Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОЛОСТЬ КОТОРОГО НАПОЛНЕНА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Н. Г. Четаев
(Москва)

Вопрос о правильности полета снаряда с жидким наполнением на его траектории составляет весьма трудную задачу, если жидкость вязкая. Если наполняющую снаряд жидкость предположить идеальной и несжимаемой, то можно найти точные решения задачи об устойчивости вращательных движений такого твердого тела, если полость наполнена жидкостью сплошь, без пузырька. Решение это на мой взгляд не является безынтересным, так так в ряде случаев, исходя из него, можно назвать достаточной запас устойчивости против отрицательных влияний вязкости.

1. Общие предложения. Среди возможных перемещений снаряда с полостью, наполненной идеальной несжимаемой жидкостью без пузырька, существуют вращения вокруг любой прямой, а также поступательные перемещения как у твердого тела. Следовательно, в движении такого снаряда имеет место теорема о моменте количества движения в системе с началом в центре тяжести снаряда и жидкости O и с осями ξ, η, ζ, параллельными неподвижным осям.

Обстоятельство это дает возможность рассматривать в задаче об устойчивости вращательных движений снаряда, полость которого наполнена идеальной жидкостью, одни относительные движения, считая центр тяжести O за неподвижный.

Для удобства вычислений введем оси x, y, z; за ось z примем ось вращения эллипсоида инерции снаряда (без жидкости), построенного у точки O, быть может не совпадающей с центром тяжести одной твердой оболочки; оси x, y условимся выбирать в плоскости, ортогональной оси z, как это будет нам удобно, но всегда так, чтобы моменты инерции твердой оболочки относительно этих осей были постоянными, главными осями эллипсоида инерции твердой оболочки, построенного у точки O.

Будем принимать, что движение идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей полость снаряда, определяется мгновенными скоростями твердой оболочки. Пусть ρ — постоянная плотность жидкости; n — внешняя нормаль к поверхности S полости, занятой жидкостью; α, β, γ — направляющие косинусы нормали в осях x, y, z; через p, q, r обозначим мгновенные угловые скорости вращения снаряда вокруг осей x, y, z.

В начале движения жидкость покоилась в снаряде; по теореме Лагранжа в дальнейшем она будет двигаться с потенциалом скоростей $\varphi(x, y, z, t)$.

Для определения функции φ имеется условие, чтобы на S нормальная составляющая скорости жидкости совпадала с таковой точки твердой оболочки:

$$\frac{d\varphi}{dn} = (qz - ry)\,\alpha + (rx - pz)\,\beta + (py - qx)\,\gamma \tag{1}$$

Положим

$$\varphi = p\psi_1 + q\psi_2 + r\psi_3$$

и потребуем, чтобы соотношение (1) удовлетворялось независимо от значений p, q, r. Это дает

$$\frac{d\psi_1}{dn} = y\gamma - z\beta, \qquad \frac{d\psi_2}{dn} = z\alpha - x\gamma, \qquad \frac{d\psi_3}{dn} = x\beta - y\alpha \tag{2}$$

Следовательно, ψ_i не зависят от t, а зависят от полости, занятой несжимаемой идеальной жидкостью.

Живая сила вращательного движения твердой оболочки снаряда есть

$$2T' = A'p^2 + B'q^2 + C'r^2$$

где A', B', C' — постоянные моменты инерции твердой оболочки снаряда вместе с перегородками полости относительно осей x, y, z.

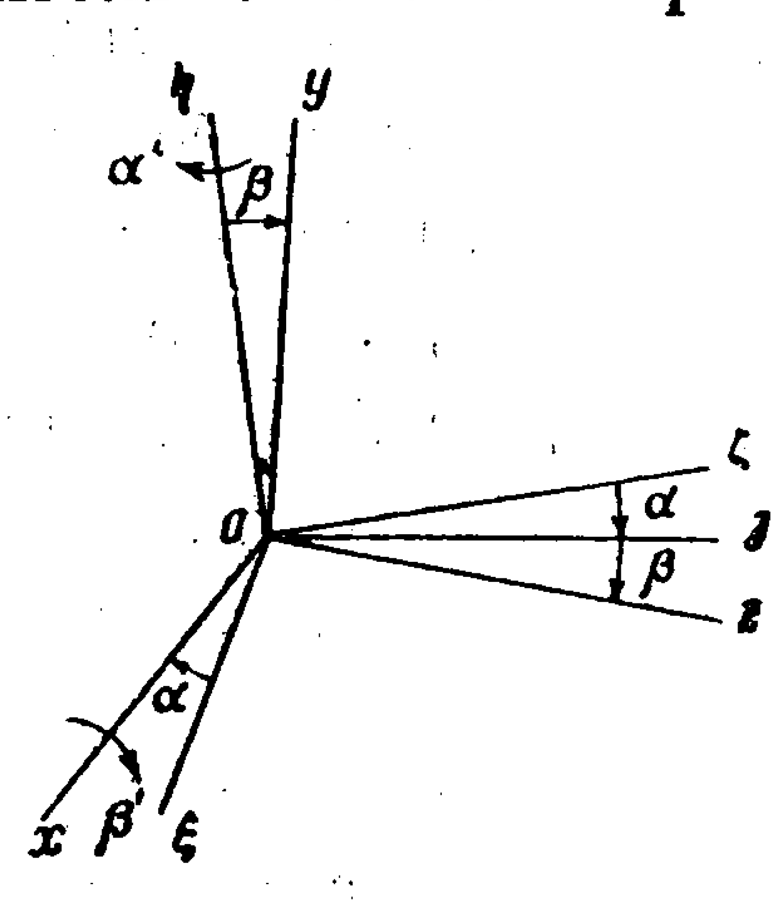
Живая сила относительных движений жидкости, наполняющей полость

