Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Н. А. Алумяэ

(Таллин)

Рассматривается определение критической нагрузки тонкой упругой конической оболочки вращения, находящейся под действием всестороннего внешнего давления. Задача сводится к определению наименьшего собственного значения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2) при краевых условиях (1.4) или (1.3). Формулируется также упрощенная задача, заключающаяся в определении наименьшего собственного значения системы (2.1) при краевых условиях (2.2) или (2.3). Для решения этих задач применяется метод асимптотического интегрирования, причем в качестве «эталонного» уравнения используется уравнение (4.1), которое в случае упрощенной задачи (2.1) и (2.2) интегрируется в цилиндрических функциях. Решение упрощенной задачи позволяет проанализировать решение основной задачи и выяснить погрешность решения, возникающую при упрощении системы (1.2). В качестве примера рассматривается замкнутая в вершине оболочка.

1. Основные соотношения. Рассмотрим упругую коническую оболочку вращения с постоянной толщиной t, углом конусности β и радиусом кривизны срединной поверхности у некоторой произвольно выбранной «основной» параллели $l_0 \operatorname{tg} \beta$. Отнесем срединную поверхность к гауссовым координатам x, θ, где x — безразмерная координата, принимающая значение 0 в вершине конуса и значение 1 на «основной» параллели, а θ — угол долготы образующей.

Предположим, что оболочка замкнута плоскими днищами и находится под действием всестороннего равномерно распределенного внешнего давления q. Найдем критическое значение внешнего давления $q = q_{\text{кр}}$, при котором, кроме осесимметричного начального напряженного состояния, существует еще по крайней мере одно неосесимметричное состояние равновесия, бесконечно близкое к начальному состоянию.

Предположим, что круговая частота изменения напряженного состояния после потери устойчивости начального состояния при обходе оболочки по параллели будет k. Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon^2 = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\frac{t}{l_0}, \qquad p = \frac{\varepsilon k^2}{\sin^2\beta}, \qquad \sigma = \frac{q_{\text{кр}} l_0}{\varepsilon^3 E t}\operatorname{tg}^3\beta \tag{1.1}$$

где E — модель упругости, ν — коэффициент поперечного расширения. В дальнейшем предполагается, что ε — малая величина.

Определение критического давления по теории Х. М. Муштари [1] и В. З. Власова [2] сводится к определению наименьшего собственного значения σ системы дифференциальных уравнений

$$A\varphi + \psi'' = 0, \qquad -\varphi'' + A\psi - \sigma B\psi = 0 \tag{1.2}$$

где A и B — дифференциальные выражения

$$Ay = \varepsilon^2 (xy'')'' - 2p\varepsilon \left(\frac{1}{x} y'\right)' + \frac{p^2}{x^3} y \qquad (y = \varphi,\ \psi)$$

$$B\psi = p\psi - \frac{\varepsilon}{2} (x^2 \psi')' \tag{1.3}$$

причем штрихи обозначают дифференцирование по аргументу x; функция $\psi = \psi(x)$ — прогиб точки срединной поверхности, а $\varphi = \varphi(x)$ — функция тангенциальных усилий. Краевые условия к системе (1.2) зависят от упругих свойств замыкающих оболочку торцевых диафрагм; в случае жесткой диафрагмы имеем в рамках точности уравнений (1.2)

$$p\psi - \varepsilon x \psi' = 0, \qquad \varepsilon [\varepsilon x^2 \varphi'' - \nu \varepsilon x \varphi' + \nu p \varphi] = 0$$

$$x\psi' - \psi = 0, \qquad \varepsilon [\varepsilon x^3 \varphi''' - (2 + \nu) p x \varphi' + 3 p \varphi] = 0 \tag{1.4}$$

Если же диафрагма жесткая в своей плоскости, но гибкая при изгибе из своей плоскости, то решение системы (1.2) должно удовлетворять на этом краю условиям

$$p\psi - \varepsilon x \psi' = 0, \qquad \varepsilon \psi'' = 0, \qquad p\varphi - \varepsilon x \varphi' = 0, \qquad \varepsilon \varphi'' = 0 \tag{1.5}$$

Эти соотношения применимы, когда напряженное состояние достаточно быстро изменяется в направлении параллельного круга срединной поверхности. Можно показать, что это требование сводится к условию $p / \varepsilon \gg \operatorname{ctg}^2 \beta$.

