Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

О КОЛЕБАНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ЖИДКОСТЬ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С. Г. Крейн, Н. Н. Моисеев

(Воронеж, Москва)

Движение твердого тела, имеющего полость, частично наполненную жидкостью в одном частном случае было исследовано впервые Л. Н. Сретенским [1]. В 1950—1952 гг. почти одновременно эта задача рассматривалась несколькими авторами, которые, к сожалению, опубликовали свои результаты не в порядке их получения, поэтому приводимое здесь указание, что общий случай этой задачи изучался Н. Н. Моисеевым [2—3], не затрагивает научной ценности работы Г. С. Нариманова [4], в которой подробно рассматривается случай цилиндрической полости в поле массовой силы, зависящей от времени, а также более ранних и опубликованных позднее исследований некоторых частных случаев этой задачи Д. Е. Охоцимского [5].

В настоящей работе показывается, что принципиальные вопросы малых колебаний твердого тела с жидкостью в поле силы тяжести могут быть сравнительно просто описаны при помощи общих методов функционального анализа.

1. Общие уравнения и основные результаты. 1° Общие уравнения малых колебаний твердого тела с полостью, частично наполненной жидкостью, под действием консервативных сил имеют вид[1]:

$$Y_i'' + \int_S \gamma_i(P)\zeta''(P, t)\,dP + \mu_i^2 Y_i + \int_S \nu_i(P)\zeta(P, t)\,dP = Q_i(t) \qquad (i=1,\ldots,6) \qquad (1.1)$$

$$\rho g\zeta(P, t) + \int_S H(P, Q)\zeta''(Q, t)\,dQ + \sum_{n=1}^{6} Y_n''\gamma_n(P) + \sum_{n=1}^{6} Y_n\nu_n(P) = 0$$

где Y_i обозначают обобщенные координаты твердого тела, $z=\zeta(P, t)$ — уравнение свободной поверхности, ν_i и γ_i — некоторые заданные функции точки, которые определяются только геометрией полости τ, μ_i^2 — постоянные числа, характеризующие консервативные возвращающие силы, $Q_i(t)$ — внешние силы, зависящие от времени, S — плоская область, совпадающая со свободной поверхностью жидкости в положении равновесия, ρ — плотность жидкости, g — постоянная напряженность поля массовых сил (сил тяжести или инерции прямолинейного движения), $H(P, Q)$ — функция Грина задачи Неймана для области, занятой жидкостью (τ).

Движения системы тело + жидкость при условии $Q_i \equiv 0$ $(i=1, \ldots, 6)$ будем называть свободными колебаниями системы.

---

[1] В диссертации автора (математический институт им. Стеклова АН СССР, (1955) уравнения записаны в матричной форме, которая получается из (1.1) разложением по собственным функциям ядра $H(P, O)$.

Теорема 1. При движении твердого тела, имеющего полости, частично заполненные жидкостью, около положения равновесия, существуют нормальные колебания (главные координаты), т. е. система уравнений (1.1) имеет решения вида

$$Y_{jn} = q_{jn} e^{i\omega_n t}, \qquad \zeta_n = z_n e^{i\omega_n t} \qquad (i=\sqrt{-1}) \qquad (j=1,\ldots,6) \tag{1.2}$$

2. Положение равновесия твердого тела, имеющего полости, частично наполненные жидкостью, будет устойчивым[1] тогда и только тогда, когда потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум. Это значит, что для ограниченности решений вида (2) необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\Pi = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{6} \mu_j^2 Y_j^2 + 2\sum_{j=1}^{6} Y_j \int_S \nu_j(P)\zeta(P,t)\,dP + \rho g\int_S \zeta^2(P,t)\,dP\right\}$$

была положительно-определенной[2]

$$\Pi(Y_1,\ldots,Y_6,\zeta) \gg 0 \tag{1.3}$$

В свою очередь для положительной определенности квадратичной формы П необходима и достаточна положительная определенность матрицы шестого порядка

$$\left\| \mu_j^2\delta_{jk} - \frac{1}{\rho g}\int \nu_j(P)\,\nu_k(P)\,dP \right\| \qquad (j,\ k=1,\ldots,6) \tag{1.4}$$

где δ_{jk} — символ Кронеккера. При этом условии все частоты ω_n действительны и $\omega_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$.

