеет направление отрицательной части оси z' (z°). Следовательно, ее проекции на оси системы координат xuz в соответствии с таблицей (19) имеют вид:

$$F_x = F \cos \beta \sin \gamma, \quad F_y = -F \sin \beta, \quad F_z = -F \cos \beta \cos \gamma \quad (23)$$

Используя теперь формулы (21), (22) и (23) в уравнениях (15),

придем к следующей совокупности четырех дифференциальных уравнений, содержащих четыре искомые функции α , β , γ и θ :

$$\begin{aligned} - \left[\frac{v}{R} (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + \left(\Omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos \beta \cos \gamma + \frac{d\beta}{dt} \sin \gamma \right] 2B \sin \theta = \\ = a \left\{ -m \left[-\frac{dv}{dt} \sin \alpha \cos \beta + \Omega v \cos \alpha \cos \beta - \frac{v^2}{R} \sin \beta \right] - F \sin \beta \right\} \\ 2B \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -a \left\{ -m \left[\frac{dv}{dt} (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \right. \right. \\ \left. \left. + \Omega v (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \frac{v^2}{R} \cos \beta \sin \gamma \right] + F \cos \beta \sin \gamma \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{v}{R} (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - \left(\Omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos \beta \sin \gamma + \frac{d\beta}{dt} \cos \gamma = 0 \\ \left[\frac{v}{R} \cos \alpha \cos \beta + \left(\Omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt} \right] 2B \cos \theta = N \end{aligned}$$

3°. Нетрудно убедиться, что уравнения (24) при произвольных функциях $v(t)$ и $\Omega(t)$ допускают следующее решение:

$$\alpha \equiv 0, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \theta = \theta^*(t) \quad (25)$$

где функция $\theta^*(t)$ определяется тригонометрическим соотношением

$$2B \sin \theta^*(t) = mav(t) \quad (26)$$

При этом, однако, момент N должен быть функцией угла θ ; именно:

$$N = \frac{4B^2}{maR} \cos \theta \sin \theta \quad (27)$$

В соответствии с формулой (11), такой закон изменения момента N в зависимости от угла θ можно сравнительно просто осуществить путем соответствующего подбора коэффициента жесткости пружины K .

В соответствии с решением (25) ось z , жестко связанная с гироскопической рамой, при произвольном движении точки ее подвеса по земной сфере постоянно направлена по радиусу Земли (по геоцентрической вертикали) и, следовательно, рассматриваемая гироскопическая система служит указателем вертикали места. Чтобы решение (25) осуществлялось, необходимо соблюдение следующих начальных обстоятельств движения гироскопической рамы. В начальное мгновение времени ось z должна быть направлена по радиусу Земли, т. е.

$$\beta(0) = 0, \quad \gamma(0) = 0 \quad (28)$$

Далее ось y , также жестко связанная с гироскопической рамой (по ней направлен суммарный собственный кинетический момент H), должна быть в начальное мгновение перпендикулярна направлению скорости v точки подвеса рамы относительно невращающейся сферы S (т. е. $\alpha(0) = 0$). Наконец, начальное значение угла θ должно удовлетворять условию

$$2B \sin \theta(0) = mav(0) \quad (29)$$

Ось y остается в этом случае перпендикулярной к направлению скорости v и при произвольном движении точки подвеса, что дает возможность использовать рассматриваемое гироскопическое устройство в качестве компаса (однако, по-видимому, не слишком точного). Дей-

малыми величинами, сохраним в уравнениях (24) лишь члены первого порядка относительно этих переменных и их производных по времени и воспользуемся формулой (27). В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} \left[\frac{v}{R} \beta - \left(\Omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \right] 2B \sin \theta^* - \delta 2B \cos \theta^* \Omega = \\ = a \left\{ m \left(\frac{dv}{dt} \alpha - \Omega v \right) - \left(F - m \frac{v^2}{R} \right) \beta \right\} \\ 2B \frac{d}{dt} (\sin \theta^* + \delta \cos \theta^*) = a \left\{ m \left(\frac{dv}{dt} + \Omega v \alpha \right) - \left(F - m \frac{v^2}{R} \right) \gamma \right\} \\ \frac{v}{R} \alpha - \Omega \gamma + \frac{d\beta}{dt} = 0 \\ \frac{v}{R} + \Omega \beta + \frac{d\gamma}{dt} = \frac{2B}{maR} (\sin \theta^* + \delta \cos \theta^*) \end{aligned} \quad (34)$$

Используя соотношение (26) и произведя дальнейшие упрощения, приходим с точностью до обозначений к той же совокупности дифференциальных уравнений, что и в [2], именно

$$\begin{aligned} \frac{d(v\alpha)}{dt} - \frac{F}{m} \beta = -\Omega \frac{2B \cos \theta^* \delta}{ma}, \quad \frac{d\gamma}{dt} - \frac{2B \cos \theta^* \delta}{maR} = -\Omega \beta \\ \frac{d\beta}{dt} + \frac{v}{R} \alpha = \Omega \gamma, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{2B \cos \theta^* \delta}{ma} \right) + \frac{1}{m} \left(F - \frac{mv^2}{R} \right) \gamma = \Omega v \alpha \end{aligned} \quad (35)$$

Если с известным приближением принять, что

$$F - \frac{mv^2}{R} \approx F \approx mg \quad (36)$$

то, так же как и в [2], можно образовать следующие комплекснозначные функции действительного аргумента t :

$$w_1 = \frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} + i\beta, \quad w_2 = \gamma + i \frac{2B \cos \theta^* \delta}{ma\sqrt{gR}} \quad (37)$$

удовлетворяющие совокупности двух следующих линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{dw_1}{dt} + i\nu w_1 = i\Omega w_2, \quad \frac{dw_2}{dt} + i\nu w_2 = i\Omega w_1 \quad \left(\nu = \sqrt{\frac{g}{R}} \right) \quad (38)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести и ν так называемая частота Шулера-Булгакова. Уравнения распадаются на два независимых

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (w_1 + w_2) + i(\nu - \Omega) (w_1 + w_2) = 0 \\ \frac{d}{dt} (w_1 - w_2) + i(\nu + \Omega) (w_1 - w_2) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

и могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Решение уравнений (39) имеет осцилляционный характер и, следовательно, механическая система двухгирскопической вертикали устойчива по первому приближению (однако не асимптотически). Исследование устойчивости решения (25) в общей постановке, т. е. исходя из уравнений (24), требует, разумеется, дополнительного рассмотрения.

Поступила 20 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического компаса. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
3. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.