$$2T^* = \rho \iiint \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \sum \omega_i \omega_j \,[\psi_i, \psi_j]$$

$$\omega_1 = p, \qquad \omega_2 = q, \qquad \omega_3 = r$$

$$[\psi_i, \psi_j] = \rho \iiint \left[\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x} + \frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y} + \frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right] d\tau$$

2. Полость в форме круглого цилиндра. Рассмотрим полость в форме круглого цилиндра радиуса a с осью z и высотой $2h$. Так как относительно любой прямой, проходящей через O ортогонально оси z, момент инерции твердой оболочки имеет одно значение, положение снаряда удобнее определять положением координатной системы $\xi\eta\zeta$, связанной со снарядом (фиг. 1).



Фиг. 1

Система прямоугольных осей $(\xi\eta\zeta)$ вращением вокруг оси η на угол α переходит в систему осей $(x\eta j)$, а система $(x\eta j)$ вращением вокруг оси x на угол β переходит в систему (xyz). Угол поворота снаряда вокруг его оси z в системе (xyz) обозначим через ω.

Из построения мы должны заключить, что углы α, β, ω являются голономными координатами снаряда и, следовательно, дифференциальные уравнения вращательных движений снаряда будут иметь в этих переменных вид уравнений Лагранжа.

Из чертежа выводим, что проекции абсолютной мгновенной скорости вращения твердой оболочки снаряда на оси x, y, z будут

$$p = \beta', \qquad q = \alpha' \cos\beta, \qquad r = -\alpha' \sin\beta + \omega'$$

где α', β', ω' обозначают производные по времени t соответственно от углов α, β, ω.

Полная живая сила снаряда вместе с наполняющей его полость жидкостью будет $T = T' + T^*$.

И так же как в классической задаче об устойчивости вращательных движений обычного снаряда с твердым снаряжением[1] для настильной траектории, будем учитывать лишь опрокидывающую пару с моментом $\mu \sin\gamma$, пропорциональным синусу угла γ между осью снаряда z и скоростью движения центра тяжести системы O.

Если принять, что ось ζ направлена по скорости центра тяжести системы O, то будем иметь $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Возможная работа опрокидывающей пары вычисляется просто:

$$\mu\sin\gamma\delta\gamma = \delta(-\mu\cos\gamma) = \delta(-\mu\cos\alpha\cos\beta) =$$

$$= \mu\sin\alpha\cos\beta\delta\alpha + \mu\cos\alpha\sin\beta\delta\beta = Q_\alpha\delta\alpha + Q_\beta\delta\beta + Q_\omega\delta\omega$$

Отсюда обобщенные силы Q_α, Q_β, Q_ω определяются формулами

$$Q_\alpha = \mu\sin\alpha\cos\beta, \qquad Q_\beta = \mu\cos\alpha\sin\beta, \qquad Q_\omega = 0$$

Чтобы составить дифференциальные уравнения вращательных движений наполненного жидкостью снаряда, нужно вычислить T^*. Задачу определения функций ψ разрешил Н. Е. Жуковский[2]. Приводим его решение с незначительным расширением.

