Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Б. Л. Абрамян

(Ереван)

В настоящей статье приводится решение первой краевой плоской задачи теории упругости для прямоугольной области при произвольном загружении кромок прямоугольника нормальными и тангенциальными напряжениями.

Как было упомянуто в сообщении [1], плоской задаче теории упругости для прямоугольника посвящено много исследований. В одной группе работ, а именно в работах Л. Файлона [2], М. Рибьера [3], Ф. Блейха [4] и других, граничные условия задачи задаются только на двух противоположных сторонах прямоугольника, на других же сторонах условия удовлетворяются не полностью. Более точно удовлетворяются граничные условия в работах П. Ф. Папковича [5], А. И. Лурье [6], В. К. Прокопова [7], а также М. М. Филоненко-Бородича [8]

В данной статье решение задачи представляется в виде рядов Фурье по тригонометрическим функциям.

Для определения коэффициентов разложений получены бесконечные системы линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны. Это позволяет дать приближения к искомым величинам сверху и снизу, вследствие чего предлагаемое решение можно считать точным.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника при несимметричных граничных условиях, заданных в напряжениях.

Как известно, в плоской задаче теории упругости напряжения могут быть определены посредством одной бигармонической функции $\Phi(x, y)$ следующими формулами:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{1.1}$$

Ищем бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$ в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\alpha_k x\,\{A_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k y + B_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k y + \alpha_k y\,(C_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k y + D_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k y)\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sin\beta_k y\{A_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k x + B_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k x + \beta_k x\,(C_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k x + D_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k x)\} \tag{1.2}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \qquad \beta_k = \frac{k\pi}{h} \tag{1.3}$$

Здесь l — длина прямоугольника, а h — высота. Полагаем, что напряжения на кромках прямоугольника заданы произвольным образом

$$\begin{aligned} &\sigma_x(l, y) = f_1(y), && \sigma_x(0, y) = f_5(y) && \\ &\tau_{xy}(l, y) = f_2(y), && \tau_{xy}(0, y) = f_6(y) && (0 \leqslant y \leqslant h) \\ &\sigma_y(x, h) = f_3(x), && \sigma_y(x, 0) = f_7(x) && \\ &\tau_{xy}(x, h) = f_4(x), && \tau_{xy}(x, 0) = f_8(x) && (0 \leqslant x \leqslant l) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где функции f_i — кусочно непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

Пользуясь соотношениями (1.1) и (1.4) и представляя функции f_i в виде рядов Фурье, получим условия

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{x=l}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\beta_k y,\quad \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)_{x=l}=-\frac{b_0}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}b_k\cos\beta_k y$$

$$(0<y<h)$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{x=0}=\sum_{k=1}^{\infty}e_k\sin\beta_k y,\quad \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)_{x=0}=-\frac{f_0}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}f_k\cos\beta_k y \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_{y=h}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\sin\alpha_k x,\quad \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)_{y=h}=-\frac{d_0}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}d_k\cos\alpha_k x$$

$$(0<x<l)$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_{y=0}=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\sin\alpha_k x,\quad \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)_{y=0}=-\frac{h_0}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}h_k\cos\alpha_k x \tag{1.6}$$

§ 2. Определение неизвестных коэффициентов. Удовлетворив условиям (1.5) и (1.6), для определения коэффициентов получаем соотношения

$$-\beta_k^2\left[A_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k l+B_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k l+\beta_k l\left(C_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k l+D_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k l\right)\right]=a_k \tag{2.1}$$

$$\frac{b_0}{2}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\alpha_k\left\{A_k^{(1)}(\operatorname{ch}\alpha_k h-1)+B_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k h+\right.$$

$$\left.+\alpha_k h\left(C_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k h+D_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k h\right)\right\} \tag{2.2}$$

$$b_p+\beta_p^2\left[\left(A_p^{(2)}+D_p^{(2)}\right)\operatorname{sh}\beta_p l+\left(B_p^{(2)}+C_p^{(2)}\right)\operatorname{ch}\beta_p l+\right.$$

$$\left.+\beta_p l\left(C_p^{(2)}\operatorname{sh}\beta_p l+D_p^{(2)}\operatorname{ch}\beta_p l\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{h}(-1)^p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\alpha_k^3}{\alpha_k^2+\beta_p^2}\left\{\left(A_k^{(1)}+D_k^{(1)}\right)\operatorname{ch}\alpha_k h+\left(B_k^{(1)}+C_k^{(1)}\right)\operatorname{sh}\alpha_k h+\right.$$

$$\left.+C_k^{(1)}(\operatorname{sh}\alpha_k h+\alpha_k h\operatorname{ch}\alpha_k h)+D_k^{(1)}(\operatorname{ch}\alpha_k h+\alpha_k h\operatorname{sh}\alpha_k h)\right\}-$$

$$-\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\alpha_k^3}{\alpha_k^2+\beta_p^2}\left(A_k^{(1)}+2D_k^{(1)}\right)-\frac{4}{h}(-1)^p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\alpha_k^5}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}\left(C_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k h+\right.$$

$$\left.+D_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k h\right)+\frac{4}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\alpha_k^5}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}D_k^{(1)} \tag{2.3}$$

$$-\alpha_k^2\left[A_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k h+B_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k h+\alpha_k h\left(C_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k h+D_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k h\right)\right]=c_k \tag{2.4}$$

$$\frac{d_0}{2}=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\beta_k\left[A_k^{(2)}(\operatorname{ch}\beta_k l-1)+B_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k l+\beta_k l\left(C_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k l+\right.\right.$$