2. Упрощенная задача. Полагая в выражениях (1.3), а также в краевых условиях (1.4), (1.5) параметр $\varepsilon = 0$, приходим к следующей, более простой задаче: определить наименьшее собственное значение σ системы

$$\frac{p^2}{x^3} \varphi + \psi'' = 0, \qquad -\varphi'' + \left(\frac{p^2}{x^3} - \sigma p\right) \psi = 0 \tag{2.1}$$

при краевых условиях (при жесткой диафрагме)

$$\psi = 0, \qquad \psi' = 0 \tag{2.2}$$

или (при гибкой диафрагме)

$$\psi = 0, \qquad \varphi = 0 \tag{2.3}$$

Если во втором уравнении системы (2.1) коэффициент $p^2 / x^3 - \sigma p$ перед ψ не изменяет знака в интервале изменения x (для этого, очевидно, оболочка не должна содержать точек, близких к вершине конуса), то решение системы (2.1) можно искать в форме

$$\psi(x) = \psi_0(x) e^{pr(x)}, \qquad \varphi(x) = \varphi_0(x) e^{pr(x)} \tag{2.4}$$

использованной А. Л. Гольденвейзером для определения простого и невыродившегося краевых эффектов [4] некруговой конической оболочки.

Рассмотрим обратный случай[1]: будем искать решение в виде

$$\psi(x) = \psi_0(x) u[pr(x)]; \qquad \varphi(x) = \varphi_0(x) u[pr(x)] \tag{2.5}$$

где функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{2t} \frac{du}{dt} + t^{1/2} u = 0 \tag{2.6}$$

а p рассматривается как большой параметр, по которому проводится асимптотическое разложение решения.

[1] Эти вопросы применительно к уравнениям второго порядка рассмотрены в обзорной статье А. А. Дородницына [3].

Обозначая производную по t функции $u(t)$ через $u^{\cdot}$, имеем

$$\psi' = u^{\cdot} p r' \psi_0 + u\psi_0'$$

$$\begin{aligned}\psi'' &= u^{\cdot\cdot} p^2 r'^2 \psi_0 + u^{\cdot}(2pr'\psi_0' + pr''\psi_0) + 0(p^\circ) = \\ &= -p^{5/3} r^{1/3} r'^2 u \psi_0 + pu^{\cdot}\left(2r'\psi_0' + r''\psi_0 - \frac{1}{2r} r'^2 \psi_0\right) + 0(p^\circ)\end{aligned} \qquad (2.7)$$

аналогичные выражения получим для производных функции φ.

Удерживая в уравнениях (2.1) только главные члены асимптотических разложений, приходим к следующему «головному» уравнению:

$$f^4 - \frac{\eta^3 x^3 - 1}{x^6} = 0 \qquad \left(\eta^3 = \frac{\sigma}{p},\ f = f(x) = [pr(x)]^{1/4} r'(x)\right) \qquad (2.8)$$

Решение уравнения (2.8) представим в виде

$$\frac{4}{5}[pr(x)]^{5/4} = p\int_{1/\eta}^{x} f(x)\,dx \qquad (2.9)$$

Отметим теперь, что уравнение (2.6) интегрируется в цилиндрических функциях. А именно, его решениями будут

$$u(t) = t^{1/4} Z_{1/5}\left(\frac{4}{5} t^{5/4}\right) \qquad (2.10)$$

где $Z_\nu(z)$ — две произвольные цилиндрические функции порядка ν комплексного аргумента z. Учитывая это, получим для четырех функций

$$u[pr(x)] = \left(\int_{1/\eta}^{x} f(x)dx\right)^{1/5} Z_{1/5}\left(p\int_{1/\eta}^{x} f(x)\,dx\right) \qquad (2.11)$$

Для определения функций ψ_0, φ_0 следуем общему приему А. Л. Гольденвейзера [4], заключающемуся в учете вторых членов в асимптотических разложениях (2.7). После некоторых выкладок найдем

$$\psi_0(x) = C(xr')^{-3/2} \qquad (2.12)$$

так что каждому корню $r(x)$ уравнения (2.8) соответствует своя функция $\psi_0(x)$. Весьма важно отметить, что при $x = 1/\eta$ функции $\psi_0(x)$ остаются конечными. Это достигнуто подбором подходящего показателя в коэффициенте перед u в уравнении (2.6)[1].