Граничное условие для функции ψ_3 на поверхности полости S дает $d\psi_3/dn = 0$, ибо на боковой поверхности круглого цилиндра $\alpha/x = \beta/y$, а на основаниях цилиндра $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Отсюда согласно принципу Неймана имеем $\psi_3 = \mathrm{const}$ и, следовательно,

$$[\psi_1, \psi_3] = 0, \qquad [\psi_2, \psi_3] = 0, \qquad [\psi_3, \psi_3] = 0$$

Из осевой симметрии полости заключаем, что достаточно определить одну из функций ψ_1, ψ_2. Определим ψ_1. Положим

$$\psi_1 = F_1 - yz$$

Граничное условие (2) для функции ψ_1 дает для F_1 условие на S:

$$\frac{dF_1}{dn} = 2y\gamma$$

Итак, задача состоит в отыскании гармонической функции F_1 $(\Delta F_1 = 0)$, которая на боковой поверхности круглого цилиндра S удовлетворяет условию

$$\frac{dF_1}{dn} = 0 \tag{3}$$

а на основаниях цилиндра

$$\frac{dF_1}{dn} = \mp 2y \tag{4}$$

где знак минус берется для нижнего (u), а плюс для верхнего (0) основания.

В цилиндрических координатах уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

Положим

$$F_1 = \sin\theta \sum_n C_n R_n \operatorname{sh}\left\{\lambda_n\left(z - \frac{z_0 - z_n}{2}\right)\right\}$$

где C_n — постоянные, R_n — функция одного r, z_0 — координата верхнего основания круглой цилиндрической плоскости S, z_n — координата нижнего основания.

Из уравнения Лапласа для F_1 следует, что функции R_n должны удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2R_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr} + \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{r^2}\right)R_n = 0$$

Вводя новые переменные $\zeta = r\lambda_n$, приводим это уравнение к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2R}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dR}{d\zeta} + \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)R = 0$$

По смыслу рассматриваемой задачи при $r = 0$ должно получиться $R = 0$, ибо на оси z в цилиндрической полости S жидкость не должна иметь бесконечных значений для скорости, а стало быть ограниченной при $r = 0$ должна быть величина $r^{-1}\partial F_1/\partial\theta$.

Поэтому мы должны принять

$$R = J_1(\zeta) = \frac{\zeta}{2\pi}\int_0^\pi \cos(\zeta\cos\theta)\sin^2\theta\, d\theta$$

где $J_1(\zeta)$ обозначает Бесселев интеграл первого порядка и первого рода.

Граничное условие (3) дает на боковой поверхности S соотношение $dF_1/dr = 0$, или $dR_n/dr = 0$, или лучше

$$\frac{dJ_1(\zeta)}{d\zeta} = 0$$

Н. Е. Жуковский определил первые корни этого уравнения

$$\zeta_1 = 1.8412, \qquad \zeta_2 = 5.4315, \qquad \zeta_3 = 8.5363$$
$$\zeta_4 = 11.7060, \qquad \zeta_5 = 14.8633, \qquad \zeta_6 = 18.0155$$

Значения постоянных λ_n определяются согласно формуле

$$\lambda_n = \frac{\zeta_n}{a}$$

Граничное условие (4) для нижнего и верхнего оснований дает соотношение

$$\sum C_n\lambda_n J_1(\lambda_n r)\operatorname{ch}\lambda_n h = 2r$$

так как $z_0 - z_n = 2h$. Отсюда, используя известные формулы

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r)\, J_1(\lambda_m r)\, r\, dr = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m \\ \dfrac{\lambda_n^2 a^2 - 1}{2\lambda_n^2}[J_1(\lambda_n a)]^2, & \text{если } n = m \end{cases}$$

определим постоянные C_n:

$$C_n = \frac{4\lambda_n}{(\lambda_n^2 a^2 - 1)[J_1(\lambda_n a)]^2 \operatorname{ch}(\lambda_n h)}\int_0^a J_1(\lambda_n r)\, r^2 dr$$

Но [2]

$$\int_0^a J_1(\lambda_n r)\, r^2 dr = \frac{J_1(\zeta_n)\,\zeta_n}{\lambda_n^3} \qquad (\zeta_n = \lambda_n a)$$

Поэтому

$$F_1 = 4a^2 \sin\theta \sum_n \frac{1}{\zeta(\zeta_n^2 - 1)} \frac{J_1(\zeta_n r/a)}{J_1(\zeta_n)} \frac{1}{\operatorname{ch}(\zeta_n h/a)} \operatorname{sh}\left(\zeta_n \frac{2z - z_0 - z\zeta_n}{a}\right)$$

Вычислим $[\psi_1, \psi_1]$. Если учитывать граничные условия (3) и (4), то будем иметь

$$[\psi_1, \psi_1] = \rho \iiint \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - z\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - y\right)^2\right] d\tau =$$

$$= \rho \iiint (y^2 + z^2)\, d\tau + \rho \iint_C (F_1^{(0)} - F_1^{(u)})\, 2y\, d\sigma - 4\rho(z_0 - z_u) \iint_C y^2 d\sigma$$

где C обозначает основание цилиндрической полости. Подставляя сюда вычисленное значение функции F_1, получаем

$$[\psi_1, \psi_1] = M\frac{z_0^2 + z_0 z_u + z_u^2}{3} - Ma^2\left[\frac{3}{4} - 8\frac{a}{h}\sum_n \frac{1}{\zeta_n^3(\zeta^2 - 1)} \operatorname{th}\left(\zeta_n \frac{h}{a}\right)\right] \tag{6}$$

где $M = 2\pi\rho a^2 h$ обозначает массу жидкости, заполняющей полость снаряда. Формула эта совпадает с формулой Н. Е. Жуковского [2] при $z_0 = -z_u = h$.