$$\left.\left.+D_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k l\right)\right] \tag{2.5}$$

$$d_p+\alpha_p^2\left[\left(A_p^{(1)}+D_p^{(1)}\right)\operatorname{sh}\alpha_p h+\left(B_p^{(1)}+C_p^{(1)}\right)\operatorname{ch}\alpha_p h+\alpha_p h\left(C_p^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_p h+\right.\right.$$

$$\left.\left.+D_p^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_p h\right)\right]=\frac{2}{l}(-1)^p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\beta_k^3}{\beta_k^2+\alpha_p^2}\left\{\left(A_k^{(2)}+D_k^{(2)}\right)\operatorname{ch}\beta_k l+\right.$$

$$+ (B_k^{(2)} + C_k^{(2)}) \operatorname{sh} \beta_k l + C_k^{(2)} (\operatorname{sh} \beta_k l + \beta_k l \operatorname{ch} \beta_k l) + \tag{2.6}$$

$$+ D_k^{(2)} (\operatorname{ch} \beta_k l + \beta_k l \operatorname{sh} \beta_k l)\} - \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \beta_k^3}{\beta_k^2 + \alpha_p^2} (A_k^{(2)} + 2D_k^{(2)}) -$$

$$- \frac{4}{l} (-1)^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \beta_k^5}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} (C_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k l + D_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta l) + \frac{4}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \beta_k^5}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} D_k^{(2)}$$

$$- \beta_k^2 A_k^{(2)} = e_k \tag{2.7}$$

$$\frac{f^0}{2} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \{A_k^{(1)} (\operatorname{ch} \alpha_k h - 1) + B_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k h + \alpha_k h (C_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k h + D_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k h)\} \tag{2.8}$$

$$f_p + \beta_p^2 (B_p^{(2)} + C_p^{(2)}) = \frac{2}{h} (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^3}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} \{(A_k^{(1)} + D_k^{(1)}) \operatorname{ch} \alpha_k h +$$

$$+ (B_k^{(1)} + C_k^{(1)}) \operatorname{sh} \alpha_k h + C_k^{(1)} (\operatorname{sh} \alpha_k h + \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h) +$$

$$+ D_k^{(1)} (\operatorname{ch} \alpha_k h + \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h)\} + \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^3}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} (A_k^{(1)} + 2D_k^{(1)}) + \tag{2.9}$$

$$+ \frac{4}{h} (-1)^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^5}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} (C_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k h + D_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k h) - \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^5}{(a_k^2 + \beta_p^2)^2} D_k^{(1)} -$$

$$- \alpha_k^2 A_k^{(1)} = g_k \tag{2.10}$$

$$\frac{h_0}{2} = - \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \{A_k^{(2)} (\operatorname{ch} \beta_k l - 1) + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k l +$$

$$+ \beta_k l (C_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k l + D_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k l)\} \tag{2.11}$$

$$h_p + \alpha_p^2 (B_p^{(1)} + C_p^{(1)}) = \frac{2}{l} (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^3}{\beta_k^2 + \alpha_p^2} \{(A_k^{(2)} + D_k^{(2)}) \operatorname{ch} \beta_k l +$$

$$+ (B_k^{(2)} + C_k^{(2)}) \operatorname{sh} \beta_k l + C_k^{(2)} (\operatorname{sh} \beta_k l + \beta_k l \operatorname{ch} \beta_k l) + D_k^{(2)} (\operatorname{ch} \beta_k l + \beta_k l \operatorname{sh} \beta_k l)\} +$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^3}{\beta_k^2 + \alpha_p^2} (A_k^{(2)} + 2D_k^{(2)}) + \tag{2.12}$$

$$+ \frac{4}{l} (-1)^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^5}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} (C_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k l + D_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k l) - \frac{4}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^5}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} D_k^{(2)}$$

При этом использованы разложения

$$\operatorname{sh} \alpha_k y = \frac{\operatorname{ch} \alpha_k h - 1}{\alpha_k h} + \frac{2\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k h}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \beta_p y}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} - \frac{2\alpha_k}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_p y}{\alpha_k^2 + \beta_p^2}$$

$$(0 \leqslant y \leqslant h) \tag{2.13}$$

$$\operatorname{ch} \alpha_k y = \frac{\operatorname{sh} \alpha_k h}{\alpha_k h} + \frac{2\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k h}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \beta_p y}{\beta_p^2 + \alpha_k^2} \qquad (0 \leqslant y \leqslant h) \tag{2.14}$$

$$\alpha_k y \operatorname{ch} \alpha_k y = \frac{\alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h - \operatorname{ch} \alpha_k h + 1}{\alpha_k h} - \frac{2\alpha_k}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_p y}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} +$$
$$+ \frac{2\alpha_k}{h} (\operatorname{ch} \alpha_k h + \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \beta_p y}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} -$$
$$- \frac{4\alpha_k^3 \operatorname{ch} \alpha_k h}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \beta_p y}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2)^2} + \frac{4\alpha_k^3}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_p y}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \qquad (0 \leqslant y \leqslant h) \qquad (2.15)$$

$$\alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y = \frac{\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h - \operatorname{sh} \alpha_k h}{\alpha_k h} - \frac{4\alpha_k^3 \operatorname{sh} \alpha_k h}{h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \beta_p y}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2)^2} +$$
$$+ \frac{2\alpha_k}{h} (\operatorname{sh} \alpha_k h + \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \beta_p y}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} \qquad (0 \leqslant y \leqslant h) \qquad (2.16)$$

а также аналогичные разложения для функций $\operatorname{sh} \beta_k x$, $\operatorname{ch} \beta_k x$, $x \operatorname{ch} \beta_k x$ и $x \operatorname{sh} \beta_k x$ по функциям $\{\cos \alpha_k x\}$ на интервале $(0,\ l)$.

