Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ЗАДАЧЕ О ШТАМПЕ, КРУГЛОМ В ПЛАНЕ

Н. А. Ростовцев

(Комсомольск-на-Амуре)

Рассматривается задача эффективного вычисления смещений и напряжений в упругом изотропном полупространстве $z \gg 0$, на плоскую границу которого $z = 0$ давит жесткий штамп, круглый в плане. Трение и сцепление в области контакта $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ отсутствуют. Поверхность штампа гладкая, и ее уравнение имеет вид:

$$z = P(x, y)$$

где $P(x,y)$ — полином от x, y.

Известно [1], что в этом случае давление $p(x, y)$ выражается частным от деления полинома той же степени на $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Известны также общие формулы [1, 2], представляющие истокообразно функции напряжений (смещений) в общем случае произвольного задания смещений u_z в области $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Однако вычисление соответствующих интегралов представляет трудности даже в простейшем случае осесимметрической задачи. В связи с этим различными авторами разрабатывались специальные приемы для вычисления давления под штампом в осесимметрическом [3] и общем [4] случаях, а также для вычисления функций напряжений (смещений) в осесимметрическом случае [5].

За малыми исключениями основные результаты относятся к определению давлений из интегрального уравнения, доставляемого условием на границе. В настоящей работе показывается, что при указанном выше условии относительно уравнения поверхности штампа, напряжения и смещения выражаются элементарными функциями координат и дается способ их вычисления в полярных координатах (r, z, φ).

1. Пусть внутри круга $z = 0$, $z \leqslant a$, задано смещение $u_z|_{z=0} = w$ формулой

$$w = c_0 + \sum_{p+q=n} c_{pq} x^p y^q$$

$$w = \sum c_{pq} x^p y^q = f_0(r) + \sum_{m=1}^{n} f_m^{(c)}(r) \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{n} f_m^{(s)}(r) \sin m\varphi \qquad (1.1)$$

где $f_m^{(c)}(r)$, $f_m^{(s)}(r)$ — полиномы степени не ниже m. В полярных координатах формулы смещения имеют вид:

$$u_r = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_z^\infty \frac{\partial \Psi}{\partial r} dz - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$u_\varphi = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_z^\infty \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} dz - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{z}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$$

$$u_z = \Psi - \frac{1}{2(1-\nu)} z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \qquad (1.2)$$

Здесь $\Psi = \Psi(r, z, \varphi)$ — гармоническая функция, значения которой при $z = 0$ и $r \leqslant a$ известны: $\Psi(r, 0, \varphi) = w(r, \varphi)$, а при $z = 0$, $r \geqslant a$ имеем $\Psi_z' = 0$, так как

$$\frac{2(1-\nu^2)}{E}\sigma_z = \frac{\partial\Psi}{\partial z} - z\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \tag{1.3}$$

В соответствии с формулой (1.1) полагаем

$$\Psi(r, z, \varphi) = \Psi_0(r, z) + \sum_{m=1}^{n} \Psi_m^{(c)}(r, z)\cos m\varphi + \sum \Psi_m^{(s)}(r, z)\sin m\varphi \tag{1.4}$$

Все слагаемые этой суммы — гармонические функции, у которых множители вида $\Psi_m(r, z)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\Psi_m(r, 0) = f_m(r) \quad (r \leqslant a), \qquad \Psi_{mz}'(r, 0) = 0 \quad (r > a) \tag{1.5}$$

Из гармоничности слагаемых следует, что $\Psi_m(r, z)$ является решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2\Psi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{m^2}{r^2}\Psi_m \tag{1.6}$$

Задача о нахождении функции $\Psi_0(r, z)$ рассмотрена в работе [5]. Остается рассмотреть задачу для $m \geqslant 1$.

2. Одним из элементарных решений уравнения (1.6) при $m \geqslant 1$ является функция $r^{-m}(r^2 + z^2)^{m-1/2}$ — секториальная сферическая функция. Впрочем, это решение можно найти и независимо от теории сферических функций, разыскивая решение уравнения (1.6), имеющее вид: $r^\alpha (r^2+z^2)^{1/2\beta}$.