Из симметрии полости относительно оси z следует равенство $[\psi_1, \psi_1] = [\psi_2, \psi_2]$; не составляет также труда установить, что $[\psi_1, \psi_2] = 0$. Обозначим

$$A^* = [\psi_1, \psi_1]$$

Живая сила вращательных движений снаряда вместе с наполняющей его полость жидкостью отсюда будет

$$2T = (A' + A^*)(p^2 + q^2) + C' r^2$$

Задача об устойчивости вращательных движений такого снаряда совпадает с классической задачей об устойчивости обычного снаряда с момента инерции $A = B = A' + A^*$, $C = C'$. Поэтому [3] можно писать непосредственно условие устойчивости вращательных движений снаряда с жидким снаряжением для настильных траекторий:

$$C'^2 r^2 - 4(A' + A^*)\mu > 0$$

Для идеальной несжимаемой жидкости для одного и того же снаряда рассмотренного типа (C', A' — постоянны) и для одних и тех же условий выстрела (r, μ — постоянны) плотность жидкости, увеличивая значение A^*, отрицательно влияет на условие устойчивости.

3. Круглая цилиндрическая полость с одной плоской диафрагмой. Чтобы повысить осевой момент инерции снаряда с жидким снаряжением и тем улучшить устойчивость вращательных движений снаряда на траектории, в круглую цилиндрическую полость вставляют диафрагмы.

Зададимся вопросом изучить влияние одной плоской диафрагмы, поставленной по некоторой диаметральной плоскости полости.

Снаряд с одной диафрагмой не обладает осевой симметрией. Поэтому для удобства вычислений за оси x, y, z будем выбирать оси, связанные с твердой оболочкой, с началом в центре тяжести снаряженного снаряда O, так, чтобы плоскость $y=0$ была плоскостью диафрагмы.

Проекции мгновенной абсолютной угловой скорости снаряда на эти оси будут

$$p=\beta'\cos\omega+\alpha'\sin\omega\cos\beta$$

$$q=-\beta'\sin\omega+\alpha'\cos\omega\cos\beta$$

$$r=\omega'-\alpha'\sin\beta$$

Живая сила вращательных движений твердой оболочки будет

$$2T'=A'p^2+B'q^2+C'r^2$$

где постоянные A', B', C' обозначают моменты инерции снаряда относительно осей x, y, z. Живая сила жидкости будет выражаться общей формулой

$$2T^*=\sum\omega_i\omega_j[\psi_i,\ \psi_j]$$

Нужно определить функции ψ_i. Функцию ψ_3 нашел Стокс [4].

Будем рассматривать ту часть полости, разделенной диафрагмой, в которой ($x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$) угол θ изменяется от 0 до π. Положим

$$\psi_3=xy+F_3$$

Условия (2) на границе полости дают соотношение

$$dF_3/dn=-2y\alpha$$

Отсюда на стенке цилиндра $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ имеем

$$\partial F_3/\partial r=-a\sin 2\theta \qquad (r=a) \tag{7}$$

на диафрагме $(\theta=0,\ \theta=\pi)$

$$\partial F_3/\partial r\theta=0 \tag{8}$$

и на секторах верхнего и нижнего оснований

$$\partial F_3/\partial z=0 \tag{9}$$

Функцию F_3 будем искать в виде

$$F_3=\sum_n^{\infty}C_nr^n\cos n\theta$$

Граничное условие (9) удовлетворяется непосредственно, так как F не зависит от z; условие (8) также выполняется, ибо на стенках диафрагмы $y=0$ имеем $\theta=0$, $\theta=\pi$.