Из соотношений (2.2), (2.4), (2.8) и (2.10) следуют равенства

$$\frac{b_0}{2} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k} (g_k - c_k), \qquad \frac{f_0}{2} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k - g_k}{\alpha_k} \qquad (2.17)$$

Аналогичным образом из (2.1), (2.5), (2.7) и (2.11) получаем

$$\frac{d_0}{2} = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\beta_k} (e_k - a_k), \qquad \frac{h_0}{2} = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - e_k}{\beta_k} \qquad (2.18)$$

Из равенств (2.17) и (2.18) получаются соотношения

$$b_0 - f_0 = \frac{4}{h} \sum_{k=1,3,\ldots} \frac{g_k - c_k}{\alpha_k}, \qquad d_0 - h_0 = \frac{4}{l} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{e_k - a_k}{\beta_k} \qquad (2.19)$$

которые являются уравнениями равновесия действующих сил.

Из соотношений (2.7) и (2.10) $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ определяются, а из соотношений (2.1) и (2.4) неизвестные $B_k^{(1)}$ и $B_k^{(2)}$ выражаются через $C_k^{(1)}$, $D_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$ и $D_k^{(2)}$. Пользуясь этими значениями для определения неизвестных $C_k^{(1)}$, $D_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$ и $D_k^{(2)}$, получим совокупность следующих четырех бесконечных систем линейных уравнений [9]:

$$\frac{8\beta_p^2}{h} (-1)^{p+1} \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\alpha_k^3}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} (C_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k h + D_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k h) +$$
$$+ \frac{8\beta_p^2}{h} \sum_{k=2,4,\ldots} \frac{\alpha_k^3}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} D_k^{(1)} = \beta_p^2 (\operatorname{sh} \beta_p l - \beta_p l) \left(D_p^{(2)} + C_p^{(2)} \operatorname{cth} \frac{\beta_p l}{2}\right) +$$
$$+ \frac{4}{h} (-1)^{p+1} \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\alpha_k c_k}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} + \frac{4}{h} \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\alpha_k g_k}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} + b_p + f_p +$$
$$+ (e_p - a_p) \operatorname{cth} \frac{\beta_p l}{2} \qquad (p = 1, 2, \ldots) \qquad (2.20)$$

$$\frac{8\beta_p^2}{h}(-1)^{p+1}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\alpha_k^3}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}(C_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k h+D_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k h)+$$

$$+\frac{8\beta_p^2}{h}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\alpha_k^3}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}D_k^{(1)}=-\beta_p^2(\operatorname{sh}\beta_p l+\beta_p l)\left(D_p^{(2)}+C_p^{(2)}\operatorname{th}\frac{\beta_p l}{2}\right)+$$

$$+\frac{4}{h}(-1)^{p+1}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\alpha_k c_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}+\frac{4}{h}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\alpha_k g_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}+$$

$$+f_p-b_p+(e_p+a_p)\operatorname{th}\frac{\beta_p l}{2}\qquad(p=1,2,\dots)\tag{2.21}$$

$$\frac{8\alpha_p^2}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=2,4,\dots}^{\infty}\frac{\beta_k^3}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}(C_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k l+D_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k l)+$$

$$+\frac{8\alpha_p^2}{l}\sum_{k=2,4,\dots}\frac{\beta_k^3}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}D_k^{(2)}=\alpha_p^2(\operatorname{sh}\alpha_p h-\alpha_p h)\left(D_p^{(1)}+C_p^{(1)}\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}\right)+$$

$$+\frac{4}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=2,4,\dots}^{\infty}\frac{\beta_k a_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}+\frac{4}{l}\sum_{k=2,4,\dots}^{\infty}\frac{\beta_k e_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}+$$

$$+d_p+h_p+(g_p-c_p)\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}\qquad(p=1,2,\dots)\tag{2.22}$$

$$\frac{8\alpha_p^2}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\beta_k^3}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}(C_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k l+D_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k l)+$$

$$+\frac{8\alpha_p^2}{l}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\beta_k^3}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}D_k^{(2)}=-\alpha_p^2(\operatorname{sh}\alpha_p h+\alpha_p h)\left(D_p^{(1)}+C_p^{(1)}\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}\right)+$$

$$+\frac{4}{l}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\beta_k e_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}+\frac{4}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\beta_k a_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}+$$

$$+h_p-d_p+(g_p+c_p)\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}\qquad(p=1,2,\dots)\tag{2.23}$$

Введем обозначения

$$\beta_p^2\left(D_p^{(2)}+C_p^{(2)}\operatorname{cth}\frac{\beta_p l}{2}\right)=\frac{l}{h\operatorname{sh}\beta_p l}\operatorname{cth}\frac{\beta_p l}{2}X_p^{(2)}$$

$$-\beta_p^2\left(D_p^{(2)}+C_p^{(2)}\operatorname{th}\frac{\beta_p l}{2}\right)=\frac{l}{h\operatorname{sh}\beta_p l}\operatorname{th}\frac{\beta_p l}{2}Y_p^{(2)}\tag{2.24}$$

$$-\alpha_p^2\left(D_p^{(1)}+C_p^{(1)}\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}\right)=\frac{X_p^{(1)}}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}$$

$$\alpha_p^2\left(D_p^{(1)}+C_p^{(1)}\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}\right)=\frac{Y_p^{(1)}}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}$$