Воспользуемся этим элементарным решением для того, чтобы построить другое, не аналитическое на границе решение вида

$$\Psi_m(r, z) = \operatorname{Re} r^{-m}\int_0^a [r^2 + (z + is)^2]^{m-1/2} g_m(s)\, ds \qquad (z \geqslant 0) \tag{2.1}$$

Таким образом, гармоническая функция вида $\Psi_m(r, z)^{\cos}_{\sin} m\varphi$ является реальной частью некоторой комплексной гармонической функции — комплексного потенциала задачи.

Для производной по z получаем

$$\Omega_m(r, z) = \frac{\partial\Psi_m}{\partial z} = \operatorname{Re}(2m-1)\, r^{-m}\int_0^a [r^2 + (r + is)^2]^{m-3/2}(z + is)\, g_m(s)\, ds \tag{2.2}$$

Аргумент комплексного числа $[r^2 + (z + is)^2]^{1/2}$ берется в пределах от 0 до $1/2\,\pi$, достигая этих предельных значений при $z = 0$.

Вспомогательную функцию $g_m(s)$ подчиняем условиям

$$\int_0^a s^{2k} g_m(s)\, ds = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.3}$$

и полагаем интегрируемой по Стильтьесу. Эти условия обеспечивают надлежащий порядок убывания на бесконечности.

При $z = 0$ получаем

$$\Psi_m(r, 0) = r^{-m}\int_0^{\min(r, a)} (r^2 - s^2)^{m-1/2} g_m(s)\, ds \tag{2.4}$$

$$\Omega_m(r, 0) = (-1)^{m-1}(2m-1)\, r^{-m}\int_{\min(r, a)}^{a} s\,(s^2 - r^2)^{m-1/2} g_m(s)\, ds \tag{2.5}$$

Применяя правило Лопиталя, можно убедиться, что особенность при $r=0$ кажущаяся и $\Omega(0, 0)=0$. Таким образом, функция $\Psi_m(r, z)$ удовлетворяет второму из граничных условий (1.5). Выполнение первого из этих условий приводит к интегральному уравнению типа Абеля:

$$\int_0^r (r^2-s^2)^{m-1/2} g_m(s)\,ds = r^m f_m(r) \tag{2.6}$$

Повторным дифференцированием это уравнение можно привести к уравнению с ядром $(r^2-s^2)^{1/2}$, решение которого общеизвестно. Но в данном случае, когда $f_m(r)$ — полином вида

$$f_m(r) = a_0 r^m + a_1 r^{m+1} + \cdots + a_\mu r^{m+\mu} \tag{2.7}$$

регулярное решение $g_m^*(s)$ этого уравнения также представляет полином

$$g_m^*(s) = b_0 + b_1 r + \cdots + b_\mu r^\mu \tag{2.8}$$

коэффициенты которого b_k выражаются весьма просто через a_k:

$$b_k = \frac{(2m+k)\,\Gamma(m+{}^1/_2\,k)}{\Gamma(m+{}^1/_2)\,\Gamma({}^1/_2\,k+{}^1/_2)} \tag{2.9}$$

Ясно, что $g_m^*(s)$ не удовлетворяет условию (2.3). Для того чтобы удовлетворить последнему условию, следует построить обобщенное решение, зависящее от m произвольных постоянных, прибавив к $g_m^*(s)$ линейную комбинацию из дельта-функции и ее производных, представляющую решение однородного уравнения

$$\int_0^r (r^2-s^2)^{m-1/2} g_m(s)\,ds = 0 \tag{2.10}$$

Итак,

$$g_m(s) = g_m^*(s) + \sum_{\mu=0}^{m-1} C_\mu^{(m)} \delta^{(\mu)}(a-s) \tag{2.11}$$

Тогда из условия (2.3) получается линейная система для определения постоянных:

$$\int_0^a s^{2k} g_m^*(s)\,ds + \sum_{\mu=0}^{m-1} C_\mu^{(m)} \delta^{(\mu)}(a-s) = 0 \qquad (k=0, \ldots, m-1) \tag{2.12}$$

Этим и завершается построение функции $\Psi_m(r, z)$ по условиям (1.5) и уравнению (1.6).