Если использовать формулу [5]

$$\sin 2\theta=-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\theta}{(2k-1)^2-4} \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

то граничное условие (7) можем записать в виде

$$\sum_n C_nna^{n-1}\cos n\theta=\frac{8a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\theta}{(2k-1)^2-4}$$

Отсюда

$$C_{2k}=0, \qquad C_{2k-1}=\frac{8a^{3-2k}}{\pi(2k-1)[(2k-1)^2-4]}$$

Для рассматриваемой половины ($y>0$) круглой полости можем отсюда вычислить

$$[\psi_3,\ \psi_3]=Ma^2\left(\frac{5}{4}-\frac{32}{\pi^2}\sum_n\frac{1}{n(n^2-4)^2}\right) \qquad (n=1,\ 3,5,\ldots) \tag{10}$$

где по-прежнему $M=2\pi\rho a^2h$. Можно показать, что

$$[\psi_1,\ \psi_3]=0, \qquad [\psi_2,\ \psi_3]=0$$

Займемся вычислением функции ψ_1. Положим $\psi_1=F_1-yz$; граничные условия (2) дают на границе рассматриваемой полости соотношение

$$dF_1/dn=2y\gamma$$

Иными словами, на боковой поверхности, так как на ней $\gamma=0$, дожно быть

$$dF_1/dn=0 \tag{11}$$

а на основаниях

$$dF_1/dn=\mp 2y \tag{12}$$

где знак минус берется для нижнего, а плюс для верхнего основания.

Внутри полости функция F_1 должна быть гармонической $\Delta F_1=0$; она должна в цилиндрических координатах удовлетворять уравнению (5).

Положим

$$F_1=\sum_{n,\ m}C_{nm}\cos n\theta R_{nm}\operatorname{sh}\lambda_{nm}\left(z-\frac{z_0+z_u}{2}\right)$$

где R_{nm} обозначают функции одного r. Функция R_{nm} должна удовлетворять уравнению

$$R_{n}''{}_{m}+\frac{R_{n}'{}_{m}}{r}+\left(\lambda_{nm}-\frac{n^2}{r^2}\right)R_{nm}=0$$

Если ввести новое переменное $\zeta=\lambda_{nm}r$, то уравнение это будет известным уравнением Бесселя

$$\frac{d^2R_{nm}}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{dR_{nm}}{d\zeta}+\left(1-\frac{n^2}{\zeta^2}\right)R_{nm}=0$$

Для нашей задачи мы должны принять

$$R_{nm}=J_n(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(\zeta\sin z-nz)\,dz$$

где $J_n(\zeta)$ обозначает Бесселев интеграл n-го порядка и первого рода.

На поверхности круглого цилиндра ($r=a,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi$) из граничного условия (11) выводим уравнения

$$dJ_n(\zeta)/d\zeta=0 \qquad (\zeta=\lambda_{nm}a)$$

определяющие собственные значения λ_{nm}. Граничное условие (11) на диафрагме ($y=0$, $\theta=0$, $\theta=\pi$) удовлетворяется непосредственно. Согласно условию (12) для верхнего и нижнего оснований имеем ($z_0-z_u=2h$)

$$\sum_{n,m} C_{nm}\lambda_{nm}\cos n\theta R_{nm}\operatorname{ch}(\lambda_{nm}h)=2r\sin\theta \tag{13}$$

Для значений θ на интервале $(0,\pi)$ функция $\sin\theta$ может быть разложена в ряд Фурье по косинусам

$$\sin\theta=-\frac{4}{\pi}\sum\frac{\cos n\theta}{n^2-1} \qquad (n=0,2,4,\ldots)$$

Подставляя этот ряд в формулу (13) и сравнивая коэффициенты при $\cos\theta$, получим для $n=0, 2, 4, \ldots$

$$\sum_{m} C_{nm}\lambda_{nm}J_n(\lambda_{nm}r)\operatorname{ch}(\lambda_{nm}h)=-\frac{8}{\pi}\frac{r}{n^2-1} \tag{14}$$

и в первой части нули при $n=1, 3, 5, \ldots$

Отсюда в силу известных формул

$$\int_0^a rJ_n(\lambda_{nk}r)J_n(\lambda_{nm}r)\,dr=\begin{cases}0 & \text{при } \lambda_{nk}\neq\lambda_{nm}\\ \dfrac{\lambda_{nm}^2a-1}{2\lambda_{nm}^2}[J_n(\lambda_{nm}a)]^2 & \text{при } \lambda_{nm}=\lambda_{nk}\end{cases}$$

определяются значения постоянных C_{nm} $(n=0, 2, 4, \ldots)$

$$C_{nm}=-\frac{16}{\pi(n^2-1)}\frac{\lambda_{nm}}{(\lambda_{nm}^2a^2-1)\operatorname{ch}(\lambda_{nm}h)[J_n(\lambda_{nm}a)]^2}\int_0^a r^2J_n(\lambda_{nm}r)\,dr$$

Для нечетных значений n постоянные C_{nm} суть нули.