Произведя замену неизвестных, получим следующие бесконечные системы линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
X_p^{(2)} &= \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} a_{pk}^{(1)} X_k^{(1)} + \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} b_{pk}^{(1)} Y_k^{(1)} + A_p^{(2)} \\
Y_p^{(2)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} c_{pk}^{(1)} X_k^{(1)} + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} d_{pk}^{(1)} Y_k^{(1)} + B_p^{(2)} \\
X_p^{(1)} &= \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} a_{pk}^{(2)} X_k^{(2)} + \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} b_{pk}^{(2)} Y_k^{(2)} + A_p^{(1)} \\
Y_p^{(1)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} c_{pk}^{(2)} X_k^{(2)} + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} d_{pk}^{(2)} Y_k^{(2)} + B_p^{(1)}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

где введены обозначения

$$
\begin{aligned}
a_{pk}^{(1)} &= \frac{4\beta_p^2}{l\varphi_p^{(2)}}[1+(-1)^p]\frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2} \\
b_{pk}^{(1)} &= \frac{4\beta_p^2}{l\varphi_p^{(2)}}[1+(-1)^{p+1}]\frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}
\end{aligned}
\qquad \begin{pmatrix} k=2,4,\ldots \\ p=1,2,\ldots \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{pk}^{(2)} &= \frac{4\alpha_p^2}{h\varphi_p^{(1)}}[1+(-1)^p]\frac{\beta_k}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2} \\
b_{pk}^{(2)} &= \frac{4\alpha_p^2}{h\varphi_p^{(1)}}[1+(-1)^{p+1}]\frac{\beta_k}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}
\end{aligned}
\qquad \begin{pmatrix} k=2,4,\ldots \\ p=1,2,\ldots \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{pk}^{(1)} &= \frac{4\beta_p^2}{l\psi_p^{(2)}}[1+(-1)^p]\frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2} \\
d_{pk}^{(1)} &= \frac{4\beta_p^2}{l\psi_p^{(2)}}[1+(-1)^{p+1}]\frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}
\end{aligned}
\qquad \begin{pmatrix} k=1,3,\ldots \\ p=1,2,\ldots \end{pmatrix}
\tag{2.27}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{pk}^{(2)} &= \frac{4\alpha_p^2}{h\psi_p^{(1)}}[1+(-1)^p]\frac{\beta_k}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2} \\
d_{pk}^{(2)} &= \frac{4\alpha_p^2}{h\psi_p^{(1)}}[1+(-1)^{p+1}]\frac{\beta_k}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}
\end{aligned}
\qquad \begin{pmatrix} k=1,3,\ldots \\ p=1,2,\ldots \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_p^{(2)} &= \left(1-\frac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}\right)\operatorname{cth}\frac{\beta_p l}{2}, \qquad & \psi_p^{(2)} &= \left(1+\frac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}\right)\operatorname{th}\frac{\beta_p l}{2} \\
\varphi_p^{(1)} &= \left(1-\frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\right)\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}, \qquad & \psi_p^{(1)} &= \left(1+\frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\right)\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

$$
\begin{aligned}
A_p^{(2)} &= -\frac{1}{l\varphi_p^{(2)}}\left\{4\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}[g_k+(-1)^{p+1}c_k]+\right. \\
&\quad \left.+h\left[b_p+f_p+(e_p-a_p)\operatorname{cth}\frac{\beta_p l}{2}\right]\right\} \\
A_p^{(1)} &= \frac{1}{l\varphi_p^{(1)}}\left\{4\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}[e_k+(-1)^{p+1}a_k]+\right. \\
&\quad \left.+l\left[d_p+h_p+(g_p-c_p)\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

$$B_p^{(2)} = -\frac{1}{l\psi_p^{(2)}}\left\{4\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}\left[g_k+(-1)^{p+1}c_k\right]+\right.$$
$$\left.+h\left[f_p-b_p+(e_p+a_p)\operatorname{th}\frac{\beta_p l}{2}\right]\right\} \qquad (2.30)$$
$$B_p^{(1)} = \frac{1}{l\psi_p^{(1)}}\left\{4\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}\left[e_k+(-1)^{p+1}a_k\right]+\right.$$
$$\left.+l\left[h_p-d_p+(g_p+c_p)\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}\right]\right\}$$

Легко заметить, что системы (2.26) разбиваются на четыре совокупности, причем в каждую совокупность войдут две системы:

$$\left.\begin{aligned} X_p^{(2)} &= \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} a_{pk}^{(1)}X_k^{(1)} + A_p^{(2)} \\ X_p^{(1)} &= \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} a_{pk}^{(2)}X_k^{(2)} + A_p^{(1)} \end{aligned}\right\} \quad (p=2,4,\ldots) \qquad (2.31)$$

$$\left.\begin{aligned} X_p^{(2)} &= \sum_{k=2,4\ldots}^{\infty} b_{pk}^{(1)}Y_k^{(1)} + A_p^{(2)} \qquad (p=1,3,\ldots) \\ Y_p^{(1)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} c_{pk}^{(2)}X_k^{(2)} + B_p^{(1)} \qquad (p=2,4,\ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (2.32)$$

$$\left.\begin{aligned} Y_p^{(2)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} c_{pk}^{(1)}X_k^{(1)} + B_p^{(2)} \qquad (p=2,4,\ldots) \\ X_p^{(1)} &= \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} b_{pk}^{(2)}Y_k^{(2)} + A_p^{(1)} \qquad (p=1,3,\ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (2.33)$$

$$\left.\begin{aligned} Y_p^{(2)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} d_{pk}^{(1)}Y_k^{(1)} + B_p^{(2)} \\ Y_p^{(1)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} d_{pk}^{(2)}Y_k^{(2)} + B_p^{(1)} \end{aligned}\right\} \quad (p=1,\ 3,\ldots) \qquad (2.34)$$