3. Если в положении равновесия потенциальная энергия системы тело плюс жидкость имеет минимум, то любое свободное движение этой системы можно представить как суперпозицию главных колебаний (1.2); это означает, что системы решений (1.2) при условии (1.3) полны в метрике L_2.

4. При условии (3) задача определения движения по начальным условиям (задача Коши для системы 1) имеет единственное решение, определенное для любого t, если функции $Q_j(t)$ имеют ограниченную вариацию на каждом конечном интервале изменения t.

2. Свойства операторов. Введем в рассмотрение следующие пространства: шестимерное эвклидово пространство E_1 комплексных векторов $Y = \{Y_1, \ldots, Y_6\}$ с обычным скалярным произведением

$$(Y, Z)_1 = \sum_{j=1}^{6} Y_j \bar{Z}_j$$

гильбертово пространство E_2 комплекснозначных функций $\zeta(P)$, определенных в области S и интегрируемых с квадратом по S, со скалярным произведением

$$(\zeta_1, \zeta_2)_2 = \int_S \zeta_1(P)\bar{\zeta}_2(P)\,dP$$

---

[1] Положение равновесия мы называем устойчивым, если любое главное колебание (2) будет ограниченным для любого момента времени t.

[2] Положительная определенность понимается в смысле терминологии функционального анализа: будем говорить, что форма $(Ax, x) \gg 0$, если существует такое число $\alpha > 0$, что $(Ax, x) > \alpha(x, x)$. В том случае, когда форма (Ax, x) — конечного числа переменных, указанное определение совпадает с принятым в теории устойчивости.

Наконец, нам понадобится прямая сумма $E = E_1 + E_2$ пространств E_1 и E_2, т. е. совокупность пар $x = \{Y, \zeta\}$ ($Y \in E_1$, $\zeta \in E_2$) со скалярным произведением

$$(x_1, x_2) = (Y^{(1)}, Y^{(2)})_1 + (\zeta_1, \zeta_2)_2$$

Введем в рассмотрение следующие операторы.

а) Действующие в пространстве E_1: единичный оператор $A_{11} = 1$ и оператор $B_{11} = M$, где M — диагональная матрица:

$$B_{11} = \begin{Vmatrix} \mu_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_6^2 \end{Vmatrix}$$

б) Операторы, действующие в пространстве E_2,

$$A_{22}\zeta(Q) = \int_S H(P, Q)\zeta(Q)\,dQ, \qquad B_{22}\zeta(P) = \rho g\zeta(P)$$

в) Операторы, действующие из E_2 и E_1,

$$A_{12}\zeta = \int_S \gamma(P)\zeta(P)\,dP, \qquad B_{12}\zeta = \int_S \nu(P)\zeta(P)\,dP$$

где $\gamma(P)$ и $\nu(P)$ — вектор-функции $\gamma(P) = \{\gamma_1(P) \ldots \gamma_6(P)\}$ и $\nu(P) = \{\nu_1(P) \ldots \nu_6(P)\}$

г) Операторы, действующие из E_1 в E_2,

$$A_{21}Y = (Y, \gamma(P))_1, \quad B_{21}Y = (Y, \nu(P))$$

Систему (1.1) можно тогда записать в виде

$$\begin{aligned} A_{11}Y'' + A_{12}\zeta'' + B_{11}Y + B_{12}\zeta &= Q \\ A_{21}Y'' + A_{22}\zeta'' + B_{21}Y + B_{22}\zeta &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $Q = \{Q_1, \ldots, Q_6\}$ — вектор-функция, зависящая от t. Если теперь ввести операторы, действующие в E и определенные матрицами

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix}$$

то система (2.1) запишется еще короче:

$$Ax'' + Bx = Q^* \quad (x = \{Y, \zeta\},\ Q^* = \{Q, 0\}) \tag{2.2}$$

Исследуем операторы A и B, входящие в (2.2). Операторы A_{12} и A_{21} являются вполне непрерывными, так как первый из них действует в конечномерное пространство E_1, а второй — из этого пространства и оба являются ограниченными в силу ограниченности функций $\gamma_i(P)$. Оператор A_{22} вполне непрерывен как интегральный оператор со слабой особенностью (см., например, [6]). Таким образом, оператор A вполне непрерывен.