Внося (2.11) в (2.1), видим, что $\Psi_m(r, z)$ определяет линейную комбинацию из интегралов и производных вида

$$\int_0^a [r^2+(z+is)^2]^{m-1/2} s^k\,ds \quad (k \text{ — целое}), \qquad \left(\frac{d}{da}\right)^\mu [r^2+(z+ia)^2]^{m-1/2}$$

т. е. выражается конечной комбинацией элементарных функций определенного сорта. Нетрудно было бы написать конечное выражение этой функции для данного $f_m(r)$ и соответственно выражение Ψ через $f(r, \varphi)$, но такие выражения были бы очень громоздки. Лучше рассматривать совокупность написанных выше формул как алгоритм, позволяющий конечным числом шагов найти выражение функции $\Psi(r, z, \varphi)$.

3. Рассмотрим в качестве простейшего примера плоский штамп, внедряющийся наклонно под действием момента M. В этом случае $w = \beta x$. Распределение давления под штампом для этого случая известно:

$$p(x, y) = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \frac{\beta x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \tag{3.1}$$

Разложение (1.1) сводится к одному члену $\beta r \cos\varphi$. Имеем $f_1(r) = \beta r$. Из уравнения (2.5) находим $g_1^*(s) = (4/\pi)\beta$. Произвольная постоянная одна и находится сразу: $C_0 = -(4/\pi) a\beta$. Итак,

$$g_1(s) = \frac{4\beta}{\pi}[1 - a\delta(a - s)] \tag{3.3}$$

и по формуле (2.1) имеем

$$\Psi_1(r, z) = \frac{4\beta}{\pi r} \operatorname{Re} \int_0^a [r^2 + (z + is)^2]^{1/2} [1 - a\delta(a - s)]\, ds \tag{3.3}$$

Выполнив интегрирование, получим

$$\Psi_1(r, z) = \frac{2\beta}{\pi r} \operatorname{Im}\{(z - ia)\sqrt{r^2 + (z + ia)^2} + r^2 \log[z + ia + \sqrt{r^2 + (z + ia)^2}]\} \tag{3.4}$$

$$\Omega_1(r, z) = \frac{2\beta}{\pi r} \operatorname{Im}\left\{\sqrt{r^2 + (z + ia)^2} + \frac{r^2 + z^2 + a^2}{\sqrt{r^2 + (z + ia)^2}}\right\} \tag{3.5}$$

При $z = 0$ будет

$$\Psi_1 = \begin{cases} \beta r & \text{при } r \leqslant a \\ \dfrac{2}{\pi} r\left(\arcsin\dfrac{a}{r} - \dfrac{a\sqrt{r^2 - a^2}}{r^2}\right) & \text{при } r \geqslant a \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\Omega_1 = \begin{cases} \dfrac{-4r}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} & \text{при } r < a \\ 0 & \text{при } r > a \end{cases} \tag{3.7}$$

Отсюда смещение на границе вне области контакта

$$w = \Psi_1(r, 0)\cos\varphi = \frac{2}{\pi} x\left(\arcsin\frac{a}{r} - \frac{a\sqrt{r^2 - a^2}}{r^2}\right) \tag{3.8}$$

Для давления под штампом получается (3.1). Общая формула для напряжения σ_z имеет вид:

$$\sigma_z = \frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \frac{x}{r^2} \operatorname{Im}\left\{\sqrt{r^2 + (z + a)^2} + \frac{a^2 + r^2 - 2z^2 - iaz}{\sqrt{r^2 + (z + ia)^2}} - \frac{z(r^2 + a^2 + z^2)}{[r^2 + (z + ia)^2]^{3/2}}\right\} \tag{3.9}$$

4. Другой пример. Пусть $w = \alpha - k_1x^2 - k_2y^2$. В полярных координатах

$$w = \alpha - \frac{1}{2}(k_1 + k_2) r^2 - \frac{1}{2}(k_1 - k_2) r^2 \cos 2\varphi \tag{4.1}$$

$$f_0(r) = \alpha - \frac{1}{2}(k_1 + k_2) r^2, \qquad f_2(r) = -\frac{1}{2}(k_1 - k_2) r^2 \tag{4.2}$$

Функцию $\Psi_0(r, z)$ находим согласно [5]. Получаем

$$\Psi_0(r, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\{[2\alpha + (k_1 + k_2)(2z^2 - r^2)] \log[z + ia + \sqrt{r^2 + (z + ia)^2} + (k_1 + k_2)(-3z + ia)\sqrt{r^2 + (z + ia)^2}]\} \tag{4.3}$$