Каждую из совокупностей (2.31) — (2.34) можно написать в виде одной системы

$$F_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}F_n + M_m \qquad (m=1,2,\ldots) \qquad (2.35)$$

Например, чтобы системы (2.31) привести к виду (2.35), нужно ввести обозначения

$$\begin{aligned} F_{2i} &= X_{2i}^{(2)}, & M_{2i} &= A_{2i}^{(2)} \\ F_{2i-1} &= X_{2i}^{(1)}, & M_{2i-1} &= A_{2i}^{(1)} \end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots) \qquad (2.36)$$

$$\begin{aligned} A_{2i-1,\,2q} &= a_{2i,\,2q}^{(2)}, & A_{2i-1,\,2q-1} &= 0 \\ A_{2i,\,2q-1} &= a_{2i,\,2q}^{(1)}, & A_{2i,\,2q} &= 0 \end{aligned} \qquad (i,q=1,2,\ldots) \qquad (2.37)$$

Аналогичные обозначения введены также и для остальных систем. Пользуясь этими обозначениями для каждой совокупности в отдельности, покажем, что система (2.35) вполне регулярна.

Возьмем сначала совокупность (2.31). При четных m имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2i,n}| = \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} |a_{pk}^{(1)}| = \frac{8\beta_p^2}{l\varphi_p^{(2)}} \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2} =$$
$$= \frac{8l^2\beta_p^2}{\pi^3\varphi_p^{(2)}} \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{k}{[k^2+\varkappa_p^2]^2} \qquad \left(\varkappa_p = \frac{\beta_p l}{\pi}\right) \tag{2.38}$$

Для последнего ряда пользуемся оценкой

$$\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{k}{(k^2+\varkappa_p^2)^2} \leqslant S_2(\varkappa) = \begin{cases} \dfrac{2}{(4+\varkappa^2)^2} + \dfrac{32+\varkappa^2}{4(16+\varkappa^2)^2} & \text{при } \varkappa \leqslant 4 \\ \dfrac{8+\varkappa^2}{4(4+\varkappa^2)^2} + \dfrac{1}{8\varkappa^3} & \text{при } \varkappa > 4 \end{cases} \tag{2.39}$$

которая выводится по формулам трапеций и прямоугольников[1].

Подставляя эту оценку в (2.38), получим

$$\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} |a_{pk}^{(1)}| \leqslant \frac{8\varkappa^2}{\pi\varphi(\varkappa)} S_2(\varkappa) \quad \left(\varphi(\varkappa) = \left(1 - \frac{\varkappa\pi}{\operatorname{sh}\varkappa\pi}\right)\operatorname{cth}\frac{\varkappa\pi}{2}\right) \quad (0 \leqslant \varkappa < \infty) \tag{2.40}$$

Правая часть оценки (2.40) зависит от значения $\varkappa$.

Обозначив правую часть (2.40) через $f_1(\varkappa)$ и произведя исследование, увидим, что функция $f_1(\varkappa)$ получает свое максимальное значение при $\varkappa = \varkappa^* \approx 5.5\pi$.

Таким образом, получим, что $f_1(\varkappa) \leqslant f_1(\varkappa^*) \approx 0.692$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2i,n}| = \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} |a_{pk}^{(1)}| \leqslant 0.692 \tag{2.41}$$

Аналогичным образом при нечетных m имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2i-1,n}| = \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} |a_{pk}^{(2)}| = \frac{8\alpha_p^2}{h\varphi_p^{(1)}} \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2} \leqslant 0.692 \tag{2.42}$$

Из оценок (2.41) и (2.42) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}| \leqslant 0.692 \tag{2.43}$$

Совокупность (2.32) к системе (2.35) приводим обозначениями

$$F_{2i} = Y_{2i}^{(1)}, \qquad M_{2i} = B_{2i}^{(1)}$$
$$F_{2i-1} = X_{2i-1}^{(2)}, \qquad M_{2i-1} = A_{2i-1}^{(2)} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.44}$$

$$A_{2i,2q-1} = c_{2i,2q-1}^{(2)}, \qquad A_{2i,2q} = 0$$
$$A_{2i-1,2q} = b_{2i-1,2q}^{(1)}, \qquad A_{2i-1,2q-1} = 0 \qquad (i, q = 1, 2, \ldots) \tag{2.45}$$

---

[1] Аналогичная оценка получена П. С. Бондаренко (см. [9], стр. 81).