Далее оператор A — самосопряженный. Это следует из симметрии функции Грина $H(P, Q)$ и из тождества

$$(A_{12}\zeta, Y)_1 = \left(\int_S \gamma(P)\zeta(P)\,dP, Y\right) = \int_S \zeta(P)(\gamma(P), Y)_1\,dP =$$

$$= \int_S \zeta(P)\,\overline{A_{21}Y}\,dP = (\zeta, A_{21}Y)_2 \tag{2.3}$$

Наконец, оператор A является положительным оператором, так как форма (Ax, x) представляет собой кинетическую энергию системы тело плюс жидкость и поэтому положительна.

Итак, A — вполне непрерывный положительный самосопряженный оператор.

Перейдем теперь к изучению оператора B. Этот оператор, очевидно, является ограниченным. Для операторов B_{12} и B_{21} справедливо тождество, аналогичное (2.3):

$$(B_{12}\zeta, Y)_1 = (\zeta, B_{21}Y)_2 \tag{2.4}$$

откуда следует самосопряженность оператора B.

Найдем условие, при котором оператор B будет положительно-определенным. Форма (Bx, x) (представляющая собой удвоенную потенциальную энергию 2Π) теперь запишется в виде

$$2\Pi = (Bx, x) = (B_{11}Y, Y)_1 + (B_{12}\zeta, Y)_1 + (B_{21}Y, \zeta)_2 + \rho g(\zeta, \zeta)_2$$

Любой элемент $x \in E$ можно единственным образом разложить на три слагаемых вида

$$x = \{Y, \zeta\} = \left\{Y, -\frac{1}{\rho g}B_{21}Y\right\} + \{0, \zeta_1\} + \{0, \zeta_2\} = x_1 + x_2 + x_3$$

где $\zeta_2(P)$ — функция, ортогональная ко всем функциям $\nu_i(P)$, а $\zeta_1(P)$ представляет собой линейную комбинацию этих функций, причем

$$\zeta_1 = \zeta - \zeta_2 + \frac{1}{\rho g}B_{21}Y$$

Применение к элементам x_1, x_2, x_3 оператора B дает

$$Bx_1 = \left\{MY - \frac{1}{\rho g}B_{12}B_{21}Y, 0\right\}, \quad Bx_2 = \{B_{12}\zeta_1, \rho g\zeta_1\}, \quad Bx_3 = \{B_{12}\zeta_2, \rho g\zeta_2\}$$

Из этих формул непосредственно следует, что

$$(Bx_1, x_2) = (Bx_1, x_3) = 0$$

Из ортогональности функций ζ_1 и ζ_2 следует также, что $(Bx_2, x_3) = 0$. Тогда форма (Bx, x) принимает вид:

$$\begin{aligned}(Bx, x) &= (Bx_1, x_1) + (Bx_2, x_2) + (Bx_3, x_3) = \\ &= (Bx_1, x_1) + \rho g(x_2, x_2) + \rho g(x_3, x_3)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что форма (Bx, x) приводится к сумме квадратов, причем число отрицательных квадратов будет таким же, как и число отрицательных квадратов у формы (Bx_1, x_1) и, так как эта форма определена на шестимерном пространстве элементов x_1, то это число не превосходит шести. Отсюда же следует, что для того, чтобы форма (Bx, x) была положительно-определенной, необходимо и достаточно, чтобы форма (Bx_1, x_1) была положительной. Действительно, если $(Bx_1, x_1) > 0$, то

$$(Bx_1, x) \geqslant a(x_1, x_1)$$

Обозначая $C = \frac{1}{3}\min\{a, \rho g\}$, из (2.5) получим

$$\begin{aligned}(Bx, x) &\geqslant a\|x_1\|^2 + \rho g\|x_2\|^2 + \rho g\|x_3\|^2 \geqslant \\ &\geqslant 3c(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2) \geqslant c\|x\|^2\end{aligned} \tag{2. 6}$$

т. е. форма (Bx, x) — положительно-определенная. Обратное утверждение очевидно.

Рассмотрим форму (Bx_1, x_1). Имеем

$$(Bx_1, x_1) = (MY, Y)_1 - \frac{1}{\rho g}(B_{12}B_{21}Y, Y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \mu_i^2 |Y_i|^2 - \frac{1}{\rho g} \sum_{i,j=1}^{6} Y_i \overline{Y}_j \int \nu_i(P)\nu_j(P)dP$$

Матрицей этой формы является матрица (1.4), положительная определенность которой является необходимым и достаточным условием положительной определенности формы $(Bx, x) = 2\Pi$ и оператора B.