Регулярное решение уравнения (2.6) в данном случае будет

$$g_2^*(s) = -\frac{8}{3\pi}(k_1 - k_2) \tag{4.4}$$

и для определения постоянных C_0, C_1 имеем систему

$$C_0 - \frac{8a}{3\pi}(k_1 - k_2) = 0, \qquad C_0a^2 + 2C_1a - \frac{8a^3}{9\pi}(k_1 - k_2) = 0 \tag{4.5}$$

Отсюда

$$g(s) = -\frac{8}{3\pi}(k_1 - k_2)\left[1 - a\delta(a - s) + \frac{1}{3}a^2\delta'(a - s)\right]\ldots \tag{4.6}$$

$$\psi_2(r, z) = -\frac{8}{3\pi r^2}(k_1 - k_2)\,\mathrm{Re}\int_0^a [r^2 + (r + is)^2]^{3/2}\left[1 - a\delta(a - s) + \frac{1}{3}a^2\delta'(a - s)\right]ds\ldots \tag{4.7}$$

Выполнив интегрирование, получим

$$\psi_2(r, z) = -\frac{8}{3\pi r^2}(k_1 - k_2)\,\mathrm{Im}\left\{\left(\frac{1}{4}t - ia\right)(r^2 + t^2)^{3/2} + \frac{3}{8}(r^2 - a^2)\,t\,(r^2 + t^2)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}r^4\log\left(t + \sqrt{r^2 + t^2}\right)\right\} \qquad (t = z + ia) \tag{4.8}$$

Несколько громоздкие выражения для функций $\Psi_m(r, z)$ значительно упрощаются в специальных случаях: $z = 0$, $z = a$, $r = a$.

Мы можем для сравнения с известным результатом вычислить давление под штампом. Дифференцируя (4.3) и (4.8), находим

$$\Omega_0(r, z) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\left\{4z\log\left[z + ia + \sqrt{r^2 + (z + ia)^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{2\alpha - (k_1 + k_2)(a^2 + r^2 + 3z^2 + 2iaz)}{\sqrt{r^2 + (z + ia)^2}} - 3(k_1 + k_2)\sqrt{r^2 + (z + ia)^2}\right\} \tag{4.9}$$

$$\Omega_2(r, z) = -\frac{8}{4\pi r^2}(k_1 - k_2)\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{4}(r^2 + t^2)^{3/2} + \left(\frac{3}{4}t^2 - 3iat + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3}{8}r^2 - a^2\right)(r^2 + t^2)^{1/2} + \left(\frac{3}{8}r^2t^2 - a^2t^2 + \frac{3}{8}r^4\right)(r^2 + t^2)^{-1/2}\right\} \qquad (t = z + ia) \tag{4.10}$$

Отсюда

$$\Omega_0(r, 0) = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\alpha - (k_1 + k_2)a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{4}{\pi}(k_1 - k_2)\sqrt{a^2 - r^2} \tag{4.11}$$

$$\Omega_2(r, 0) = +\frac{8}{3\pi}(k_1 - k_2)\frac{r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{4.12}$$

Вычисляя давление по формуле

$$\frac{2(1 - \nu^2)}{E}\,p = -\Psi'_z\Big|_{z=0} = -\Omega_0(r, 0) - \Omega_2(r, 0)\cos 2\varphi \tag{4.13}$$

получаем

$$p(x, y) = \frac{E}{\pi(1 - \nu^2)}(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}\left[\alpha + (k_1 + k_2)a^2 - 2(k_1 + k_2)(x^2 + y^2) - \right.$$
$$\left. - \frac{4}{3}(k_1 - k_2)(x^2 - y^2)\right] \tag{4.14}$$

Этот же результат получается методом неопределенных коэффициентов, когда используется теорема о виде функции $p(x, y)$, если $u_z\big|_{z=0} = w(x, y)$ — полином. Впрочем, сама эта теорема может быть получена как следствие формулы (2.5) и замечаний о виде функций $g_m(s)$.