При $m = 2i$ будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2i,\,n}| = \sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} |c_{pk}^{(2)}| = \frac{8\alpha_p^2}{h\psi_p^{(1)}} \sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} =$$

$$= \frac{8\alpha_p^2 h^2}{\pi^3 \psi_p^{(1)}} \sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} \frac{k}{[k^2 + \xi_p^2]^2} \leqslant \frac{8\xi^2}{\pi\psi(\xi)} S_1(\xi) \qquad (0 \leqslant \xi < \infty) \tag{2.46}$$

где

$$\xi_p = \frac{\alpha_p h}{\pi} \tag{2.47}$$

$$\psi(\xi) = \left(1 + \frac{\xi\pi}{\operatorname{sh} \xi^\pi}\right) \operatorname{th} \frac{\xi\pi}{2} \tag{2.48}$$

При этом использована оценка

$$\sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + \xi_p^2)^2} \leqslant S_1(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+\xi^2)^2} + \dfrac{21+\xi^2}{4(9+\xi^2)^2} & \text{при } \xi \leqslant 3 \\ \dfrac{3+\xi^2}{4(1+\xi^2)^2} + \dfrac{1}{8\xi^3} & \text{при } \xi > 3 \end{cases} \tag{2.49}$$

Обозначив правую часть выражения (2.46) через $f_2(\xi)$ и произведя исследование, увидим, что функция $f_2(\xi)$ получает свое максимальное значение при $\xi = \xi^* \approx 6.13$.

Таким образом, получим, что $f_2(\xi) \leqslant f_2(\xi^*) \approx 0.770$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2i,\,n}| = \sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} |c_{pk}^{(2)}| \leqslant 0.770 \tag{2.50}$$

При $m = 2i - 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2i-1,\,n}| = \sum_{k=2,\,4,\,\ldots}^{\infty} |b_{pk}^{(1)}| = \frac{8\beta_p^2}{l\varphi_p^{(2)}} \sum_{k=2,\,4,\,\ldots}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \leqslant 0.692 \tag{2.51}$$

При этом использована оценка (2.39).

Из оценок (2.50) и (2.51) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,\,n}| \leqslant 0.770 \qquad (m = 1,\,2,\,\ldots) \tag{2.52}$$

Аналогичным образом получим, что

$$\sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} |c_{pk}^{(1)}| = \frac{8\beta_p^2}{l\psi_p^{(2)}} \sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \leqslant 0.770 \tag{2.53}$$

$$\sum_{k=2,\,4,\,\ldots}^{\infty} |b_{pk}^{(2)}| = \frac{8\alpha_p^2}{h\varphi_p^{(1)}} \sum_{k=2,\,4,\,\ldots}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} \leqslant 0.692 \tag{2.54}$$

$$\sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} |d_{pk}^{(1)}| = \frac{8\beta_p^2}{l\psi_p^{(2)}} \sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \leqslant 0.770 \tag{2.55}$$

$$\sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} |d_{pk}^{(2)}| = \frac{8\alpha_p^2}{h\psi_p^{(1)}} \sum_{k=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} \leqslant 0.770 \tag{2.56}$$

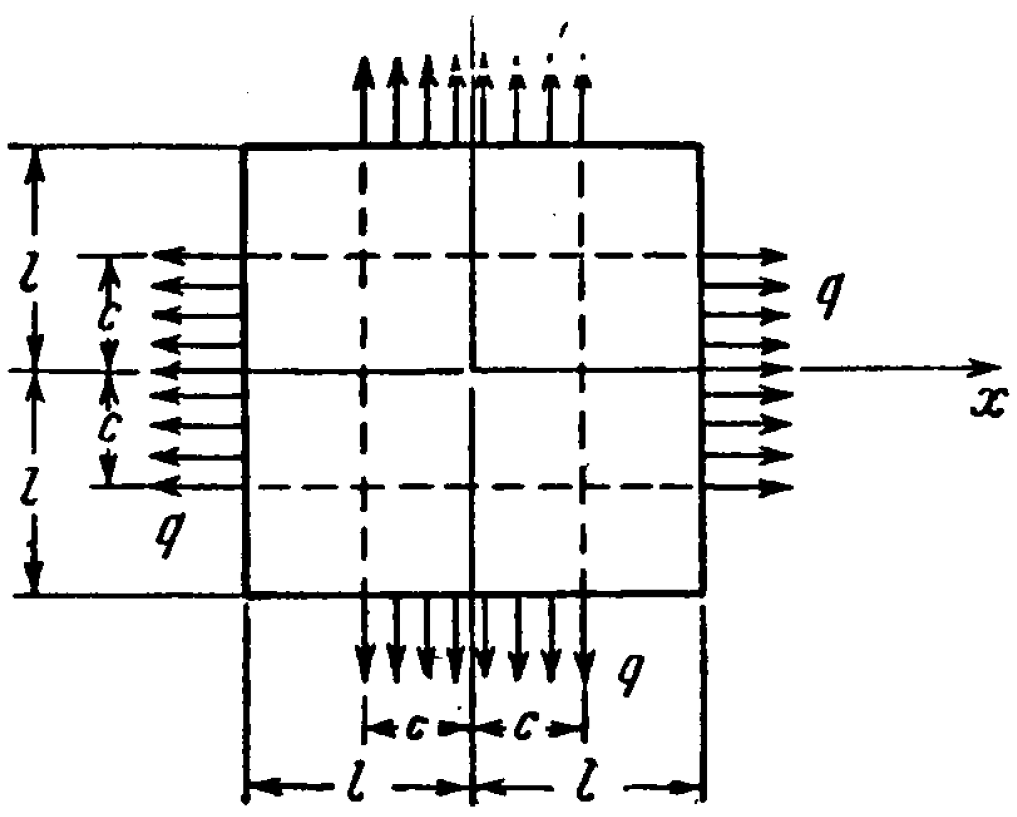
Таким образом, все совокупности (2.31) — (2.34) оказались вполне регулярными.