3. Исследования спектра, нормальные колебания. Рассмотрим движения системы (2.2) в том случае, если $Q = 0$. Тогда получим

$$Ax'' + Bx = 0 \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) описывает свободные колебания системы тело плюс жидкость. Будем искать нормальные колебания, т. е. решения вида

$$x = qe^{i\omega t}$$

Элемент q удовлетворяет уравнению

$$(B - \omega^2 A)q = 0 \quad \text{или} \quad B^{-1}Aq = \frac{1}{\omega^2}q \tag{3.2}$$

Таким образом, числа $\lambda = \omega^{-2}$ являются собственными числами оператора $C = B^{-1}A$. В пространстве E введем новое скалярное произведение по формуле

$$(x_1, x_2)_B = (Bx_1, x_2) \tag{3.3}$$

Если выполнено условие (3.3), то скалярное произведение определяет гильбертово пространство и так как оператор B ограничен сверху и снизу [последнее в силу неравенства (2.6)], норма будет эквивалентна исходной норме в пространстве E. Так как оператор A вполне непрерывен, а B^{-1} ограничен, то оператор C вполне непрерывен в обеих нормах. Оператор C в скалярном произведении (3.3) будет положительным самосопряженным:

$$(Cx_1, x_2)_B = (BB^{-1}Ax_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = (x_1, BB^{-1}Ax_2) =$$
$$= (Bx_1, B^{-1}Ax_2) = (x_1, Cx_2)_B, \qquad (Cx_1, x_1)_B = (Ax_1, x_1) > 0$$

Отсюда следует, что: 1) В пространстве E существует полная система собственных колебаний

$$x_n = q_n e^{i\omega_n t} \tag{3.4}$$

элементы q_n ортогональны в скалярном произведении (3.3); 2) все числа ω_n^2 положительны, т. е. частоты действительны, и $\omega_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$.

Форма (Bx, x) представляет собой потенциальную энергию системы тело + жидкость. Поэтому доказанная теорема содержит в себе аналог известной теоремы Лагранжа:

Для того чтобы все частоты были действительными, достаточна положительная определенность потенциальной энергии системы тело плюс жидкость.

Покажем, что справедливо и обратное утверждение: если форма Π не определенно-положительна (т. е. если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума), то среди чисел ω^2 есть по крайней мере одно отрицательное.

В этом случае скалярное произведение (3.3) задается индефинитной формой с конечным числом отрицательных квадратов. Оператор $B^{-1}A$ является эрмитовым в полученной индефинитной метрике. Такие операторы были изучены Понтрягиным [7]. Им было установлено существование по крайней мере одного собственного элемента u, на котором форма

$$(u,\ u)_B = (Bu,\ u) < 0$$

Тогда

$$Bu = \omega^2 Au$$

Откуда следует

$$\omega^2 = \frac{(Bu,\ u)}{(Au,\ u)} < 0$$

4. Задача Коши. Рассмотрим теперь вопрос о существовании решения уравнения (2.2) при начальных условиях $x(0) = x_0$ и $x'(0) = x_0'$. В этом уравнении сделаем замену $Ax = y$; так как оператор A ограничен и не зависит от времени, то $Ax'' = y''$ и уравнение (2.2) примет вид:

$$y'' + BA^{-1}y = Q(t)$$

Как и выше, легко проверить, что в скалярном произведении

$$[u,\ v]_B = (B^{-1}u,\ v)$$

оператор AB^{-1} ограниченный и симметричный. Следовательно, оператор $A^{-1}B$, обратный к нему, является самосопряженным.

Если функции $Q_i(t)$ являются функциями ограниченной вариации на каждом конечном интервале изменения t, то существование решения задачи Коши следует тогда из результатов работы [8].

Совокупность результатов разделов 2, 3 и 4 доказывает теорему.

Поступила 9 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде. Изв. АН СССР, № 10, 1951.
2. Моисеев Н. Н. Движение тела, имеющего полости, частично заполненные идеальной капельной жидкостью. ДАН СССР, т. LXXXV, вып. 4, 1952.
3. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность. Матем. сб., т. XXXII (74), вып. 1, 1953.
4. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.
5. Охоцимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.
6. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
7. Понтрягин А. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. Изв. АН СССР, серия матем., т. VIII, № 6, 1944.
8. Phillips R. S. Perturbation theory for semi-groups of linear operators. Trans. Amer. Math. Soc., 74, 1953.