Подставляя значения этих постоянных в функцию F_1, а эту последнюю в использованные в п. 2 выражения $[\psi_1, \psi_1]$, после вычислений получим

$$[\psi_1, \psi_1]=\frac{M}{2}\Bigg[\frac{z_0^2+z_0z_u+z_u^2}{3}-\frac{3}{4}a^2+$$

$$+\frac{128}{\pi^2a^2h}\sum_{n,m}\frac{\lambda_{nm}\operatorname{th}(\lambda_{nm}h)}{(\lambda_{nm}^2a^2-1)(n^2-1)^2}\left(\frac{1}{J_n(\lambda_{nm}a)}\int_0^a r^2J_n(\lambda_{nm}r)\,dr\right)^2\Bigg]$$

Теперь найдем функцию ψ_2. С этой целью положим

$$\psi_2=xz+F_2$$

Граничные условия на поверхности рассматриваемой полости будут

$$dF_2/dn=-2x\gamma$$

Это значит, что на боковой поверхности полости $(\gamma=0)$ должно быть

$$dF_2/dn=0$$

а на основаниях

$$dF_2/dn=\pm 2x$$

где знак плюс берется для нижнего, а минус для верхнего основания.

Функцию F_2 будем искать в виде ряда

$$F_2 = \sum_n C_n \cos\theta J_1(\lambda_n r) \operatorname{sh} \lambda_n \left(z - \frac{z_0 + z_u}{2}\right)$$

На той части поверхности кругового цилиндра, которая входит в границу рассматриваемой полости $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, в силу граничного условия имеем уравнение

$$\frac{dJ_1(\lambda_n a)}{da} = 0$$

определяющее значения постоянных λ_n.

На плоской диафрагме граничное условие выполняется, так как на ней $\sin\theta = 0$.

Из граничных условий на основаниях полости получаем

$$\sum_n C_n J_1(\lambda_n r) \lambda_n \operatorname{ch}(\lambda_n h) = -2r$$

Отсюда

$$C_n = \frac{4a^2}{\zeta_n(\zeta_n^2 - 1) \operatorname{ch}(\lambda_n h) J_1(\zeta)} \qquad (\zeta_n = \lambda_n a)$$

Следовательно,

$$F_2 = -4a^2 \cos\theta \sum_n \frac{1}{\zeta_n(\zeta_n^2 - 1)} \frac{J_1(\zeta_n r/a)}{J_1(\zeta_n)} \frac{1}{\operatorname{ch}(\zeta_n h/a)} \operatorname{sh}\left(\zeta_n \frac{2z - z_0 - z_u}{2}\right)$$

Подставляя это выражение для F_2 в $[\psi_2, \psi_2]$, после вычислений получаем

$$[\psi_2, \psi_2] = \frac{M}{2}\left[\frac{z_0^2 + z_0 z_u + z_u^2}{3} + \frac{5}{4}a^2 - 4a^2 \frac{a}{h} \sum_n \frac{1}{\zeta_n^3(\zeta_n^2 - 1)} \operatorname{th}\left(\zeta_n \frac{h}{a}\right)\right]$$

Для рассматриваемой полости $[\psi_1, \psi_2] = 0$.

Моменты инерции присоединенных масс для жидкости, заполняющей разгороженную одной плоской диафрагмой круглую цилиндрическую полость, будут

$$A^* = 2[\psi_1, \psi_1], \qquad B^* = 2[\psi_2, \psi_2], \qquad C^* = 2[\psi_3, \psi_3]$$

Живая сила вращательных движений снаряда вместе с наполняющей его жидкостью будет

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

где

$$A = A' + A^*, \qquad B = B' + B^*, \qquad C = C' + C^*$$

Отсюда мы видим, что эллипсоид инерции снаряда и присоединенных масс будет в этом случае трехосным. Такого случая в задаче об устойчивости продолговатого снаряда с твердым наполнением не исследовали полностью. Его следует рассмотреть особо.

С этой целью, выбирая за лагранжевы переменные углы α, β, ω, составим уравнения вращательных движений снаряда в форме уравнений Лагранжа; при этом за обобщенные силы мы примем, как это выяснено в п. 1:

$$Q_\alpha = \mu \sin\alpha \cos\beta, \qquad Q_\beta = \mu \cos\alpha \sin\beta, \qquad Q_\omega = 0$$

Явный вид уравнений Лагранжа при этом будет

$$C\frac{d}{dt}(\omega'-\alpha'\sin\beta)=(A-B)(-\beta'^2+\alpha'^2\cos^2\beta)\cos\omega\sin\omega+$$
$$+(A-B)\alpha'\beta'(\cos^2\omega-\sin^2\omega)\cos\beta$$

$$\frac{d}{dt}[A(\beta'\cos\omega+\alpha'\sin\omega\cos\beta)\sin\omega\cos\beta+$$
$$+B(-\beta'\sin\omega+\alpha'\cos\omega\cos\beta)\cos\omega\cos\beta-$$
$$-C(\omega'-\alpha'\sin\beta)\sin\beta]=\mu\sin\alpha\cos\beta$$

$$\frac{d}{dt}[A(\beta'\cos\omega+\alpha'\sin\omega\cos\beta)\cos\omega-B(-\beta'\sin\omega+\alpha'\cos\omega\cos\beta)\sin\omega]=$$
$$=-[A(\beta'\cos\omega+\alpha'\sin\omega\cos\beta)\alpha'\sin\omega\sin\beta+$$
$$+B(-\beta'\sin\omega+\alpha'\cos\omega\cos\beta)\alpha'\cos\omega\sin\beta+$$
$$+C(\omega'-\alpha'\sin\beta)\alpha'\cos\beta]+\mu\cos\alpha\sin\beta$$