3. Замкнутая в вершине оболочка. Применим изложенный в предыдущем разделе метод для интегрирования системы (2.1), решение которой должно оставаться при $x \to 0$ конечным, а при $x = 1$ удовлетворять условиям (2.2). Напомним, что точка $x = 0$ соответствует вершине конуса, а точка $x = 1$ — параллельному кругу у основания.

Введем вещественную функцию $s(x)$, определяя ее так:

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_{1/\eta}^{x}\left(\frac{\eta^3\tau^3 - 1}{\tau^6}\right)^{1/4} d\tau \geqslant 0 \qquad \text{при } x \geqslant \frac{1}{\eta} \\ s(x) &= \int_{1/\eta}^{x}\left(\frac{1 - \eta^3\tau^3}{\tau^6}\right)^{1/4} d\tau < 0 \qquad \text{при } x < \frac{1}{\eta} \end{aligned} \qquad (3.1)$$

---

[1] Для асимптотического интегрирования уравнений (2.1) можно вместо (2.6) исходить из уравнения $u^{\cdot\cdot} + t^3 u = 0$, приводящего также к конечным значениям ψ_0 при $x = 1/\eta$. Однако сравнение асимптотических свойств интегралов уравнений (1.2) и (2.1) легче удается при помощи (2.6).

причем очевидно, что при $x \to 0$ функция $s(x) \to -\infty$.

Конечные при $x \to 0$ интегралы системы (2.1) можем на основании соотношений (2.8) — (2.12), (3.1) представить при $x < 1/\eta$ в виде

$$\psi(x) = \frac{[s(x)]^{1/2}}{[xs'(x)]^{3/2}} \{C_1 H_{1/5}^{(1)} [pe^{-1/4\pi i} s(x)] + C_2 H_{1/5}^{(2)} [pe^{1/4\pi i} s(x)]\} \tag{3.2}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Остальные два интеграла системы (2.1) по известным асимптотическим свойствам цилиндрических функций являются неограниченными при $x \to 0$ и их следует отбросить.

Введем в рассмотрение функции

$$\mathrm{ber}_\nu x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1/2 x)^{\nu+4k}}{(2k)!\,\Gamma(2k+\nu+1)}, \qquad \mathrm{bei}_\nu x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1/2 x)^{\nu+2+4k}}{(2k+1)!\,\Gamma(2k+\nu+2)} \tag{3.3}$$

Представляя функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ через обобщенные степенные ряды и положив

$$s(x) = -v(x) \qquad \text{при } x < \frac{1}{\eta} \tag{3.4}$$

из выражений (3.2), (3.3) получим вещественную функцию, определенную до двух вещественных произвольных постоянных D_1, D_2:

$$\begin{aligned}\psi(x) = \frac{[v(x)]^{1/2}}{[xs'(x)]^{3/2}} \Big[D_1 \Big(&\cos\frac{3\pi}{20} \mathrm{ber}_{-\nu} pv + \sin\frac{3\pi}{20} \mathrm{bei}_{-\nu} pv - \\ - \cos\frac{\pi}{20} \mathrm{ber}_\nu\, pv - \sin\frac{\pi}{20} \mathrm{bei}_\nu\, pv \Big) &+ D_2 \Big(\cos\frac{3\pi}{20} \mathrm{bei}_{-\nu} pv - \\ - \sin\frac{3\pi}{20} \mathrm{ber}_{-\nu}\, pv - \cos\frac{\pi}{20} &\mathrm{bei}_\nu\, pv + \sin\frac{\pi}{20} \mathrm{ber}_\nu pv \Big) \Big]\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\nu = 1/5$, $v = v(x) \geqslant 0$ при $x \leqslant 1/\eta$.