Свободные члены систем этих совокупностей ограничены сверху и для больших m имеют порядок не ниже, чем m^{-1}.

Пользуясь теорией регулярных систем линейных уравнений, коэффициенты интегрирования можно оценить с любой точностью, а при помощи этих оценок определяются верхняя и нижняя границы для напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy}.

§ 3. Частные случаи граничных условий. Если граничные условия задаются симметричным образом относительно одной из осей симметрии прямоугольника или относительно обеих осей симметрии — решение задачи упрощается.

В случае, когда граничные условия заданы симметричным образом относительно одной оси симметрии прямоугольника, бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$ ищем в виде суммы следующих рядов:



Фиг. 1

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos\alpha_k x \,\{A_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k y + B_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k y + \alpha_k y\,(C_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k y + D_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k y)\} + \sum_{k=1}^{\infty}\sin\beta_k y\,(A_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k x + D_k^{(2)}\beta_k x\operatorname{sh}\beta_k x)\left(\beta_k = \frac{k\pi}{h}\right) \tag{3.1}$$

$$\left(\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}\right)$$

Здесь $2l$ — длина прямоугольника, h — высота.

В этом случае решение сводится к рассмотрению двух совокупностей бесконечных систем линейных уравнений, где каждая совокупность содержит две бесконечные системы.

В случае, когда граничные условия заданы симметрично относительно обеих осей симметрии прямоугольника, бигармоническая функция представляется в виде

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) = &\sum_{k=1}^{\infty}\cos\alpha_k x\,\{A_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k y + D_k^{(1)}\alpha_k y\operatorname{sh}\alpha_k y\} + &&\left(\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}\right)\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\cos\beta_k y\,\{A_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k x + D_k^{(2)}\beta_k x\operatorname{sh}\beta_k x\} &&\left(\beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2h}\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $2l$ — длина прямоугольника, а $2h$ — высота.

Напряжения, заданные на кромках прямоугольника, представляем в виде рядов Фурье следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_x(l, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\beta_k y & & \sigma_y(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos\alpha_k x\\ & & (0<y<h), & & (0<x<l)\\ \tau_{xy}(l, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\beta_k y & & \tau_{xy}(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\sin\alpha_k x\end{aligned} \tag{3.3}$$

На осях симметрии прямоугольника должны быть выполнены условия

$$u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = v(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0) = 0 \tag{3.4}$$

В этом случае для определения коэффициентов интегрирования получаем одну совокупность из двух бесконечных систем линейных уравнений [1]. Неизвестные, входящие в эту совокупность, определяются из вполне регулярной бесконечной системы, сумма модулей коэффициентов которой оценивается соотношением (2.52).

В качестве примера рассмотрим задачу растягивания квадратной пластинки симметричной нагрузкой, расположенной по некоторому участку (фиг. 1).

Функция напряжений для этого случая принимает вид:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\{&A_k(\operatorname{ch}\alpha_k y\cos\alpha_k x + \operatorname{ch}\alpha_k x\cos\alpha_k y) + \qquad \left(\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}\right)\\ &+ D_k\alpha_k(y\operatorname{sh}\alpha_k y\cos\alpha_k x + x\operatorname{sh}\alpha_k x\cos\alpha_k y)\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

Вычисляя коэффициенты a_k и c_k, получим

$$a_k = c_k = \frac{2q}{\alpha_k l} \sin \alpha_k c \tag{3.6}$$

Удовлетворив граничным условиям, для определения неизвестных коэффициентов получим одну бесконечную систему

$$X_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} X_k + N_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

где введены следующие обозначения:

$$D_k = \frac{(-1)^{k+1} X_k}{\alpha_k^2 \operatorname{ch} \alpha_k l}, \qquad a_{pk} = \frac{-16(2p-1)^2(2k-1)}{\pi(\operatorname{th}\alpha_p l + \alpha_p l \operatorname{sch}^2 \alpha_p l)[(2k-1)^2 + (2p-1)^2]^2}$$

$$N_p = \frac{1}{\operatorname{th}\alpha_p l + \alpha_p l \operatorname{sch}^2 \alpha_p l}\left[(-1)^{p+1} \frac{2q}{\alpha_p l} \sin \alpha_p c \operatorname{th} \alpha_p l + \right.$$

$$\left. + \frac{16q}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k c}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2}\right] \qquad (k, p = 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

Коэффициент A_k определяется через X_k следующим соотношением:

$$A_k = -\frac{2q \sin \alpha_k c}{\alpha_k^3 l \operatorname{ch} \alpha_k l} - \frac{(-1)^{k+1} l X_k}{\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k l} \tag{3.9}$$