Уравнения эти имеют частное решение

$$\omega'=\omega_0',\qquad \alpha=0,\qquad \beta=0$$

Выберем это частное решение за невозмущенное движение и поставим задачу исследовать его устойчивость в первом приближении. Положим $\omega_0=\omega_0't$, $\omega-\omega_0=\xi$. Уравнения в вариациях для этого невозмущенного движения имеют вид:

$$C\xi''=0$$

$$A(\beta''\cos\omega_0+\alpha'\sin\omega_0)+(A-B)\omega_0'(-\beta'\sin\omega_0+\alpha\cos\omega_0)=$$
$$=-C\omega_0'(-\beta'\sin\omega_0+\alpha'\cos\omega_0)+\mu(\beta\cos\omega_0+\alpha\sin\omega_0)$$

$$B(-\beta''\sin\omega_0+\alpha''\cos\omega_0)+(A-B)\omega_0'(\beta'\cos\omega_0+\alpha'\sin\omega_0)=$$
$$=C\omega_0'(\beta'\cos\omega_0+\alpha'\sin\omega_0)+\mu(-\beta\sin\omega_0+\alpha\cos\omega_0)$$

Система эта представляет уравнения с периодическими коэффициентами ($\omega_0=\omega_0't$). Как установил Ляпунов[6], такие системы дифференциальных уравнений возможно, не меняя задачи устойчивости, привести к системе с постоянными коэффициентами. Первое из уравнений особого интереса не представляет; оно выражает очевидное свойство угла ω при возмущении начальных данных в первом приближении. Чтобы преобразовать последние два уравнения, введем новые переменные:

$$u=\alpha\sin\omega_0+\beta\cos\omega_0,\qquad v=\alpha\cos\omega_0-\beta\sin\omega_0$$

Определитель преобразования отличен от нуля и равен -1. Отсюда

$$\alpha'\sin\omega_0+\beta'\cos\omega_0=u'-\omega_0'v$$
$$\alpha'\cos\omega_0-\beta'\sin\omega_0=v'+\omega_0'u$$
$$\alpha''\sin\omega_0+\beta''\cos\omega_0=u''-2\omega_0'v'-\omega_0'^2u$$
$$\alpha''\cos\omega_0-\beta''\sin\omega_0=v''+2\omega_0'u'-\omega_0'^2v$$

Следовательно, уравнения в вариациях в новых переменных будут

$$A(u''-2\omega_0'v'-\omega_0'^2u)=\mu u+C\omega_0'(-v'-\omega_0'u)$$
$$B(v''+2\omega_0'u'-\omega_0'^2v)=\mu v+C\omega_0'(u'-\omega_0'v)$$

или лучше

$$Au'' + [(C - B)\,\omega_0'^2 - \mu]\,u + (C - A - B)\,\omega_0' v' = 0$$
$$Bv'' + [(C - A)\,\omega_0'^2 - \mu]\,v - (C - A - B)\,\omega_0' u' = 0$$

Характеристичное уравнение этой системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами есть

$$AB\lambda^4 + \{[AB + (A - C)(B - C)]\,\omega_0'^2 - \mu(A - B)\}\,\lambda^2 + \\ + [(C - B)\,\omega_0'^2 - \mu]\,[(C - A)\,\omega_0'^2 - \mu] = 0$$

Условия, что корни этого уравнения суть чисто мнимые величины, выражаются следующими тремя неравенствами:

$$[(C - A)\,\omega_0'^2 - \mu]\,[(C - B)\,\omega_0'^2 - \mu] > 0$$
$$[AB + (A - C)(B - C)]\,\omega_0'^2 - \mu(A + B) > 0$$
$$[(AB + (A - C)(B - C))\,\omega_0'^2 - \mu\,(A + B)]^2 - \\ - 4AB\,[(C - A)\,\omega_0'^2 - \mu]\,[(C - B)\,\omega_0'^2 - \mu] > 0$$

Можно заметить, что последнее из этих условий при $A = B$ приводится к известному условию Майевского для устойчивости вращательных движений снаряда; два первых неравенства при этом будут удовлетворены.