При значениях $x \geqslant 1/\eta$ решение системы (2.1) в общем виде будет

$$\psi(x) = \frac{[s(x)]^{1/2}}{[xs'(x)]^{3/2}} \Big[E_1 J_{-\nu}(ps) + E_2 I_{-\nu}(ps) + E_3 J_\nu(ps) + E_4 I_\nu(ps) \Big] \tag{3.6}$$

где $\nu = 1/5$, $s = s(x)$, $E_1, \ldots, E_4$ — произвольные постоянные. Однако выражение (3.5) предопределяет следующий вид решения ($\nu = 1/5$):

$$\begin{aligned}\psi(x) = \frac{[s(x)]^{1/2}}{[xs'(x)]^{3/2}} \Big[D_1 \Big(&\cos\frac{3\pi}{20} \mathrm{Ber}_{-\nu}\, ps + \sin\frac{3\pi}{20} \mathrm{Bei}_{-\nu}\, ps - \\ - \cos\frac{\pi}{20} \mathrm{Ber}_\nu\, ps - \sin\frac{\pi}{20} \mathrm{Bei}_\nu\, ps \Big) &+ D_2 \Big(\cos\frac{3\pi}{20} \mathrm{Bei}_{-\nu}\, ps - \\ - \sin\frac{3\pi}{20} \mathrm{Ber}_{-\nu}\, ps - \cos\frac{\pi}{20} &\mathrm{Bei}_\nu\, ps + \sin\frac{\pi}{20} \mathrm{Ber}_\nu\, ps \Big) \Big]\end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь

$$2\,\mathrm{Ber}_\nu x = J_\nu(x) + I_\nu(x), \qquad 2\,\mathrm{Bei}_\nu(x) = -J_\nu(x) + I_\nu(x) \tag{3.8}$$

Краевые условия (2.2) определяют как отношение D_1/D_2, так и пока неизвестную величину η (параметр p должен рассматриваться как заданный). Составление характеристического уравнения и даже его решение трудностей не представляют, потому что при больших вещественных значениях z будет $I_{-\nu}(z) = I_\nu(z)$. Учитывая это, характеристическое уравнение получается в первом приближении (с погрешностью порядка $\exp[-ps(1)]$ по сравнению с единицей) в виде

$$J_{-1/5}[ps(1)] + J_{4/5}[ps(1)] + J_{1/5}[ps(1)] - J_{-4/5}[ps(1)] = 0 \tag{3.9}$$

Наименьший корень уравнения (3.9) мало отличается от π:

$$ps(1) = p \int_{-1/\eta}^{1} \left(\frac{\eta^3 x^3 - 1}{x^6}\right)^{1/4} dx = \pi \tag{3.10}$$

Искомое наименьшее собственное значение σ системы (2.1) при краевых условиях (2.2) будет

$$\sigma = p\eta^3 = \pi\eta^3 \left(\int_{1/\eta}^{1} \left(\frac{\eta^3 x^3 - 1}{x^6}\right)^{1/4} dx \right)^{-1} = \pi\eta^{1/2} \left(\int_{1}^{\eta} \left(\frac{\tau^3 - 1}{\tau^6}\right)^{1/4} d\tau \right)^{-1} \tag{3.11}$$

Каждому значению η соответствует по уравнению (3.10) определенное значение p и обратно. Так как в уравнениях (2.1) p является параметром, который надо назначить так, чтобы первое собственное число было наименьшим, то отсюда вытекает, что σ определяется из условия минимума правой части выражения (3.11) относительно η. Численное решение этой задачи дает $\eta = 1.637$, $\sigma = 25.4$, $p = 5.66$. Отметим, что система (2.1) при краевых условиях (2.2) для замкнутой оболочки была интегрирована Р. К. Ряяметом энергетическим методом, который получил [6] $\sigma = 27.5$, $p = 6.4$.

4. Асимптотическое интегрирование системы (1.2). Ищем решение в виде (2.5), но предположим, что $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$u^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2(t - \varepsilon^2\alpha)} u^{\cdot} + t^{1/2} u = 0 \tag{4.1}$$

где α — пока неопределенная постоянная. Метод, использованный во втором разделе для интегрирования системы (2.1), применительно к уравнениям (1.2) приводит к следующему головному уравнению:

$$\varepsilon^4 p^4 x^2 f^8 + \left(4 - \tfrac{1}{2}\eta^3 x^3\right) \varepsilon^3 p^3 f^6 + \left[1 + \frac{\varepsilon^2 p^2}{x^2}(6 - 2\eta^3 x^3)\right] f^4 + \\ + \left(4 - \tfrac{5}{2}\eta^3 x^3\right) \frac{\varepsilon p}{x^4} f^2 - \frac{\eta^3 x^3 - 1}{x^6} = 0 \tag{4.2}$$