Подставляя найденные значения, для определения нормальных напряжений получим следующие формулы:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{2q}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} \frac{\sin \alpha_k c}{\operatorname{ch} \alpha_k l} \operatorname{ch} \alpha_k x \cos \alpha_k y - \frac{2q}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} \frac{\sin \alpha_k c}{\operatorname{ch} \alpha_k l} \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \alpha_k x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} X_k \left\{ \left[2 \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} \alpha_k l} + \alpha_k y \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\operatorname{ch} \alpha_k l} - \alpha_k l \operatorname{th} \alpha_k l \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} \alpha_k l} \right] \cos \alpha_k x - \right.$$

$$\left. - \left[\alpha_k x \frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\operatorname{ch} \alpha_k l} - \alpha_k l \operatorname{th} \alpha_k l \frac{\operatorname{ch} \alpha_k x}{\operatorname{ch} \alpha_k l} \right] \cos \alpha_k y \right\} \tag{3.10}$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{2q}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} \frac{\sin \alpha_k c}{\operatorname{ch} \alpha_k l} \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \alpha_k x - \frac{2q}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} \frac{\sin \alpha_k c}{\operatorname{ch} \alpha_k l} \operatorname{ch} \alpha_k x \cos \alpha_k y +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} X_k \left\{ \left[2 \frac{\operatorname{ch} \alpha_k x}{\operatorname{ch} \alpha_k l} + \alpha_k x \frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\operatorname{ch} \alpha_k l} - \alpha_k l \operatorname{th} \alpha_k l \frac{\operatorname{ch} \alpha_k x}{\operatorname{ch} \alpha_k l} \right] \cos \alpha_k y - \right.$$

$$\left. - \left[\alpha_k y \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\operatorname{ch} \alpha_k l} - \alpha_k l \operatorname{th} \alpha_k l \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} \alpha_k l} \right] \cos \alpha_k x \right\} \tag{3.11}$$

Пользуясь теорией вполне регулярных систем линейных уравнений [9], получим следующие оценки для неизвестных X_k:

при $c = l$	при $c = {}^3/_4\, l$	при $c = {}^1/_2\, l$
$0.6401 \leqslant X_1 \leqslant 0.66620$,	$0.62444 \leqslant X_1 \leqslant 0.68736$,	$0.66155 \leqslant X_1 \leqslant 0.78267$
$0.2192 \leqslant X_2 \leqslant 0.25434$,	$-0.02123 \leqslant X_2 \leqslant 0.06361$,	$-0.41727 \leqslant X_2 \leqslant 0.25395$
$0.1408 \leqslant X_3 \leqslant 0.21996$		
$0.1066 \leqslant X_4 \leqslant 0.20180$		

В центре пластинки сумма нормальных напряжений σ определится формулой

$$\sigma(0,0) = \sigma_x(0,0) + \sigma_y(0,0) = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} X_k}{\operatorname{ch} {}^1/_2 (2k-1)\pi} \tag{3.12}$$

Подставляя сюда найденные значения неизвестных коэффициентов X_k с избытком и с недостатком, получим для суммы нормальных напряжений следующие верхнюю и нижнюю границы:

$$2.15\, P/2l \leqslant \sigma(0,0) \leqslant 2.56\, P/2l \quad \text{при} \quad c = \frac{1}{2}\, l \tag{3.13}$$

$$2.00\, P/2l \leqslant \sigma(0,0) \leqslant 2.20\, P/2l \quad \text{при} \quad c = \frac{3}{4}\, l$$

$$2.00\, P/2l \leqslant \sigma(0,0) \leqslant 2.09\, P/2l \quad \text{при} \quad c = l \quad (P = 2qc)$$

Для более точного определения напряжений нужно при решении бесконечной системы линейных уравнений взять укороченную систему с большим числом уравнений и оценить первые значения неизвестных точнее.

Для этой задачи, пользуясь другим, приближенным, методом, Г. А. Гринберг, Н. Н Лебедев, и Я. С. Уфлянд[10] получили для суммы нормальных напряжений в центре пластинки следующие значения:

$$\sigma(0,0) \approx 2.60\, \frac{P}{2l} \quad \text{при} \quad c = 0$$

$$\sigma(0,0) \approx 2.34\, \frac{P}{2l} \quad \text{при} \quad c = \frac{l}{2}$$

$$\sigma(0,0) \approx 1.998\, \frac{P}{2l} \quad \text{при} \quad c = l$$

Точное решение для последнего случая дает 2.0 $P/2l$.

Вычисления по этой задаче произведены О. О. Пирумяном, за что считаю своим долгом выразить ему благодарность.

Поступила 16 III 1956.

Институт математики и механики
АН АрмССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л. Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника, ДАН Арм ССР, т. XXI, № 5, стр. 193—198, 1955.
2. Файлон Л. (Filon L. N. G.). On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-Section under any System of Load, with Special Reference to Points of Concentrated or Discontinuous Loading. Philosophical Tran sactions of the Royal Society of London, ser. A, vol. 201, pp. 63—155,1903.
3. Рибьер М. (Ribiére M.). Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles. Bordeaux, 1889; Sur la flexion des pièces épaisses. Comptes Rendus, 126, 402—404, 1898; Sur la rèsistance des massifs èpais. Comptes Rendus, 126, 1190—1192, 1898.
4. Блейх Ф. (Bleich F.). Der Gerade Stab mit rechte guerschnitt als ebenes Problem. Bauingeneur, Heft 9 und 10, 1923.
5. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. ДАН СССР, т. XXVII, № 4, стр. 335—339, 1940.
6. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, т. VI, вып. 2—3, стр. 151—168, 1942.
7. Прокопов В. К. Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области. ПММ, т. XVI, вып. 1, стр. 45—56, 1952.
8. Филоненко-Бородич М. М. Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости. ПММ, т. X, вып. 1, стр. 193—208, 1946.
9. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
10. Гринберг Г. А., Лебедев Н. Н. и Уфлянд Я. С. Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функции и ее нормальной производной. ПММ, т. XVII, вып. 1, стр. 73—86, 1953.