4. Круглая цилиндрическая полость с крестовиной. Рассмотрим теперь случай, когда диафрагмы в круглой цилиндрической полости составляют крестовину из двух взаимно ортогональных диаметральных плоскостей. Так как эллипсоид инерции твердой оболочки снаряда будет эллипсоидом вращения вокруг оси z, оси координат выберем сначала связанными с диафрагмой так, чтобы уравнения диафрагм были $x = 0$, $y = 0$, а после в динамической части этого параграфа перейдем к осям, использованным в п. 2.

Функцию ψ_3 нашел Стокс [4] переходом к пределу при вычислении значения одной неопределенности. Изменением вычислений Стокса заниматься не будем и примем выражение $[\psi_3, \psi_3]$, приведенное у Жуковского [2].

Для рассматриваемой полости

$$[\psi_1, \psi_3] = 0, \qquad [\psi_2, \psi_3] = 0, \qquad [\psi_1, \psi_2] = 0$$

и также очевидно, что после вычисления функции ψ_1 задача о вычислении функции ψ_2 не возникает, ибо

$$[\psi_1, \psi_1] = [\psi_2, \psi_2]$$

С целью вычислить ψ_1, положим

$$\psi_1 = -yz + F_1$$

Граничные условия (2) дают

$$\frac{dF_1}{dn} = 2y\gamma$$

На боковой поверхности полости $0 \leqslant \theta \leqslant 1/2\pi$, отделенной крестовиной, $\gamma = 0$ и, значит, должно быть

$$\frac{dF_1}{dn} = 0$$

а на основаниях
$$\frac{dF_1}{dn} = \mp 2y$$
где знак минус берется для нижнего, а плюс для верхнего основания.

Будем искать гармоническую функцию F_1 в виде ряда $(n=0, 2, 4, \ldots)$
$$F_1 = \sum_{n,m} C_{nm} \cos n\theta J_n(\lambda_{nm} r) \operatorname{sh}\left(\lambda_{nm}\left(z - \frac{z_0 + z_u}{2}\right)\right)$$

На поверхности круглого цилиндра, ограничивающего рассматриваемую полость $0 \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi$, имеем согласно граничным условиям
$$\frac{dJ_n(\lambda_{nm} a)}{da} = 0$$

Уравнения эти определяют значения λ_{nm}. Граничные условия на диафрагме будут удовлетворены, так как на диафрагме при четном n будем иметь $\sin n\theta = 0$.

Граничные условия на верхнем и нижнем основаниях дают
$$\sum_{n,m} C_{nm} \lambda_{nm} \cos n\theta J_n(\lambda_{nm} r) \operatorname{ch}(\lambda_{nm} h) = 2r \sin\theta$$

Применяя для $0 \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi$ использованное в предыдущем параграфе разложение $\sin\theta$ в ряд по косинусам, получаем установленные в нем значения для C_{nm}. Откуда $(n=0, 2, 4, \ldots)$
$$[\psi_1, \psi_1] = \frac{M}{4}\left(\frac{z_0^2 + z_0 z_u + z_u^2}{3} - \frac{3a^2}{4}\right) +$$
$$+ \frac{64\rho}{4} \sum_{n,m} \frac{1}{(n-1)^2} \frac{\lambda_{nm} \operatorname{th}(\lambda_{nm} h)}{\lambda_{nm}^2 a^2 - 1} \left(\frac{1}{J_n(\lambda_{nm} a)} \int_0^a r^2 J_n(\lambda_{nm} r) dr\right)$$

Отсюда моменты инерции присоединенных масс для жидкости, заполняющей все четыре отсека полости, разделенной крестовиной, будут
$$A^* = B^* = 4[\psi_1, \psi_1], \qquad C^* = 4[\psi_3, \psi_3]$$

Эллипсоид инерции снаряда с жидким снаряжением идеальной жидкостью будет отсюда эллипсоидом вращения вокруг оси снаряда. Задача об устойчивости вращательных движений такого снаряда совпадает с классической и, стало быть, условие устойчивости можем писать непосредственно
$$(C' + C^*)^2 r^2 - 4(A' + A^*)\mu > 0$$

В левой части стоит полином второй степени от плотности жидкости ρ. Зависимость устойчивости от плотности будет поэтому определяться расположением вещественных корней этого полинома.

ЛИТЕРАТУРА

1. Майевский Н. В. О влиянии вращательного движения на полет продолговатых снарядов в воздухе. СПб., 1865.
2. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Полн. собр. соч., т. 3.
3. Четаев Н. Г. О достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда, ПММ, т. VII, вып. 2, 1943.
4. Стокс. Mathematical and Physical Papers, vol. I, p. 305, Собр. соч.
5. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, стр. 277, формула (22) при $\alpha=2$, изд. 1-е.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости, п. 47.