где

$$f = f(x) = [pr(x)]^{1/4} r'(x) \tag{4.3}$$

Отсюда определим $r(x)$:

$$\frac{4}{5} [pr(x)]^{5/4} = p \int_{1/\eta}^{x} f(\tau)\, d\tau \tag{4.4}$$

Для функции $\psi_0(x)$ получим выражение

$$\psi_0 = (r')^{-1/2} (pr - \varepsilon^2\alpha)^{1/4} \left\{ \frac{x^3 f^2}{(1 + \varepsilon p x^2 f^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{p\varepsilon}{x}(1 + \varepsilon p x^2 f^2)\left[1 - \frac{x^6 f^6}{(1 + \varepsilon p x^2 f^2)^2}\right] - \frac{1}{4}\varepsilon p \eta^3 x^2 \right\}^{-1/2} \tag{4.5}$$

Следует заметить, что при одном из малых корней f^2 уравнения (4.2) выражение в фигурных скобках формулы (4.5) обращается в точке

$$x \approx \frac{1}{\eta} - \frac{3}{16}\varepsilon^2 p^2 \eta \tag{4.6}$$

в нуль. Для того чтобы функция ψ_0 в этой точке была ограничена, выбрано такое значение для коэффициента α и показатель (точнее, числовой коэффициент перед членом $u^{\cdot}$ в уравнении (4.1)) члена $pr - \varepsilon^2\alpha$ в формуле (4.5), что $pr - \varepsilon^2\alpha$ в точке (4.6) также обращается в нуль, а функция

ψ_0 при этом остается конечной. Вычисление показывает, что

$$\alpha \approx \left(\tfrac{3}{256} p^2\eta\right)^{2/5} p^2\eta^2 \tag{4.7}$$

Как нетрудно проверить, функция ψ_0 остается конечной также в точке $x = 1/\eta$, где $r(x) = 0$, но $r'(x) \neq 0$.

При помощи полученных соотношений можно исследовать пригодность упрощенных уравнений (2.1) для определения критического давления замкнутой в вершине оболочки. Для этого нужно рассмотреть интегралы системы (1.2), которые соответствуют «малым» корням (4.2), существенно отличающимся от «больших» корней при малых значениях εp и немалых значениях x.

Полагая $\varepsilon = 0$, получим, как это и следует ожидать, соотношения, приведенные во втором разделе работы. Однако если при тонкостенных оболочках ε является малой, но конечной величиной, то при замкнутой в вершине оболочке у вершины будет $x = 0$ и отношение ε / x не остается конечным, как бы мало ни было значение ε. Поэтому из рассмотрения соотношений (4.2), (4.5) вытекает, что интегралы системы (2.1) представляют достаточно точно интегралы системы (1.2) лишь в области, где $\varepsilon p / x \ll 1$. Вместе с тем наименьшее собственное число σ системы (1.2) можно определить из системы (2.1) с асимптотической погрешностью порядка ε. Это следует из обстоятельства, что так называемые малые корни уравнения (4.2), хотя и отличаются значительно из корней уравнения (2.8) при малых значениях x, тем не менее стремятся при $x \to 0$ к бесконечно удаленным точкам в этих же квадрантах комплексной плоскости. Поэтому ограниченные при $x \to 0$ интегралы уравнения представляются этими же функциями Ханкеля, как и в выражении (3.2). При достаточно больших значениях x, когда $\varepsilon p / x \ll 1$, существенное различие в аргументах исчезает и дальнейший характер решения системы (1.2) не будет при малых значениях ε существенно отличаться от такового системы (2.1). В итоге приходим опять-таки к характеристическому уравнению (3.9).

Таким образом, форма выпученной, замкнутой в вершине оболочки определяется упрощенными уравнениями (2.1) около вершины неточно, критическое же давление — с асимптотической погрешностью порядка ε по сравнению с единицей.

Поступила 9 X 1956

Институт строительства и строительных материалов
Академии наук Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применениями к решению задач устойчивости упругого равновесия. ПММ, т. II, вып. 4, 1939.
2. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ, т. VIII, вып. 2, 1944.
3. Алумяэ Н. А. Об определении состояний равновесия круговой оболочки при осесимметричной нагрузке. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
5. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дефференциальных уравненений второго порядка. Успехи матем. наук, т. VII, вып. 6(52), 1952.
6. Ряймет Р. К. Критическая нагрузка конической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления. Труды Таллинского полит. ин-та, 66, 1955.