5. В заключение покажем, каким образом можно получить комплексное представление функции Грина задачи о штампе, круглом в плане. Для этого в комплексной гармонической функции

$$\psi_0(r, z) = \log\left[z + ia + \sqrt{r^2 + (z + ia)^2}\right] \tag{5.1}$$

положим $r^2 = (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2$ и произведем инверсию с постоянной $k^2 = a^2 - \zeta^2 - \eta^2$; после несложных приведений получим комплексную гармоническую функцию переменных x', y', z' с параметрами ζ, η:

$$\Phi(x', y', z'; \zeta, \eta) =$$
$$= \frac{1}{\rho'}\log\left\{ia + \frac{1}{\rho'}\sqrt{[(x' + \zeta)^2 + (y' + \eta)^2 + (z - ia)^2](\zeta^2 + \eta^2 - a^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(a^2 - \zeta^2 - \eta^2)z'}{\rho'^2}\right\} \qquad \left(\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right) \tag{5.2}$$

Произведем преобразование переноса $x = x' + \zeta$, $y = y' + \eta$, $z = z'$. Получим

$$\Phi(x, y, z; \zeta, \eta) = \frac{1}{\rho}\log\left\{ia + \frac{1}{\rho}\sqrt{[x^2+y^2+(z-ia)^2](\zeta^2+\eta^2-a^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(a^2-\zeta^2-\eta^2)z}{\rho^2}\right\} \qquad (\rho = \sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+z^2}) \tag{5.3}$$

Если $z=0$ и точки $(x, y, 0)$, $(\zeta, \eta, 0)$ принадлежат разным областям относительно окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, то мнимая часть этой функции будет $\pi/2\rho_0$; $\rho_0 = \sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}$. Следовательно, функция

$$G(x, y, z; \zeta, \eta) = \frac{1}{\rho} - \frac{2}{\pi\rho}\operatorname{Im}\log\left\{ia + \frac{1}{\rho}\sqrt{[x^2+y^2+(z-ia)^2](\zeta^2+\eta^2-a^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(a^2-\zeta^2-\eta^2)z}{\rho^2}\right\} \tag{5.4}$$

обращается в нуль, если точки $(x, y, 0)$, $(\zeta, \eta, 0)$ принадлежат указанным разным областям. Если же они принадлежат одной области, то

$$G(x, y, 0; \zeta, \eta) = \frac{2}{\pi\rho_0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(\zeta^2+\eta^2-a^2)}}{a\rho_0} \tag{5.5}$$

причем в обоих случаях корень берется в арифметическом смысле, как в этом нетрудно убедиться, подсчитав предельные значения аргументов.

Формула (5.4) представляет, в компактной записи, функции Грина как для внутренней, так и для внешней области окружности. По сравнению со способом, данным в книге Л. А. Галина, предлагаемый способ проще по выкладкам, и сильнее по результату, так как здесь функции для различных областей находятся в один прием. Комплексная запись упрощает и последующие вычисления. Так,

$$\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{2}{\pi\rho_0}\operatorname{Im}\frac{a^2-\zeta^2-\eta^2+\rho_0\sqrt{\zeta^2+\eta^2-a^2}\,[-ia(x^2+y^2-a^2)^{-1/2}]}{ia\rho_0^2+\rho_0\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(\zeta^2+\eta^2-a^2)}} \tag{5.6}$$

Памятуя при упрощении, что $\sqrt{x^2+y^2-a^2} = -i\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ для внутренней области, находим

$$\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{x=0} = 0 \tag{5.7}$$

если точки $(x, y, 0)$, $(\zeta, \eta, 0)$ принадлежат одной области, и

$$\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{2}{\pi\rho_0^2}\frac{\sqrt{\zeta^2+\eta^2-a^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \frac{2}{\pi\rho_0^2}\frac{\sqrt{a^2-\zeta^2-\eta^2}}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} \tag{5.8}$$

если точки принадлежат разным областям.

Поступила 7 XII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГТТИ, 1953.
2. Леонов М. Ф. Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала. Украинский математический журнал, № 1, 1953.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. ГТТИ, 1949.
4. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство. Научные записки Института машиноведения и автоматики, т. II, вып. 1, УАН, 1953.
5. Ростовцев Н. А. Комплексные функции напряжений в осесимметричной задаче теории упругости. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.